BIBLIOTHÈQUE PRATIQUE
DE L'ENSEIGNANT

Roger Caratini

Mathématiques

I

Bordas

Collaboratrice principale : Françoise Caratini
Édition : Jean-René Gombert
Réalisation technique : Nicole Amiot, Jacqueline N'Guyen-Tien
Documentation rédactionnelle : Jean Gerber
Documentation iconographique : Hélène Pellefigue
Dessins et schémas : Gilles Alkan, Bernard Brotons, Denis Horwath
Mise en pages : Alain Fouin
Couverture : Jean Castel

ISBN 2-04-012207-9

Ce volume est une édition remaniée de : *Les nombres et l'espace ;* il a été publié pour la première fois aux Éditions Bordas en 1971, dans la collection « Bordas-Encyclopédie ».

Avant-propos

« Moi, les mathématiques, je n'y ai jamais rien compris et je n'y comprendrai jamais rien ! » Que de fois n'a-t-on entendu cette phrase désabusée. Au risque de chagriner nos amis mathématiciens, nous pensons que la plupart des personnes qui la prononcent ont raison. Nous irons même plus loin : nous pensons que tous ceux qui font un effort pour apprendre (et non plus pour comprendre) les mathématiques ont des chances de perdre leur temps. Doivent-ils pour autant fermer ce livre? Peut-être pas. Nous allons nous expliquer.

A la fin de la scolarité secondaire, il existe, dans tous les pays, une sorte de « Jugement dernier » — qu'on l'appelle « Baccalauréat », « Certificat de fin d'études », ou de quelque autre nom. Il isole de la masse des collégiens quelques individus qui ne se sont pas noyés dans la mare aux équations et aux problèmes de géométrie, c'est-à-dire le petit nombre de gens qui se sentent susceptibles de « comprendre les mathématiques ». Et, parmi eux, une hiérarchie va s'établir, du banal apprenti mathématicien au grand savant international, dont les œuvres ne sont accessibles qu'à quelques-uns, en passant par les élèves des « Grandes Écoles », les professeurs, etc.

Mais ces « mathématiciens » constituent une minorité intellectuelle. La plus grande partie de la population cultivée d'un grand pays moderne a développé sa culture en dehors des mathématiques. Pourquoi? Sans doute parce que les mathématiques ne peuvent s'accommoder d'une culture passive (qui n'est souvent qu'une illusion de culture), comme les autres sciences, les disciplines anthropologiques, littéraires, etc. On peut expliquer au « grand public », d'une façon relativement simple, en quoi consiste la vaccination, qu'est-ce que l'inflation, le structuralisme, la psychanalyse, comment est organisée la matière et comment fonctionne un ordinateur. Le lecteur d'un ouvrage de vulgarisation sur ces questions n'a pas besoin de prendre l'attitude d'un médecin, d'un économiste, d'un linguiste, d'un ingénieur pour comprendre l'exposé qu'il lit. En revanche, pour tirer profit d'une explication du théorème de Pythagore, il faut véritablement passer par toutes les étapes de la démonstration et refaire, pour son compte personnel, les raisonnements du géomètre, car ce sont précisément ces raisonnements qui sont mathématiques; le résultat, c'est-à-dire la propriété bien reconnue du triangle rectangle, n'est qu'une sorte de « prime » au raisonnement. Cela signifie que, pour comprendre les mathématiques, il faut participer activement à l'élaboration de ce savoir et non pas l'enregistrer passivement, comme un enfant écoute une histoire. Or la nature humaine est paresseuse. Lire un beau roman ou une belle poésie, écouter un concerto de Bach ou un solo de Charlie Parker, admirer une toile de Matisse, voir un film de Chaplin sont des actions éminemment « culturelles », mais qui ne nous demandent pas d'effort apparent; on peut relâcher son attention à l'audition du concerto, ne pas « écouter » quelques mesures et se retrouver, ensuite de nouveau transporté par les harmonies de J.-S. Bach. Cela n'est pas possible quand on lit un ouvrage sur les mathématiques. Il n'est plus question de sauter une ligne, sinon, on se condamne à ne plus rien comprendre. Et c'est pourquoi rien n'est plus ingrat que de présenter l'ensemble des connaissances mathématiques, du moins dans leurs grandes lignes, à des profanes ou même à des semi-profanes.

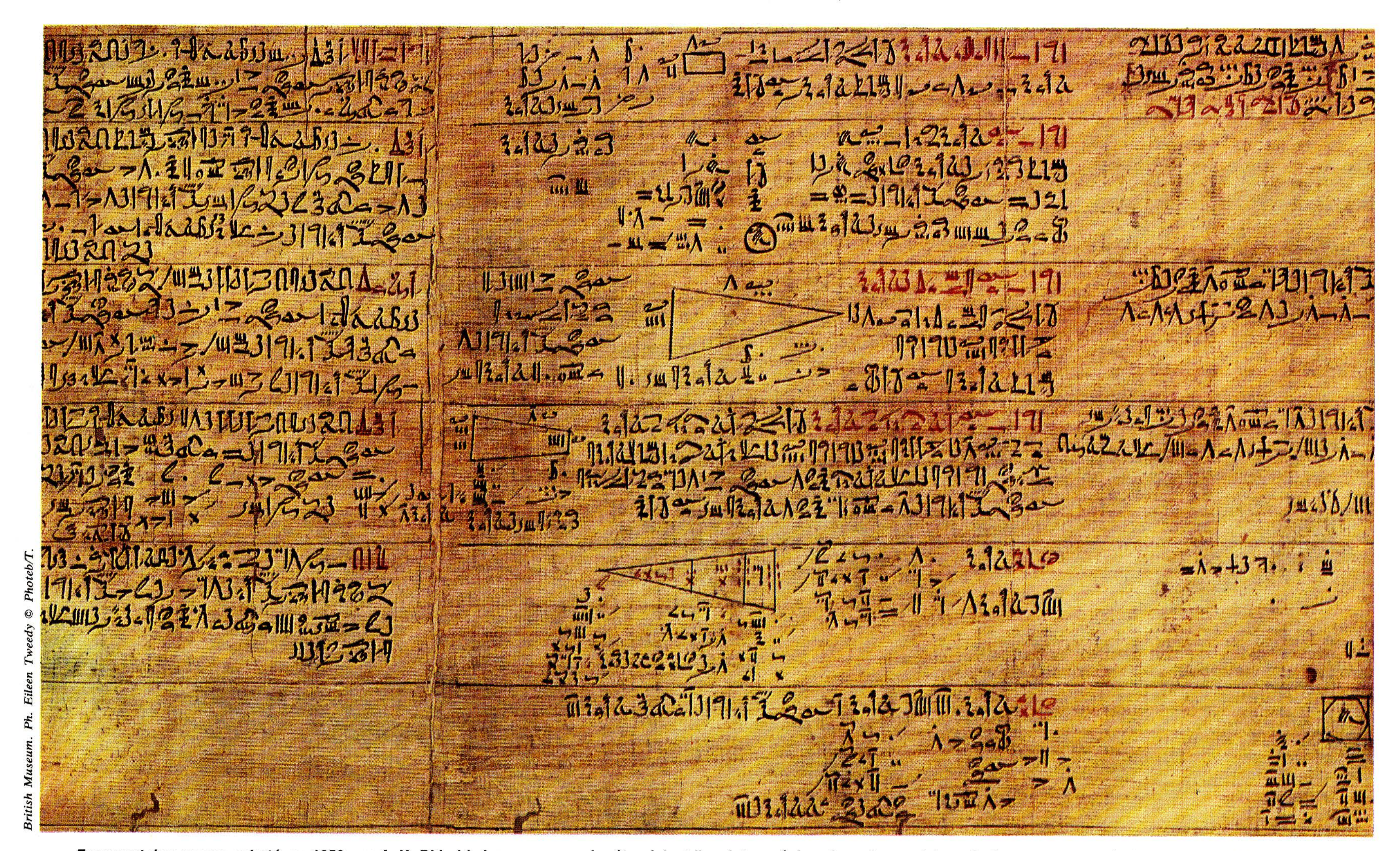
Dans ce livre, nous avons délibérément choisi un parti. Nous n'avons pas voulu en faire un recueil de « divertissements mathématiques ». Pas davantage n'avons-nous eu l'intention d'en faire l'Aide-mémoire du parfait bachelier, c'est-à-dire tout à la fois un formulaire, un recueil de définitions et de procédés classiques pour résoudre quelques grandes catégories de problèmes (il y a, sur ce sujet, d'excellents livres, écrits par des pédagogues avertis qui, en utilisant les méthodes de l'enseignement programmé par exemple, peuvent mettre à peu près n'importe quel lecteur, à la condition qu'il soit homme de bonne volonté, au niveau d'un bachelier scientifique). Notre propos a été de passer en revue l'ensemble des connaissances mathématiques fondamentales, en insistant sur leur genèse historique et logique, sur leur importance pour l'élaboration de théories plus complexes. Nous avons aussi cherché à expliquer comment des domaines entiers des mathématiques se sont transformés, depuis environ un siècle, grâce aux remises en question des principes de base de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie par des mathématiciens, comme Cantor, le créateur de la théorie des ensembles, ou comme Hilbert, l'un des maîtres de l'axiomatique au début du XX[e] siècle. Certes, nous ne nous faisons pas d'illusions. La théorie des ensembles, par exemple, est bien loin de représenter la totalité de l'algèbre moderne; elle tient même, à notre avis, une place trop importante dans certains programmes scolaires, d'autant que les élèves auxquels on l'enseigne savent rarement s'en servir avec rigueur et efficacité. Nous lui avons consacré un nombre de pages que certains jugeront peut-être excessif : mais il est bon, dans un ouvrage comme celui-ci, de familiariser le lecteur avec ce langage dont il n'a peut-être jamais rien su, s'il a fait ses études primaires et secondaires avant 1960.

Voici donc comment nous avons procédé. Les matières de notre livre sont réparties en quelques grands chapitres, selon les divisions traditionnelles des mathématiques (arithmétique, algèbre, géométrie, trigonométrie analytique, analyse). Chaque chapitre comprend, en général, une introduction historique, complétant l'aperçu historique général formant l'introduction, et lisible par tous; nous nous sommes efforcé d'éviter les anecdotes et les renseignements biographiques, pour souligner le rôle que chaque chercheur a joué relativement aux progrès des théories mathématiques. A l'occasion de ces introductions, des notions de base sont parfois présentées, et nous ne saurions trop conseiller au lecteur novice de les lire attentivement : à ce stade de l'exposé, il ne rencontrera aucun obstacle particulier.

Puis nous reprenons ces notions fondamentales, et nous en donnons une description plus générale, tout en conservant le contact avec la réalité expérimentale (non pas pour montrer que les mathématiques sont une sorte de « science naturelle » très élaborée, mais pour souligner les applications possibles de telle ou telle théorie, c'est-à-dire pour créer, chez le lecteur hésitant, une motivation, en dehors de toute considération de rigueur logique). Ensuite, nous récapitulons les définitions, les propriétés, le déroulement du raisonnement, en nous plaçant à un niveau plus technique : c'est à ce niveau que le lecteur qui « n'a-jamais-rien-compris-aux-mathématiques » risque de nous abandonner. L'ensemble ne remplace pas, évidemment, un cours complet de mathématiques supérieures (ce n'est d'ailleurs pas son ambition); mais il constitue, nous semble-t-il, une introduction générale à un tel cours, et nous espérons qu'il rendra quelques services aux apprentis mathématiciens, en leur proposant une synthèse réfléchie, pas trop rébarbative, des connaissances qu'ils auront à assimiler au cours de leurs études. Quant aux lecteurs non scolaires, ils trouveront sans doute dans cet ouvrage les éléments nécessaires pour s'initier, sans trop de perte de temps, aux mathématiques d'aujourd'hui.

Enfin, une Annexe importante fournira au lecteur un résumé des connaissances « traditionnelles » sur la géométrie et l'algèbre élémentaires, et des compléments détaillés sur certaines théories (calcul intégral, fonctions usuelles, géométrie analytique, résolution des équations différentielles, etc.) qui n'ont pu être développées dans le texte proprement dit.

Sommaire



British Museum. Ph. Eileen Tweedy © Photeb/T.

Fragment du papyrus acheté, en 1858, par A. H. Rhind à des paysans qui prétendaient l'avoir trouvé dans les ruines voisines du Ramesseum, sur la rive gauche du Nil, à Thèbes. Le papyrus de Rhind remonte aux environs de 1600 av. J.-C. et contient l'essentiel du savoir mathématique — d'ailleurs peu développé — des Égyptiens.

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

GÉNÉRALITÉS.

Point de vue historique et point de vue génétique.

L'histoire des mathématiques.

Depuis l'Antiquité classique, les mathématiciens et les philosophes ont éprouvé le besoin de passer en revue, avec plus ou moins de détails, les étapes des mathématiques. Le plus ancien historien de la pensée mathématique occidentale est sans doute Eudème de Rhodes (IVe siècle av. J.-C.), disciple direct d'Aristote, et qui avait écrit une *Histoire de la géométrie*, dont le philosophe Geminus de Rhodes (Ier siècle av. J.-C.) fit une compilation 300 ans plus tard. Cette compilation parvint jusqu'au néoplatonicien Proclus (412-485), professeur à l'École d'Athènes et auteur de *Commentaires* célèbres sur l'œuvre d'Euclide. Le *Prologue* des *Commentaires* de Proclus contient une histoire résumée de la géométrie grecque, inspirée de la compilation (perdue) de Geminus faite à partir de l'œuvre, perdue elle aussi, d'Eudème de Rhodes.

Depuis ces illustres ancêtres, l'histoire des mathématiques a eu de glorieux représentants. Les uns furent des mathématiciens de profession, qui éprouvèrent le besoin de justifier leurs découvertes ou leurs théories en se fondant ou en critiquant celles des auteurs qui les avaient précédés. Tels furent, par exemple : l'Anglais John Wallis dans son *Algebra* (1676) ; le philosophe Leibniz, inventeur du calcul différentiel, dans un opuscule écrit en latin : *Histoire et origine du calcul différentiel* (1714) ; le géomètre Michel Chasles, auteur d'une *Histoire de la géométrie* (1837). Les autres furent des spécialistes de l'histoire des sciences, principalement à partir du XVIIIe siècle ; parmi ceux-ci on peut citer : le Français Montucla (*Histoire des mathématiques*, 1758) ; Charles Bossut (*Essai sur l'histoire générale des mathématiques*, 1802) ; Guglielmo Libri (*Histoire des mathématiques en Italie*, 1838-1841) ; Moritz Cantor (ne pas confondre avec son homonyme, Georg Cantor, créateur de la théorie des ensembles) dont les *Vorlesungen über Geschichte Mathematik* (*Conférences sur l'histoire des mathématiques*, 1880-1908) sont un ouvrage fondamental sur l'histoire des mathématiques jusqu'à la fin du XVIIIe siècle ; Zeuthen, qui a surtout étudié l'Antiquité, le XVIe et le XVIIe siècles (entre 1886 et 1903) ; Paul Tannery, éditeur moderne de Fermat, Diophante et Descartes ; Gustav Eneström, éditeur de la *Bibliothequa mathematica* (1886-1914), riche en précisions, en détails, en renseignements événementiels ; l'Américain George Sarton ; l'Italien Gino Loria ; le Français Abel Rey (sur la mathématique grecque) ; Nicolas Bourbaki ; etc.

Depuis environ un demi-siècle, si on excepte des travaux ponctuels (sur une œuvre, un problème, une théorie), l'histoire générale des mathématiques n'est plus cultivée. En particulier, à part la très riche thèse de Cavaillès sur la genèse de la théorie des ensembles, l'histoire des mathématiques modernes n'a pas été faite : cette lacune dans notre savoir ne semble hélas pas près d'être comblée.

Le point de vue génétique.

L'historien recense les œuvres des mathématiciens, cherche à établir des filiations entre les Écoles, à retrouver des textes, à mettre en évidence des influences, à reconstituer des biographies, etc., c'est-à-dire, avant tout, à collectionner les *événements* dans un ordre chronologique. Il peut ensuite tracer le tableau d'une époque ou d'une génération. De ce point de vue, les erreurs, les fausses thèses, sont aussi intéressantes pour lui que les théories vraies, le contenu même de ces théories passant au second plan. L'approche *génétique* des mathématiques est plus intéressante et plus ardue. Elle consiste essentiellement à comprendre les étapes cruciales qui ont conduit à l'élaboration d'un résultat, d'une théorie. Dès lors, l'événementiel n'a plus qu'un intérêt secondaire, et c'est l'analyse du processus de pensée qui devient la préoccupation principale. La méthode génétique présente en outre un grand intérêt sur le plan de la pédagogie des mathématiques (un bon exemple en est donné par le *Cours de géométrie analytique* d'Auguste Comte).

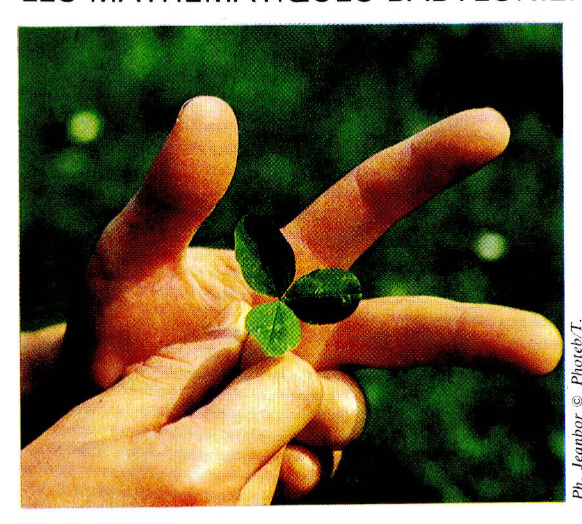
Les grandes lignes de l'histoire des mathématiques.

Les premières notions mathématiques de l'humanité.

Nous ignorons à peu près tout des modes de pensée propres aux premiers hommes de l'espèce *Homo sapiens* qui ont peuplé la Terre il y a environ 50 à 100 000 ans. Pour trouver les premières manifestations — inconscientes — de la pensée mathématique, nous devons nous tourner vers les observations de la psychologie infantile et de l'ethnologie.

● *Deux notions fondamentales.* Il est évidemment bien difficile de dire où et quand cette pensée embryonnaire a vu le jour. Retenons, d'un monceau d'observations, deux processus importants que nous retrouverons — épurés, munis d'une armature logique, abstraits — en mathématiques.

— La perception du « plusieurs » : on peut dresser certains oiseaux à choisir leur nourriture dans un



Ph. Jeanbor © Photeb/T.

Le nombre entier naturel 3 désigne, expérimentalement, la correspondance entre chaque élément (feuilles) de l'ensemble I (Trèfle) et chaque élément de l'ensemble II (pouce, index, majeur). Toutes les fois qu'un ensemble E quelconque pourra être apparié à l'ensemble {pouce, index, majeur} nous dirons qu'il contient trois éléments et nous désignerons ce fait, soit par un ensemble de bâtons : (III), soit par un symbole conventionnel : (3).

tas de grains plus volumineux qu'un autre ; un enfant est capable, au début de la deuxième année de sa vie, de réunir en un seul ensemble trois ou quatre objets identiques préalablement séparés. Cette aptitude à percevoir spontanément la différence entre un ensemble *plus nombreux* et un ensemble *moins nombreux* est appelé, en psychologie, la *perception de la pluralité*.

— La notion de *correspondance* : dès qu'un enfant a acquis une certaine habileté manuelle, il est capable de grouper des objets deux par deux, selon une règle simple déterminée. Par exemple, si on lui donne 12 poupées et 12 chaises de poupées, il est capable de placer chaque poupée sur une chaise, c'est-à-dire d'*apparier* les éléments d'un premier ensemble aux éléments d'un second ensemble. L'enfant est aussi en mesure de constater l'impossibilité de l'appariement : il est embarrassé lorsqu'il y a plus de poupées que de chaises ou plus de chaises que de poupées.

● *L'arithmétique expérimentale*. Parmi les ensembles d'objets proposés à sa perception, il en reste un que l'homme a toujours à sa disposition : l'ensemble de ses 10 doigts (auquel on peut adjoindre l'ensemble de ses 10 orteils, dans certains cas du moins). Établir la *correspondance* entre les doigts et les éléments d'un autre ensemble, cela consiste à *compter* d'une façon rudimentaire ces éléments. Je cueille un trèfle au milieu des herbes, je peux associer chaque feuille de ce trèfle à un doigt.

A ce stade très primitif, « compter » c'est donc « apparier » (avec les doigts). Par la suite, l'homme a cherché à dénombrer des ensembles plus nombreux que celui de ses 10 doigts. Il a sans doute répété cet ensemble-étalon autant de fois que c'était nécessaire, constituant ainsi, d'une façon purement expérimentale, l'*ensemble des nombres entiers naturels*, que l'on peut écrire avec des bâtons, ou, ce qui est plus commode, avec des *symboles numériques* conformément à un système de numération : 1, 2, 3, 4, ...

Sans entrer dans des considérations concernant la naissance historique de la pensée mathématique, on peut donc affirmer que celle-ci a été, pour une grande part, le produit de ces deux aptitudes de l'esprit humain. De la sorte, les premiers balbutiements en mathématiques de l'humanité ont abouti à l'*art de compter*, puis à l'arithmétique. La *géométrie*, c'est-à-dire la science des correspondances dans l'espace, n'est venue que plus tard, lorsque, dans les sociétés organisées, se sont développés l'arpentage (lié à la fois au droit de propriété et à l'existence des impôts fonciers) et l'architecture (liée au développement parallèle du pouvoir monarchique et de la religion d'État : palais et temples).

Les ensembles géométriques — lignes, surfaces, volumes — étant d'un maniement plus aisé que les autres (on peut les représenter facilement par des *figures*) sont devenus, chez les Grecs, l'objet favori des mathématiciens. A tel point qu'au XVII[e] siècle encore, le mot « géomètre » était synonyme de « mathématicien ». En fait, il ne faut pas perdre de vue ce point : les mathématiques ne doivent pas se définir par leur *contenu* (nombres, objets géométriques, grandeurs, etc.), mais par leur *attitude*, ou, comme on dit, par leur *forme*. Qui dit « mathématiques » dit « rigueur démonstrative », et nous allons voir que l'histoire de cette science est une longue recherche de la cohérence logique.

Avant les Grecs.

● *La Mésopotamie*. Les plus anciens textes mathématiques que nous possédions sont des tablettes cunéiformes que nous ont laissées les peuples de l'ancienne Mésopotamie (Sumériens, Akkadiens, Babyloniens, Assyriens). Certaines de ces tablettes ont plus de 5 000 ans d'âge ; elles ont été publiées principalement par Thureau-Dangin et O. Neugebauer, un peu avant et un peu après la Seconde Guerre mondiale. Des commentaires plus récents (1950-1960) en ont été faits par l'auteur de cette *Encyclopédie*, puis par E. Bruins. Voici quels sont les traits les plus remarquables des mathématiques assyro-babyloniennes.

— Les milliers de tablettes qui ont été retrouvées peuvent être classées en deux catégories :

1 - les unes sont des tables numériques (addition, multiplication, division, élévation à la puissance 2, à la puissance 3, racines carrées et racines cubiques), analogues aux tables de calculs dont se servent les écoliers ;

2 - les autres contiennent des problèmes, posés et résolus, et ressemblent aux recueils d'exercices avec corrigés, bien connus des collégiens ; certaines tablettes contiennent plusieurs dizaines de problèmes du même type, résolus par la même formule (seules les données numériques changent d'un problème à un autre).

L'existence de ces tablettes et leur aspect pédagogique montrent la place qu'occupait la mathématique chez les anciens Mésopotamiens.

— Les Mésopotamiens ont été des virtuoses du calcul. Ils utilisaient un système de numération, dit *sexagésimal de position*, qui suppose un approfondissement considérable de la notion de nombre. En voici les principaux traits.

1 - Il y a deux signes numériques :

𒁹 = 1 ;
𒌋 = 10.

2 - Un nombre inférieur à 60 est écrit à l'aide de ces deux signes, convenablement juxtaposés. Ainsi 43 s'écrit :

𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹.

3 - Nous comptons en dizaines, centaines, milliers, etc. ; les Babyloniens comptaient en soixantaines, soixantaines de soixantaines, soixantaines de soixantaines de soixantaines, etc. (leur numération est *sexagésimale* et non pas *décimale*). Dans notre système décimal de numération, le chiffre 1 signifie « un », « dix » ou « cent », etc., selon sa position à l'intérieur du nombre écrit décimalement. Ainsi 123 signifie :

$$(10^2 \times 1) + (10 \times 2) + 3 .$$

Il en est de même dans les tablettes cunéiformes, où le signe 𒁹 signifie 1, 60, 60^2, 60^3, etc., selon sa position (souvent, pour éviter la confusion, le scribe écrit le clou plus ou moins grand selon l'ordre d'unités qu'il représente). Exemples :

— 𒁹 = 1 (mais aussi 60, 60^2, ... : le contexte fixe l'ordre de grandeur) ;

— 𒁹𒁹𒌋 signifie $(60 \times 2) + 10 = 130$, mais 𒌋𒁹𒁹 signifie 12, de même 𒁹𒁹𒁹 signifie $60^3 + 60^2 + 1 = 219\,601$ pour marquer la différence d'ordre d'unités entre les trois clous, nous les avons écrits avec des hauteurs différentes ; en général, dans les textes cunéiformes, cette précaution graphique n'existe pas, et c'est la considération des ordres de grandeur des problèmes qui permet de dire que 𒁹𒁹𒁹 = 219 601 et non pas 3.

4 - Soulignons l'originalité du système en le comparant à la notation romaine par exemple : celle-ci est une notation par *juxtaposition* (on additionne les lettres : MCCCXXX = 1 000 + 300 + 30 = 1 330) ; les opérations avec un tel système sont lourdes et difficiles. De plus l'écriture des grands nombres est une tâche ardue. Avec la numération de position, ces difficultés disparaissent : on peut calculer à l'aide de retenues, on peut écrire n'importe quel nombre grâce à l'existence du symbole 0. Toutefois le système assyro-babylonien de numération n'était pas aussi parfait que le nôtre ; il en diffère en trois points : 1° la base est sexagésimale et non décimale, d'où une certaine lourdeur dans les calculs ; 2° les signes numériques sont imparfaits (nous avons un signe pour chaque nombre de 1 à 9 ; les Babyloniens ne possédaient pas 59 signes distincts) ; 3° le 0 et la virgule n'existent pas chez les Babyloniens (mais cet inconvénient est compensé par des astuces d'écriture et la considération de l'ordre de grandeur des données ; quant au signe 0, il n'apparaîtra que tardivement, à l'époque séleucide).

— Les problèmes proposés conduisent presque tous à la résolution d'une équation (du premier ou du deuxième degré en général). Aucun texte ne nous donne la démonstration des formules employées, mais ces formules sont toujours les mêmes et elles sont exactes. En particulier les Babyloniens appliquent systématiquement la formule :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1)$$

pour résoudre les équations du second degré de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(ils désignent l'inconnue par 𒁹 et mentionnent les coefficients en toutes lettres, en précisant la grandeur qu'ils représentent).

L'existence d'une algèbre aussi remarquable est

Un exemple de tablette mathématique cunéiforme qui remonte à l'ancien âge babylonien, c'est-à-dire aux environs de 1700 av. J.-C. : elle est un peu plus ancienne que le papyrus de Rhind. Le texte qu'elle contient est un fragment de calcul (sans doute utilisé pour la résolution d'un problème d'algèbre). Le lecteur parviendra peut-être à lire les caractères 𒁹𒌋𒌋 au début de la deuxième ligne : le 𒁹 est l'unité, les signes 𒌋𒌋 signifient 20 unités du deuxième ordre (20 soixantièmes). De même on peut apercevoir, à la ligne suivante, les signes 𒁹𒁹𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 qui se lisent : a-na 6 ***et qui signifient « multiplie par 6 ». A la quatrième ligne on donne le résultat de la multiplication de*** $\left(1+\frac{20}{60}\right)$ ***par 6, soit 8 (𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹, au début de la ligne). La suite des calculs indique qu'il faut diviser 8 par 2 et élever le résultat, soit 4, au carré, ce qui donne 16.***



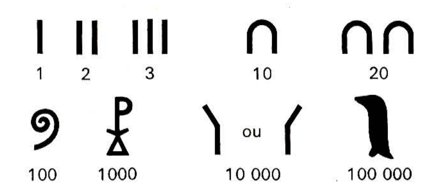
Ph. © X-D.R./T.

pour nous un mystère ; elle suppose que les scribes mésopotamiens avaient atteint un haut degré d'abstraction (on ne trouve pas « par tâtonnements » la formule générale de résolution de l'équation du second degré). En revanche, il n'y a presque pas de problèmes géométriques : les Babyloniens ont été essentiellement des algébristes ou, comme les nommaient les Grecs des *logisticoi* (= « calculateurs »).

— Le savoir mathématique des Mésopotamiens est resté en Mésopotamie. Nulle part ailleurs, dans le monde de la Méditerranée orientale, on ne retrouve une telle perfection et un tel degré d'abstraction. Il semble même que les Grecs, qui furent les créateurs de ce que nous appelons, en toute rigueur, les mathématiques, ont ignoré les tablettes cunéiformes (les eussent-ils connues, qu'ils n'auraient pu les déchiffrer). De sorte que la grande tradition algébrique créée par les scribes de Sumer et d'Akkad restera lettre morte, jusqu'à ce qu'un mathématicien d'Alexandrie, Diophante, la reconstitue (on ignore à partir de quelle source) au IVe siècle ap. J.-C.

● *Égypte ancienne.* Malgré les affirmations des anciens Grecs, les connaissances mathématiques des Égyptiens doivent être considérées comme rudimentaires, surtout si on les compare à celles des Mésopotamiens. Elles sont de plus fort tardives : le principal texte mathématique égyptien, le *Papyrus de Rhind* (du nom de son découvreur, A. H. Rhind, qui l'acheta à des paysans égyptiens en 1858) a été écrit par un scribe sous le règne du roi Apophys, c'est-à-dire vers 1600 av. J.-C. (il se présente comme la copie d'un écrit plus antique, remontant à la XIIe dynastie pharaonique). A ce texte important s'ajoutent quelques fragments de papyrus de la XIIe dynastie, quelques écrits plus récents, et c'est tout : on est loin des milliers de tablettes cunéiformes.

— Le système de numération égyptien était un système décimal par juxtaposition. Il ne semble pas que les Égyptiens aient « su compter » au-delà de un million. Les signes employés sont indiqués sur la figure ci-après.



Comment comptaient les Égyptiens ? Les signes numériques sont juxtaposés ; il faut les additionner pour connaître le nombre représenté.

— Le papyrus de Rhind donne des règles de calcul relatives aux fractions (addition et soustraction) ; en fait, les Égyptiens n'ont connu que les fractions dont le dénominateur est 2, 3, 4, ..., et les fractions 2/3 et 3/4. Leur notation était la suivante (on pense qu'elle est à l'origine de la *barre de fraction* introduite par les Arabes au Moyen Âge) :



Notation fractionnaire chez les Égyptiens.

— Arithmétique et algèbre : les Égyptiens n'ont pas poussé très avant la théorie des nombres ; par contre ils savaient résoudre par tâtonnements des équations simples du premier degré de la forme :

$$ax = b\,, \qquad (2)$$

b étant en général un multiple de a. Le papyrus de Rhind comprend plusieurs problèmes d'arithmétique qui font intervenir, à chaque fois, une recette nouvelle : il n'y a ni systématisation du problème, ni perception d'une méthode générale de solutions, comme c'était le cas dans les textes mathématiques cunéiformes.

— Quant à la géométrie égyptienne, elle concerne à peu près uniquement des mesures de surfaces ou de volumes, en relation avec des problèmes pratiques d'arpentage. Dans tous les cas il s'agit de *recettes utilitaires* : jamais l'intérêt théorique d'un problème ne semble aperçu.

● *Autres apports orientaux antérieurs aux Grecs.*

— *Les Phéniciens* (au Ier millénaire av. J.-C.) ont repris le système babylonien et ils ont tenté de créer un système de numération moins encombrant que le système égyptien et qui devait être repris et perfectionné par les Grecs au IIIe siècle av. J.-C. (système des *lettres numérales*).

— *Les Chinois* possédaient un *Livre classique du calcul*, composé entre le VIe et le Ier siècle av. J.-C., dans lequel est utilisé un système de numération comprenant neuf signes différents pour désigner les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et quatre signes distincts pour 10, 100, 1 000 et 10 000, plus un signe pour *zéro*. Ce livre comprend aussi un savoir géométrique élémentaire (mesures de surfaces, relations métriques élémentaires, etc.).

— *En Inde*, la mathématique, la religion et la philosophie se confondent. Le savoir géométrique indien est résumé dans la *Sutra* d'Āpastambha (un sage qui vécut peut-être au Ve siècle av. J.-C.). Ce traité constitue un « guide pratique de l'architecte » et contient :

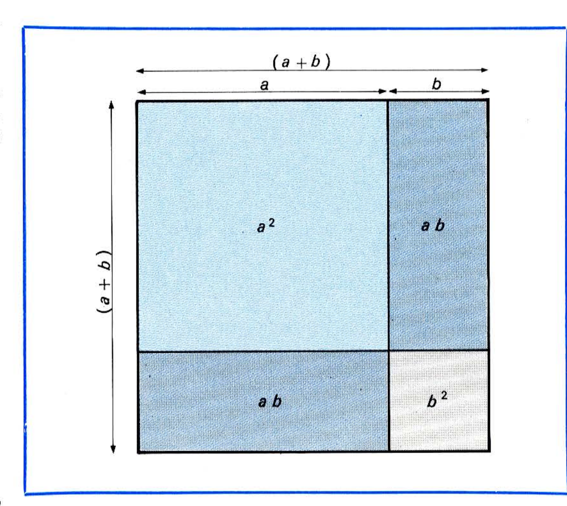
1 - des méthodes pour construire des triangles rectangles à l'aide de cordes ayant pour longueur, 3, 4, 5 ; 12, 16, 20 ; 15, 20, 25 ; on remarquera qu'il s'agit là de *grandeurs pythagoriciennes*, c'est-à-dire que le carré de l'une est égal à la somme des carrés des deux autres : ces méthodes sont donc l'application du *théorème de Pythagore* (qui n'est d'ailleurs ni énoncé, ni démontré) ;

2 - d'autres constructions ou mesures fondées sur ce théorème ;

3 - des méthodes de quadrature (transformer un rectangle en carré, un cercle en carré, etc.) ;

4 - la démonstration géométrique de l'identité bien connue :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2\,. \qquad (3)$$



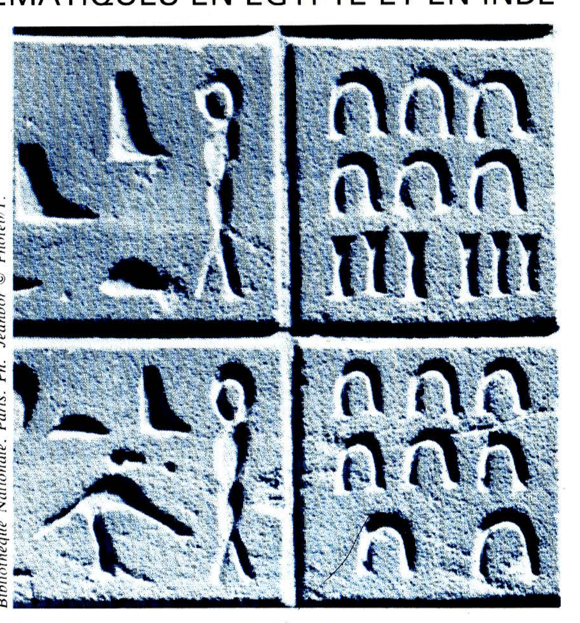
La surface du grand carré, de côtés $(a+b)$, est $(a+b)^2$. On voit sur la figure que cette surface est égale à la somme des surfaces a^2, b^2, ab et ab, d'où l'identité :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2\,.$$

De Thalès à Bourbaki.

Le savoir mathématique actuel se compose de *théories*, c'est-à-dire d'ensembles de théorèmes décrivant les propriétés générales de certains êtres mathématiques comme : les nombres entiers, les groupes, les équations, les fonctions, les matrices, etc. On trouvera, au début de l'exposé de chacune de ces grandes théories, un aperçu historique sur leur genèse, leur développement et leur achèvement.

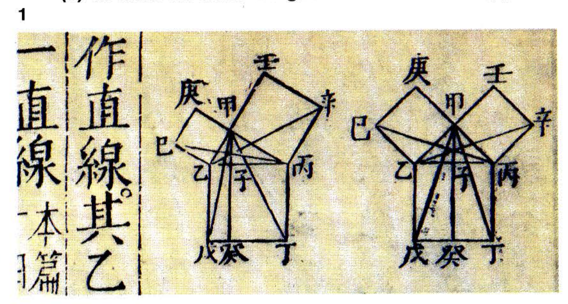
Ici, nous aimerions répondre à la question générale suivante : « Quelles ont été les préoccupations fondamentales des mathématiciens au cours des 25 siècles pendant lesquels se sont constituées les mathématiques ? ». Chaque époque a eu en effet ses modes, ses problèmes, ses traditions : les anciens Grecs ne juraient que par la géométrie, les mathématiciens du XVIIIe siècle s'intéressaient principalement à l'analyse et ceux de la fin du XIXe siècle et du début du XXe siècle à la théorie des ensembles par exemple. Parallèlement, chaque époque a connu ses déviants, précurseurs des recherches futures : Archimède annonce Newton et Leibniz à dix-neuf siècles de distance ; Diophante — le premier grand théoricien de l'algèbre du IVe siècle ap. J.-C. — fait figure de chercheur isolé dans la lignée traditionnelle des géomètres grecs ; plus près de nous, Évariste Galois est, en 1830-1832, le précurseur génial de l'algèbre moderne ; il n'est pas jusqu'au grand Cantor qui n'ait été aprement critiqué et méconnu en son temps (vers 1875).



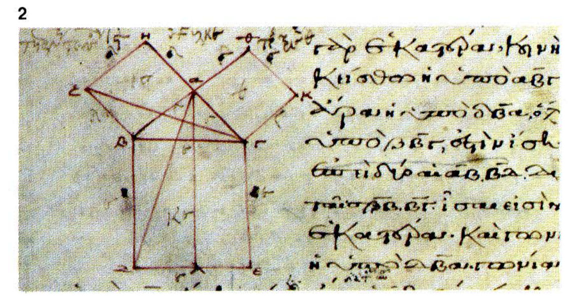
On lit nettement, sur ce document astronomique égyptien relatif au lever héliaque de l'étoile Sothis (calendrier dit d'Éléphantine) les signes numériques de la dizaine et de l'unité (en haut : 66, en bas : 80).

Le théorème de Pythagore a été, pendant des siècles, comme le « mot de passe » des géomètres. En voici l'exposé dans un document chinois (1), dans un manuscrit grec du XIIe siècle (2), en arabe (3) et dans un traité de géométrie médiévale (4).

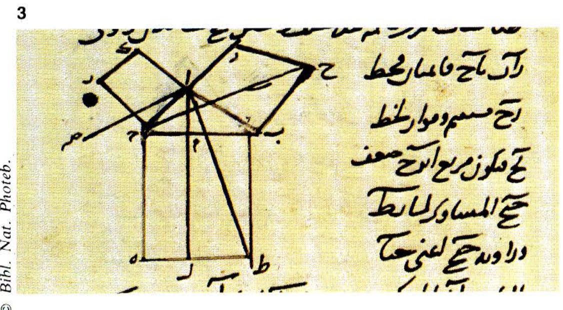
1



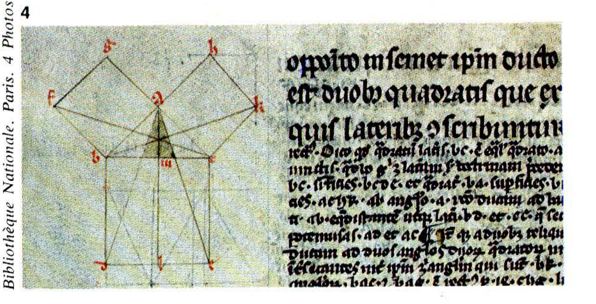
2



3



4





La mort d'Archimède. (Mosaïque d'Herculanum, conservée à la Liebigshaus de Frankfurt am Main.)

● *Les mathématiques grecques* ont été, comme on l'a dit, entièrement centrées sur les problèmes géométriques.

— Selon la tradition (Proclus), le fondateur de la géométrie grecque aurait été le sage Thalès, au VIIe/VIe siècle av. J.-C. ; Pythagore (personnage peut-être mythique) et les pythagoriciens ont développé une arithmo-géométrie ouverte à la fois sur la théorie des nombres et sur les propriétés des figures dans le courant du VIe et du Ve siècle av. J.-C. A l'époque de Platon (Ve/IVe siècle av. J.-C.), les mathématiques connaissent un essor prodigieux, et les découvertes se multiplient : Théodore de Cyrène et Théétète découvrent les nombres irrationnels $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... ; Eudoxe de Cnide, astronome et mathématicien, établit la théorie des proportions et de la similitude, aborde les problèmes fondamentaux de la géométrie dans l'espace et celui de la construction des courbes dites *mécaniques* (c'est-à-dire construites à l'aide d'autres instruments que la règle et le compas).

— Au IIIe siècle av. J.-C. apparaît enfin l'œuvre monumentale d'Euclide, qui enseignait les mathématiques à Alexandrie. Dans ses fameux *Éléments de géométrie*, il présente la totalité des découvertes de ses prédécesseurs augmentées des siennes propres, selon un ordre logique rigoureux, inspiré de la logique aristotélicienne (voir p. 75). La géométrie euclidienne est une théorie parfaite en soi, si l'on admet les propositions de base (axiomes) sur lesquelles elle est bâtie ; elle a été enseignée comme telle jusqu'à une époque très récente et les esprits philosophiques ont admiré de tout temps les « longues chaînes de raisons » (Descartes) qui la constituaient. Le savoir euclidien concernait principalement : la ligne droite ; les polygones, le cercle, la géométrie dans l'espace (polyèdre et corps rond) ; il a été complété au IIIe/IIe siècle av. J.-C. par la théorie des *coniques* (ellipse, parabole, hyperbole), due à Apollonius de Perga. Après ce grand savant, la Grèce ne fournit plus que des commentateurs, ou des mathématiciens qui ont approfondi un point plus ou moins particulier de la géométrie classique (Héron d'Alexandrie, Théon d'Alexandrie, Pappus, Proclus par exemple).

— Le grand déviant des mathématiques grecques fut le Syracusain Archimède, qui vécut de 287 à 212 av. J.-C. (il avait environ 60 ans de moins que le grand Euclide). Outre ses contributions à la géométrie classique (*Sur la sphère et le cylindre, Sur la mesure du cercle, Sur les spirales*), il a introduit la considération des *grandeurs infiniment petites* et de la notion de *limite*. Cette attitude, qui annonce le *calcul infinitésimal* du XVIIIe siècle, lui a permis d'inventer une méthode pour déterminer le nombre π, qui mesure la circonférence d'un cercle de diamètre unité. Enfin Archimède s'est intéressé à la théorie des nombres et il a proposé, dans *L'arénaire*, un système de numération original fondé sur une remarquable analyse de la notion de nombre (voir à ce sujet la page 135 où sont décrits le système classique de numération grecque et le système proposé par Archimède).

— Vers la fin du IIe siècle av. J.-C., l'astronome Hipparque invente une méthode de mesure des distances angulaires qu'on a appelée depuis la *trigonométrie* (en grec *trigōnos* = « triangle » et *metron* = « mesure »). Hipparque a établi les premières tables trigonométriques de l'histoire ; ses calculs et ses théorèmes ont été perfectionnés et complétés par l'astronome Ptolémée, au IIe siècle ap. J.-C. Toutefois, les calculs d'Hipparque et de Ptolémée en sont restés au simple stade d'une technique au service de l'astronomie ; il faudra attendre les temps modernes pour voir la trigonométrie s'ériger en théorie mathématique indépendante.

— Le « mystère » de l'histoire des mathématiques grecques est l'apparition de l'algèbre au IVe siècle ap. J.-C. Pourquoi parlons-nous de mystère ? Pour la raison suivante : la géométrie grecque n'est parvenue au point de perfection qui fut le sien à l'époque d'Euclide qu'après trois ou quatre siècles de recherches acharnées et difficiles ; au contraire, l'algèbre, telle qu'elle apparaît dans le traité intitulé *Les arithmétiques*, d'un certain Diophante d'Alexandrie, atteint du premier coup à une quasi-perfection. Diophante n'a eu, dans les mille ans d'histoire de la mathématique grecque qui ont précédé son œuvre, aucun précurseur ; il n'est l'héritier d'aucune tradition hellénique ou hellénistique. Son traité (qui comportait 13 livres, dont 7 ont été perdus) est donc une œuvre pour le moins surprenante. Les problèmes posés par Diophante sont en effet d'un type nouveau : il ne s'agit plus de trouver quelle est la figure dont tous les points respectent une certaine condition, ni d'établir une relation métrique entre des lignes et des surfaces, mais de calculer une grandeur *inconnue* à partir de certaines relations qu'elle entretient avec d'autres grandeurs connues. En d'autres termes, Diophante établit la méthode de résolution des équations à une ou plusieurs inconnues, du premier ou du second degré ; il donne quelques exemples de résolution d'équations particulières d'un degré supérieur à 2. Son mérite principal a été d'avoir étudié les équations polynômiales (voir ci-après, pp. 66-73) à deux variables et d'avoir cherché des solutions en nombres entiers. Nous retrouverons l'œuvre de Diophante en étudiant l'algèbre, pp. 8-9.

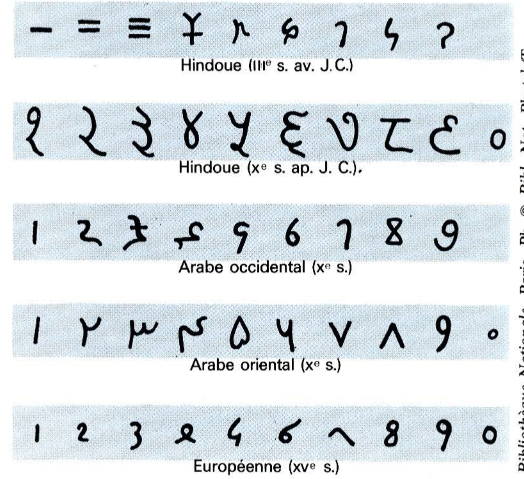
● *L'apport indien* n'est pas très important en quantité, mais capital par ses conséquences. Les Indiens, qui étaient en contact, après les conquêtes de Darius et l'expédition d'Alexandre, avec les civilisations du Proche-Orient, ont sans doute connu le système de numération babylonienne par position. Ils l'adaptèrent à la numération décimale, créant ainsi le système décimal de position qui est notre système actuel. Cette invention capitale a eu lieu vraisemblablement entre le IIe et le VIe siècle ap. J.-C. ; elle a été ignorée des Grecs. Sans entrer dans les détails, disons que les signes numériques indiens ont varié au cours des âges (voir figure ci-après). Avec ces signes on peut écrire n'importe quel nombre, aussi grand soit-il, exactement comme nous le faisons avec nos signes modernes : la valeur d'un signe numérique dépend de son rang. Ainsi un nombre comme 14 202 signifie (de droite à gauche) :

2 unités simples + 0 dizaine
+ 2 centaines + 4 milliers + 1 dizaine de mille.

Le signe « 2 » signifie donc « deux unités simples » quand il occupe le premier rang à droite, et $2 \times 100 = 200$ quand il occupe le troisième rang en partant de la droite. L'intérêt majeur du système est qu'il permet de faire mécaniquement les opérations, selon les règles bien connues des retenues. Il suffit de connaître pour cela les tables d'addition et de multiplication de la « table des 1 » jusqu'à la « table des 9 ».

Les autres apports indiens, dus à des mathématiciens comme Āryabhata (Ve siècle ap. J.-C.), Brahmagupta (VIIe siècle ap. J.-C.), Bhāskara (1114-1185) sont d'un intérêt moindre. Les deux premiers ont perfectionné le calcul trigonométrique ; Bhāskara est l'auteur d'un traité intitulé *Le couronnement du système*, dont

Évolution des signes numériques indiens.
I — Numération indienne antérieure au système de position (remarquez les nombres 1, 2 et 3 qui sont représentés respectivement par 1, 2 et 3 bâtons).
II — Numération indienne (Xe siècle ap. J.-C.) : on constate que certains chiffres (le 2, le 3, le 0) ont déjà leur forme définitive.
III — Numération arabe occidentale au Xe siècle : les chiffres actuels sont presque entièrement constitués.
IV — Numération arabe orientale au Xe siècle.
V — Numération européenne au XVe siècle : le 5 et le 7 n'ont pas encore leur forme définitive.



certains chapitres concernent la résolution d'équations connues des mathématiciens modernes sous le nom d'*équations diophantiennes.*

● *Les mathématiques arabes.* Il ne faut pas exagérer l'importance des mathématiciens arabes. Leur rôle s'est surtout limité à *conserver* et à *transmettre* un savoir dont ils n'étaient pas les auteurs, c'est-à-dire : les connaissances géométriques et astronomiques des Grecs ; le système de numération des Indiens ; les méthodes de Diophante concernant la résolution des équations. Comme les Arabes disposaient d'un système de numération commode, décimal et positionnel (emprunté aux Indiens), ils perfectionnèrent les méthodes de Diophante et donnèrent à l'art du calcul un grand essor. L'essentiel de ces travaux de compilation eut lieu à Bagdad, capitale des califes abbâssides, à partir de 762. Il est remarquable que l'œuvre la plus célèbre de la mathématique arabe ait été le fait non pas d'un mathématicien créateur, comme le furent Eudoxe, Euclide ou Archimède, mais un *bibliothécaire en chef* du calife al-Ma'mun : Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫārizmī (appelé souvent al-Khwarizmi par les Occidentaux) (mort vers 850).

— Le traité d'al-Ḫārizmī, rédigé au début du IXe siècle, enseigne à résoudre des problèmes numériques, traduits par des équations, à l'aide d'une méthode qu'il appelle *al-ğabr wa-l-muqābala*, ce qui signifie à peu près : « restitution et opposition ». Dans ce livre célèbre, connu en Europe dès le XIIe siècle, le bibliothécaire-mathématicien reprend, pratiquement sans les modifier, les méthodes de Diophante. Ce traité, qui a donné son nom à l'algèbre (*al-ğabr*) ne marque théoriquement aucun progrès sur les *Arithmétiques* du mathématicien grec, et ne comporte qu'une originalité : l'usage de la numération décimale de position, emprunté aux Indiens. Par ailleurs, on ne constate aucun progrès ni dans le domaine de la symbolique, ni dans le domaine des méthodes (il y a bien, çà et là, quelques différences, mais elles sont minimes).

Le traité d'al-Ḫārizmī fut traduit en latin vers 1120 par Adélard de Bath, philosophe scolastique qui fit de nombreux voyages dans le monde arabe. Ainsi fut connu en Occident le système de numération indien qu'on appelle, improprement, la *numération arabe.* Le nouveau système eut d'ailleurs bien du mal à s'imposer : les comptables, habitués aux « chiffres romains » et aux méthodes de calcul traditionnelles (avec des tables), n'étaient pas très enthousiastes. Ce n'est qu'au XVe siècle que l'usage de la numération indo-arabe se généralisa en Europe.

Ajoutons un renseignement anecdotique : le mot français « chiffre » vient de l'arabe *sifr*, qui signifie « vide » : c'est ainsi que les mathématiciens de Bagdad appelaient le signe « 0 ». Pour nommer celui-ci, on se servit en France de la transcription italienne de *sifr*, *zefiro*, qui donna « zéro ».

● *Moyen Âge et Renaissance.*

— Au Moyen Âge, on se préoccupa principalement de reconstituer le savoir mathématique des Anciens (principalement : Euclide, Archimède, Apollonius), notamment à partir des traductions latines faites sur des versions arabes des œuvres scientifiques grecques.

— Il faut attendre le XVe et le XVIe siècles, en Italie et en France, pour voir renaître un mouvement mathématique original. Les mathématiciens italiens de la Renaissance (Tartaglia, Cardan, Ferrari, Bombelli sont les plus célèbres) ont repris les mathématiques au stade où les avaient laissées Diophante et al-Ḫārizmī, c'est-à-dire qu'ils ont principalement développé l'algèbre, considérée comme une méthode de résolution générale des équations. Ce faisant, ils ont été amenés à prendre en considération des êtres mathématiques nouveaux : les nombres négatifs et les nombres imaginaires (appelés aussi, selon les auteurs, « impossibles », « sophistiques », « faux », etc.). Le développement du calcul algébrique a imposé l'usage d'abréviations puis de symboles. Le grand art algébrique des Italiens s'est propagé, dans la deuxième moitié du XVIe siècle, en France et en Flandre. C'est Simon Stevin, de Bruges, qui eut l'idée de noter les nombres fractionnaires sous la forme décimale ; ce sont des Français comme Nicolas Chuquet et surtout François Viète qui ont apporté à l'algèbre ses derniers perfectionnements, à savoir le *symbolisme littéral* (pour l'œuvre de Viète, voir ci-après p. 10).

● *Les Temps modernes.*

— Au XVIIe siècle, le grand problème fut celui de l'application de l'algèbre à la géométrie. Dans ce domaine, l'œuvre principale est celle de Descartes, inventeur de la *géométrie analytique* (1637), et celle de Desargues, créateur de la *géométrie projective* (1642-1645). C'est aussi à l'aide du calcul algébrique que l'on cherche à résoudre le problème général des tangentes à une courbe quelconque. Ainsi va naître la *géométrie infinitésimale*, dont Fermat a été le précurseur.

— La grande découverte de la fin du XVIIe siècle fut celle du calcul différentiel et intégral, réalisée à peu près simultanément par Leibniz en Allemagne et par Newton en Angleterre. Cette découverte suffit à alimenter tout le XVIIIe siècle mathématique européen, illustré par les travaux de Bernoulli, Taylor, de Moivre, Clairaut, Euler, Cramer, Lagrange.

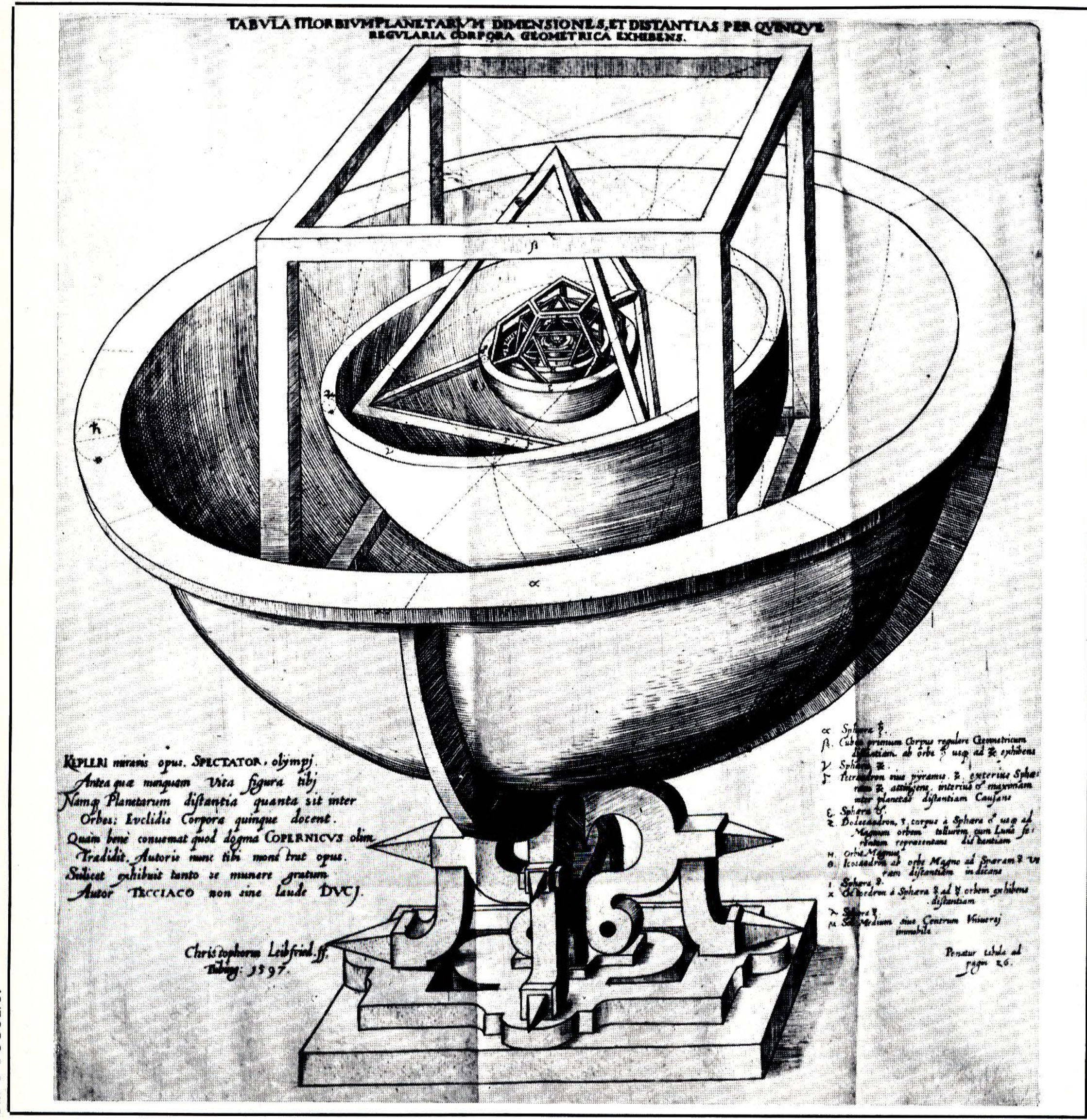
Dans le courant du XVIIIe siècle, en marge de l'Analyse, on voit renaître un intérêt pour l'algèbre, non plus simplement pour l'algèbre considérée comme l'art de résoudre des équations, mais comme une science combinatoire : Lagrange introduit le concept d'*invariance*, et Vandermonde entreprend des recherches sur les équations du 5e degré et sur ce qu'on appelle le théorème fondamental de l'algèbre, énoncé (sans démonstration) par Girard en 1625 et sur lequel nous reviendrons p. 72.

Notons aussi que le XVIIIe siècle ne s'est guère préoccupé de la géométrie traditionnelle, sinon pour la critiquer (Saccheri fut, en 1733, le précurseur des géomètres non-euclidiens du XIXe siècle) ou pour l'adapter à des problèmes de construction (invention de la *géométrie descriptive* par Monge en 1800).

— Le XIXe siècle a été celui de la contestation et des révolutions, en mathématiques comme dans les autres domaines de l'activité humaine. Il est illustré notamment par la création de l'algèbre moderne (théorie des groupes de Galois), par le puissant développement de l'Analyse (Gauss, Cauchy, Abel, Jacobi, Riemann, Weierstrass, Poincaré) et par la remise en question de la géométrie (géométries non-euclidiennes) et de l'analyse, ce qui conduit Cantor et Dedekind à élaborer la théorie des ensembles (1872).

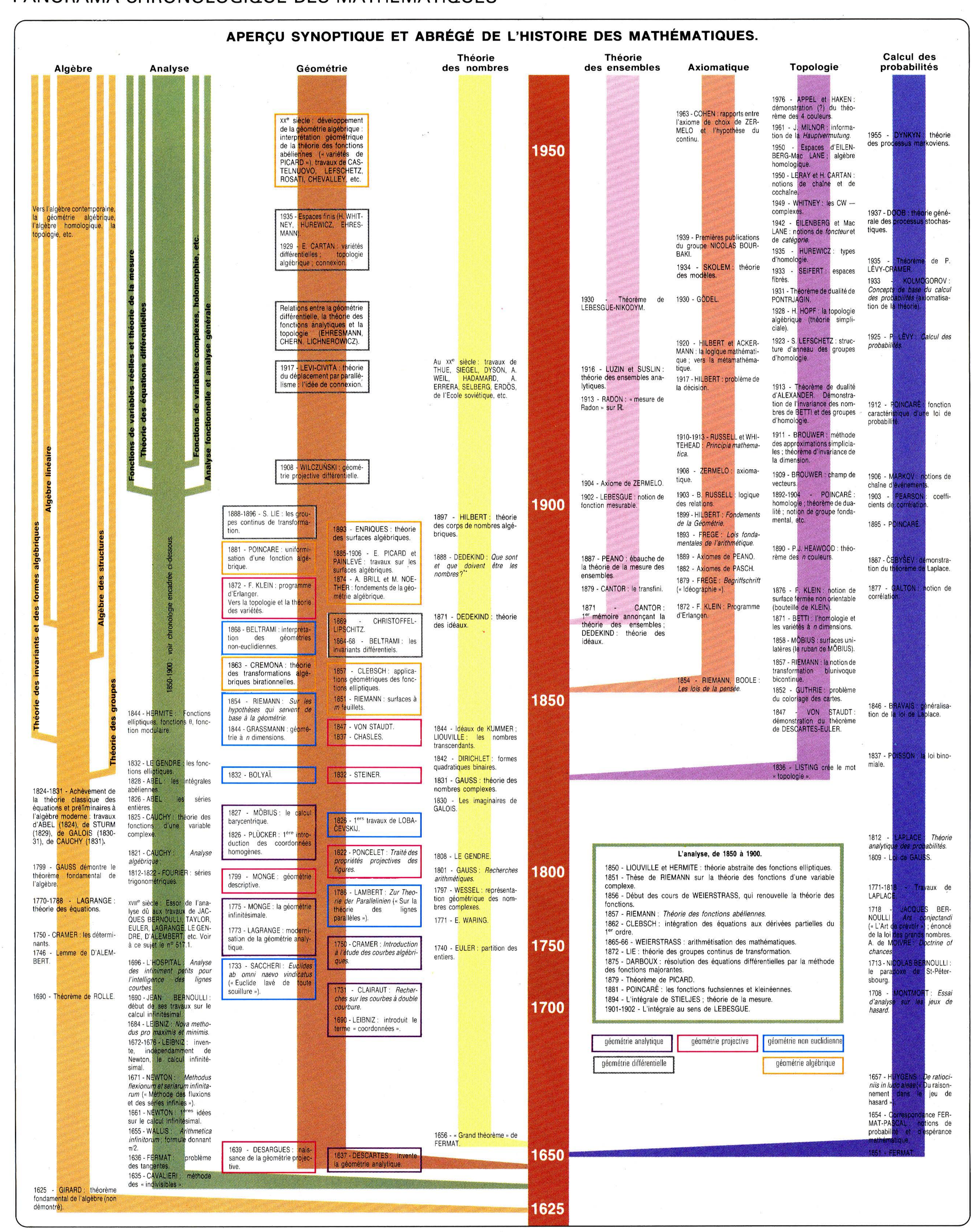
● *L'époque contemporaine* débute par une critique de la théorie des ensembles et une crise qui s'achève dans les années 30 (théorème de Gödel sur la non-contradiction de l'arithmétique). Depuis cette époque, les efforts des mathématiciens ont été surtout dirigés vers l'étude des structures logiques, la théorie des nombres et la topologie. Un exposé formel de tout le savoir mathématique a été entrepris, en 1939, par un groupe de mathématiciens français qui a pris le nom collectif de Nicolas Bourbaki.

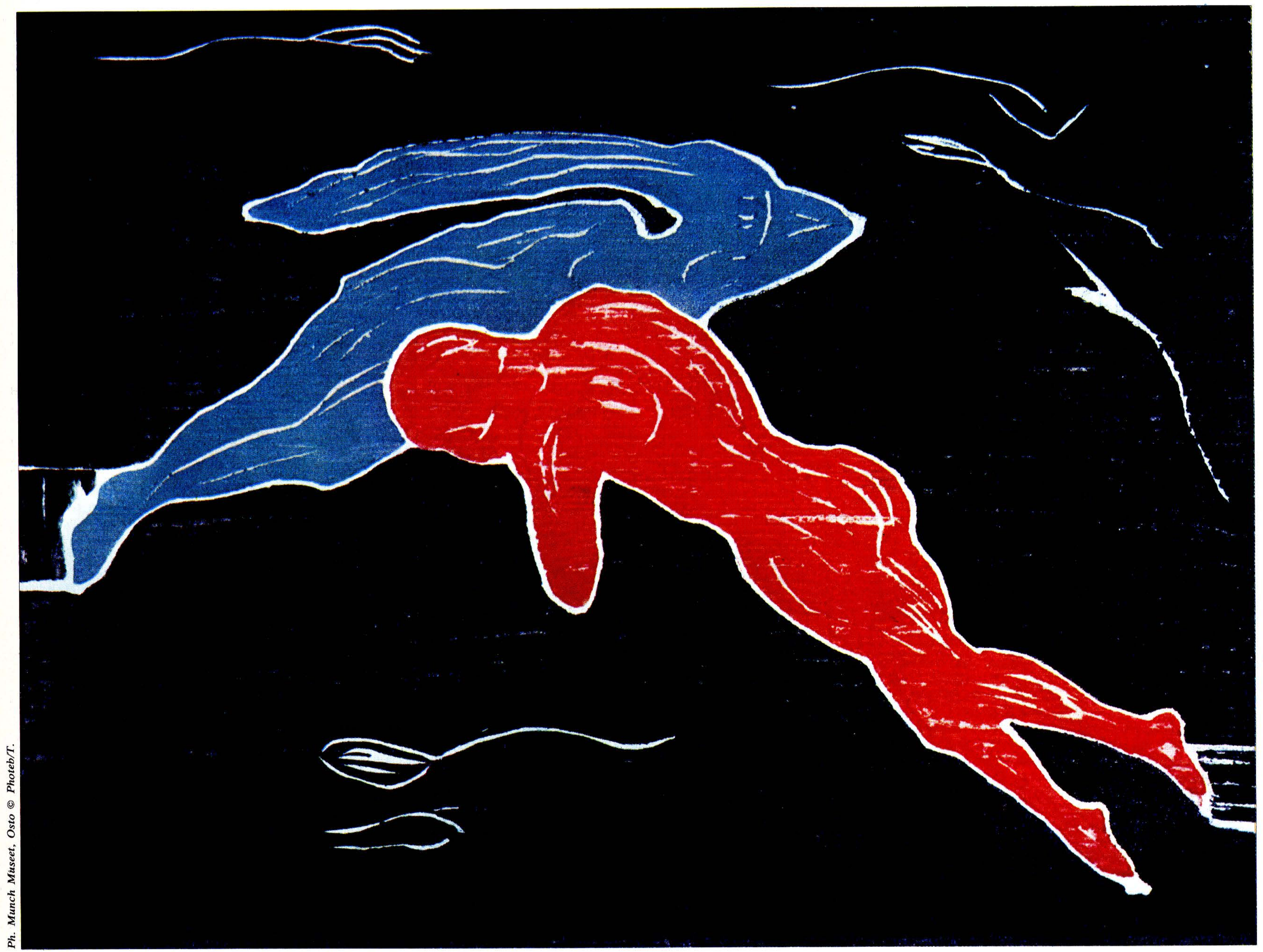
Les polyèdres réguliers — qu'on appelait les* Cinq corps platoniciens *— ont obsédé les savants de l'Antiquité, du Moyen Âge et de la Renaissance. C'est ainsi qu'on pensait, au temps de Copernic, que les six planètes connues se trouvaient à des distances telles les unes des autres que les* Cinq corps *devaient pouvoir s'intercaler dans les intervalles séparant les sphères orbitales fictives sur lesquelles les planètes étaient censées se mouvoir. On appelait cela le* Mystère cosmographique (Mysterium cosmographicum). *Ci-dessous : une illustration de ce « Mystère 5» d'après un dessin de 1597 (le titre en latin signifie : Table montrant les dimensions des orbites des planètes et leurs distances par intercalation des cinq corps réguliers ; dans le texte de gauche, les polyèdres en question sont appelés « corps d'Euclide » et non « corps platoniciens »).



PANORAMA CHRONOLOGIQUE.

Le schéma synoptique proposé à la page suivante donne une idée sommaire de l'évolution des différentes branches des mathématiques depuis le XVIIe siècle, une fois établis, au Moyen Âge et à la Renaissance, les résultats fondamentaux de la géométrie, de la théorie des nombres et de celle des équations. Pour plus de détails, se reporter aux introductions historiques des différents chapitres de ce volume.


APERÇU SYNOPTIQUE ET ABRÉGÉ DE L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES.
Algèbre
Analyse
Géométrie
Théorie des nombres
Théorie des ensembles
Axiomatique
Topologie
Calcul des probabilités
1950
1900
1850
1800
1750
1700
1650
1625
Vers l'algèbre contemporaine, la géométrie algébrique, l'algèbre homologique, la topologie, etc.
Algèbre linéaire
Théorie des invariants et des formes algébriques
Algèbre des structures
Théorie des groupes
1824-1831 - Achèvement de la théorie classique des équations et préliminaires à l'algèbre moderne : travaux d'ABEL (1824), de STURM (1829), de GALOIS (1830-31), de CAUCHY (1831).
1799 - GAUSS démontre le théorème fondamental de l'algèbre.
1770-1788 - LAGRANGE : théorie des équations.
1750 - CRAMER : les déterminants.
1746 - Lemme de D'ALEMBERT.
1690 - Théorème de ROLLE.
1625 - GIRARD : théorème fondamental de l'algèbre (non démontré).
Fonctions de variables réelles et théorie de la mesure
Théorie des équations différentielles
Fonctions de variables complexes, holomorphie, etc.
Analyse fonctionnelle et analyse générale
1850-1900 : voir chronologie encadrée ci-dessous.
1844 - HERMITE : Fonctions elliptiques, fonctions θ, fonction modulaire.
1832 - LE GENDRE : les fonctions elliptiques.
1828 - ABEL : les intégrales abéliennes.
1826 - ABEL : les séries entières.
1825 - CAUCHY : théorie des fonctions d'une variable complexe.
1821 - CAUCHY : Analyse algébrique.
1812-1822 - FOURIER : séries trigonométriques.
XVIIIe siècle : Essor de l'analyse dû aux travaux de JACQUES BERNOULLI, TAYLOR, EULER, LAGRANGE, LE GENDRE, D'ALEMBERT, etc. Voir à ce sujet le n° 517.1.
1696 - L'HOSPITAL : Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes.
1690 - JEAN BERNOULLI : début de ses travaux sur le calcul infinitésimal.
1684 - LEIBNIZ : Nova methodus pro maximis et minimis.
1672-1676 - LEIBNIZ : invente, indépendamment de Newton, le calcul infinitésimal.
1671 - NEWTON : Methodus flexionum et seriarum infinitarum (« Méthode des fluxions et des séries infinies »).
1661 - NEWTON : 1ères idées sur le calcul infinitésimal.
1655 - WALLIS : Arithmetica infinitorum ; formule donnant π/2.
1636 - FERMAT : problème des tangentes.
1635 - CAVALIERI : méthode des « indivisibles ».
XXe siècle : développement de la géométrie algébrique : interprétation géométrique de la théorie des fonctions abéliennes (« variétés de PICARD »), travaux de CASTELNUOVO, LEFSCHETZ, ROSATI, CHEVALLEY, etc.
1935 - Espaces finis (H. WHITNEY, HUREWICZ, EHRESMANN).
1929 - E. CARTAN : variétés différentielles ; topologie algébrique ; connexion.
Relations entre la géométrie différentielle, la théorie des fonctions analytiques et la topologie (EHRESMANN, CHERN, LICHNEROWICZ).
1917 - LEVI-CIVITA : théorie du déplacement par parallélisme : l'idée de connexion.
1908 - WILCZUNSKI : géométrie projective différentielle.
1888-1896 - S. LIE : les groupes continus de transformation.
1881 - POINCARE : uniformisation d'une fonction algébrique.
1872 - F. KLEIN : programme d'Erlanger. Vers la topologie et la théorie des variétés.
1868 - BELTRAMI : interprétation des géométries non-euclidiennes.
1863 - CREMONA : théorie des transformations algébriques birationnelles.
1854 - RIEMANN : Sur les hypothèses qui servent de base à la géométrie.
1844 - GRASSMANN : géométrie à n dimensions.
1832 - BOLYAÏ.
1827 - MÖBIUS : le calcul barycentrique.
1826 - PLÜCKER : 1ère introduction des coordonnées homogènes.
1799 - MONGE : géométrie descriptive.
1775 - MONGE : la géométrie infinitésimale.
1773 - LAGRANGE : modernisation de la géométrie analytique.
1733 - SACCHERI : Euclides ab omni naevo vindicatus (« Euclide lavé de toute souillure »).
1639 - DESARGUES : naissance de la géométrie projective.
1893 - ENRIQUES : théorie des surfaces algébriques.
1885-1906 - E. PICARD et PAINLEVÉ : travaux sur les surfaces algébriques.
1874 - A. BRILL et M. NOETHER : fondements de la géométrie algébrique.
1869 - CHRISTOFFEL-LIPSCHITZ.
1864-68 - BELTRAMI : les invariants différentiels.
1857 - CLEBSCH : applications géométriques des fonctions elliptiques.
1851 - RIEMANN : surfaces à m feuillets.
1847 - VON STAUDT.
1837 - CHASLES.
1832 - STEINER.
1826 - 1ers travaux de LOBACEVSKIJ.
1822 - PONCELET : Traité des propriétés projectives des figures.
1786 - LAMBERT : Zur Theorie der Parallelinien (« Sur la théorie des lignes parallèles »).
1750 - CRAMER : Introduction à l'étude des courbes algébriques.
1731 - CLAIRAUT : Recherches sur les courbes à double courbure.
1690 - LEIBNIZ : introduit le terme « coordonnées ».
1637 - DESCARTES : invente la géométrie analytique.
Au XXe siècle : travaux de THUE, SIEGEL, DYSON, A. WEIL, HADAMARD, A. ERRERA, SELBERG, ERDÖS, de l'Ecole soviétique, etc.
1897 - HILBERT : théorie des corps de nombres algébriques.
1888 - DEDEKIND : Que sont et que doivent être les nombres ?
1871 - DEDEKIND : théorie des idéaux.
1844 - Idéaux de KUMMER ; LIOUVILLE : les nombres transcendants.
1842 - DIRICHLET : formes quadratiques binaires.
1831 - GAUSS : théorie des nombres complexes.
1830 - Les imaginaires de GALOIS.
1808 - LE GENDRE.
1801 - GAUSS : Recherches arithmétiques.
1797 - WESSEL : représentation géométrique des nombres complexes.
1771 - E. WARING.
1740 - EULER : partition des entiers.
1656 - « Grand théorème » de FERMAT.
1930 - Théorème de LEBESGUE-NIKODYM.
1916 - LUZIN et SUSLIN : théorie des ensembles analytiques.
1913 - RADON : « mesure de Radon » sur ℝ.
1904 - Axiome de ZERMELO.
1902 - LEBESGUE : notion de fonction mesurable.
1887 - PEANO : ébauche de la théorie de la mesure des ensembles.
1879 - CANTOR : le transfini.
1871 - CANTOR : 1er mémoire annonçant la théorie des ensembles ; DEDEKIND : théorie des idéaux.
1963 - COHEN : rapports entre l'axiome de choix de ZERMELO et l'hypothèse du continu.
1939 - Premières publications du groupe NICOLAS BOURBAKI.
1934 - SKOLEM : théorie des modèles.
1930 - GÖDEL.
1920 - HILBERT et ACKERMANN : la logique mathématique ; vers la métamathématique.
1917 - HILBERT : problème de la décision.
1910-1913 - RUSSELL et WHITEHEAD : Principia mathematica.
1908 - ZERMELO : axiomatique.
1903 - B. RUSSELL : logique des relations.
1899 - HILBERT : Fondements de la Géométrie.
1893 - FREGE : Lois fondamentales de l'arithmétique.
1889 - Axiomes de PEANO.
1882 - Axiomes de PASCH.
1879 - FREGE : Begriffsschrift (« Idéographie »).
1872 - F. KLEIN : Programme d'Erlangen.
1854 - RIEMANN, BOOLE : Les lois de la pensée.
1976 - APPEL et HAKEN : démonstration (?) du théorème des 4 couleurs.
1961 - J. MILNOR : informa- tion de la Hauptvermutung.
1950 - Espaces d'EILENBERG-Mac LANE ; algèbre homologique.
1950 - LERAY et H. CARTAN : notions de chaîne et de cochaîne.
1949 - WHITNEY : les CW — complexes.
1942 - EILENBERG et Mac LANE : notions de foncteur et de catégorie.
1935 - HUREWICZ : types d'homologie.
1933 - SEIFERT : espaces fibrés.
1931 - Théorème de dualité de PONTRJAGIN.
1928 - H. HOPF : la topologie algébrique (théorie simpliciale).
1923 - S. LEFSCHETZ : structure d'anneau des groupes d'homologie.
1913 - Théorème de dualité d'ALEXANDER. Démonstration de l'invariance des nombres de BETTI et des groupes d'homologie.
1911 - BROUWER : méthode des approximations simpliciales ; théorème d'invariance de la dimension.
1909 - BROUWER : champ de vecteurs.
1892-1904 - POINCARÉ : homologie ; théorème de dualité ; notion de groupe fondamental, etc.
1890 - P.J. HEAWOOD : théorème des n couleurs.
1876 - F. KLEIN : notion de surface fermée non orientable (bouteille de KLEIN).
1871 - BETTI : l'homologie et les variétés à n dimensions.
1858 - MÖBIUS : surfaces unilatères (le ruban de MÖBIUS).
1857 - RIEMANN : la notion de transformation biunivoque bicontinue.
1852 - GUTHRIE : problème du coloriage des cartes.
1847 - VON STAUDT : démonstration du théorème de DESCARTES-EULER.
1836 - LISTING crée le mot « topologie ».
1955 - DYNKYN : théorie des processus markoviens.
1937 - DOOB : théorie générale des processus stochastiques.
1935 - Théorème de P. LÉVY-CRAMER.
1933 - KOLMOGOROV : Concepts de base du calcul des probabilités (axiomatisation de la théorie).
1925 - P. LÉVY : Calcul des probabilités.
1912 - POINCARÉ : fonction caractéristique d'une loi de probabilité.
1906 - MARKOV : notions de chaîne d'événements.
1903 - PEARSON : coefficients de corrélation.
1895 - POINCARÉ.
1887 - ČEBYŠEV : démonstration du théorème de Laplace.
1877 - GALTON : notion de corrélation.
1846 - BRAVAIS : généralisation de la loi de Laplace.
1837 - POISSON : la loi binomiale.
1812 - LAPLACE : Théorie analytique des probabilités.
1809 - Loi de GAUSS.
1771-1818 - Travaux de LAPLACE.
1718 - JACQUES BERNOULLI : Ars conjectandi (« L'Art de prévoir ») ; énoncé de la loi des grands nombres. A. de MOIVRE : Doctrine of chances.
1713 - NICOLAS BERNOULLI : le paradoxe de St-Pétersbourg.
1708 - MONTMORT : Essai d'analyse sur les jeux de hasard.
1657 - HUYGENS : De ratiociniis in ludo aleae (« Du raisonnement dans le jeu de hasard »).
1654 - Correspondance FERMAT-PASCAL : notions de probabilité et d'espérance mathématique.
1651 - FERMAT.
L'analyse, de 1850 à 1900.
1850 - LIOUVILLE et HERMITE : théorie abstraite des fonctions elliptiques.
1851 - Thèse de RIEMANN sur la théorie des fonctions d'une variable complexe.
1856 - Début des cours de WEIERSTRASS, qui renouvelle la théorie des fonctions.
1857 - RIEMANN : Théorie des fonctions abéliennes.
1862 - CLEBSCH : intégration des équations aux dérivées partielles du 1er ordre.
1865-66 - WEIERSTRASS : arithmétisation des mathématiques.
1872 - LIE : théorie des groupes continus de transformation.
1875 - DARBOUX : résolution des équations différentielles par la méthode des fonctions majorantes.
1879 - Théorème de PICARD.
1881 - POINCARÉ : les fonctions fuchsiennes et kleinéennes.
1894 - L'intégrale de STIELJES ; théorie de la mesure.
1901-1902 - L'intégrale au sens de LEBESGUE.
géométrie analytique
géométrie projective
géométrie non euclidienne
géométrie différentielle
géométrie algébrique



Ph. Munch Museet, Osto © Photeb/T.

La théorie des ensembles a été élaborée entre 1872 et 1895, à l'époque où la culture européenne subissait d'énormes bouleversements (impressionnisme, expressionnisme, symbolisme, le roman russe, la découverte de la radioactivité, etc.). Cette peinture de l'expressionniste norvégien Edvard Munch,* Rencontre dans l'espace, *est de 1899 : déjà la théorie des ensembles était critiquée, et les polémiques mathématiques allaient bon train dans les sociétés savantes d'Europe.

THÉORIE DES ENSEMBLES, ARITHMÉTIQUE, ALGÈBRE

GÉNÉRALITÉS.

Les débuts de la théorie des nombres et de l'algèbre.

La science des nombres chez les Grecs.

● *Problèmes de numération.* Les premiers mathématiciens de l'histoire ont été confrontés à des problèmes qui semblent aujourd'hui bien simples : compter des objets (réels ou imaginaires), représenter ce compte par un *nombre écrit*, opérer sur les nombres ainsi introduits (additionner, soustraire, multiplier, diviser). Pour résoudre ces problèmes, ils ont tâtonné pendant des siècles, chaque génération découvrant de nouveaux procédés, de nouvelles méthodes, de nouvelles astuces. Si le progrès a été lent, c'est sans doute parce que chaque civilisation a dû en général refaire pour son compte le trajet parcouru par d'autres et qu'elle ignorait. Des grands systèmes de numération connus des Anciens, celui des Suméro-Akkadiens était le plus scientifique (voir p. 2), mais aussi le plus lourd à manier ; de sorte que même les plus habiles mathématiciens de l'Antiquité, à savoir les Grecs, ont utilisé d'autres systèmes, tout en se rendant compte de leur imperfection (voir p. 135).

Il n'est sans doute pas inutile de souligner qu'à l'époque d'Euclide, c'est-à-dire trois cents ans après la naissance des mathématiques grecques, on ne savait pas écrire les nombres supérieurs à 10 000 (10^4). Le nombre 10 000 lui-même était appelé « une myriade » et pour exprimer un nombre comme 251 372, on écrivait :

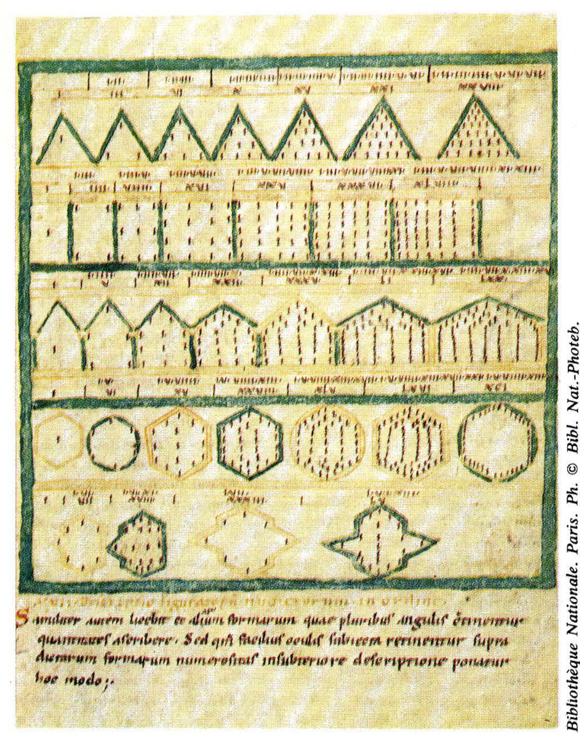
25 myriades plus 1 372.

Même ainsi, le système était limité au nombre 100 000 000 (10^8), qui vaut une myriade de myriades (10 000 fois 10 000). C'est Archimède qui, dans *L'arénaire*, généralise le procédé de la notation par myriades (voir p. 135), et laisse entendre que la suite des nombres ainsi notés peut être prolongée indéfiniment.

● *Importance des entiers naturels.* Les Pythagoriciens ont été les premiers à s'intéresser aux propriétés des nombres entiers. Ils les écrivaient en faisant usage du système attique (archaïque : voir p. 135), très limité, et les représentaient par des *points,* qui, selon leur disposition, permettaient de parler de nombres *linéaires, carrés, triangulaires, oblongs, solides.* Ce faisant, ils n'avaient donc en vue que les seuls *nombres entiers,* appelés aussi *entiers naturels*; on leur doit principalement d'avoir approché la notion de *divisibilité* et d'avoir découvert qu'il existait des nombres premiers, ainsi qu'une ébauche assez sérieuse de la *théorie des proportions.*

Cela dit, si on veut savoir comment les Grecs ont conçu la théorie des nombres, on peut allègrement sauter par-dessus les 250 ans qui séparent Pythagore d'Euclide et étudier la manière dont celui-ci l'a présentée. La théorie euclidienne des nombres a dominé l'essentiel de la pensée arithmétique et algébrique jusqu'au début du XIXe siècle ; elle est exposée dans les Livres VII, VIII et IX des *Éléments.* La théorie des proportions — qui ne concerne pas uniquement les nombres — est développée au Livre V ; celle des incommensurables au Livre X. De l'exposé euclidien, on peut retenir quelques points fondamentaux.

1 - Euclide appelle « nombre » tout nombre entier, défini comme « un assemblage composé d'unités » (Livre II, définition 2 ; trad. F. Peyrard en 1819, réédité par J. Itard, Paris, Blanchard, 1966, page 180). Il admet implicitement que les opérations fondamentales sur les entiers (addition, multiplication) sont commutatives (= indépendantes de l'ordre dans lequel on prend les termes) et associatives (pour



Nombres figurés des Pythagoriciens, d'après un manuscrit médiéval du De Arithmetica du Romain Boèce (Boetius, v. 480-524).

additionner trois nombres $a+b+c$ par exemple, on peut indifféremment ajouter c au résultat de la somme $a+b$ ou ajouter à a le résultat de la somme $b+c$; même remarque pour la multiplication).

2 - Il utilise la notion de fraction, mais accessoirement : ce que les mathématiciens nommeront ultérieurement « nombres fractionnaires » ou « rationnels » ne constitue pas pour Euclide un ensemble de nombres. De même les irrationnels sont appelés « grandeurs » et non pas « nombres ». Il n'y a évidemment aucune allusion aux nombres négatifs.

3 - De la tradition pythagoricienne, Euclide a conservé le principe de la représentation géométrique. Avec toutefois une différence : il représente un nombre par un segment de droite et non par un ensemble de points. Le nombre 1 (unité) est représenté par un segment de longueur arbitraire ; le nombre 2 par un segment double, le nombre 3 par un segment triple, etc.

Ainsi donc la *science des nombres* classique (euclidienne) est l'étude des propriétés des nombres entiers. Ces propriétés sont suffisamment nombreuses et suffisamment complexes pour occuper des générations de mathématiciens : comparaison des nombres, recherche de leurs diviseurs, de leurs multiples, étude de leur caractère premier ou non, etc. Les trois livres des *Éléments* contiennent en tout 107 propositions parfaitement démontrées. Par la suite, les mathématiciens enrichiront ce *corpus* et, vers la fin du XVIII[e] siècle, le nombre de propriétés connues et démontrées concernant les nombres est considérable. Leur ensemble, convenablement ordonné, constituera la *théorie des nombres* (au sens restreint, comme on va le voir ci-après).

● *L'infini.* Il est remarquable que les mathématiciens grecs n'aient raisonné que sur des nombres entiers sans jamais se poser la question de leur infinité. Certes, ils y songent, mais s'en méfient car ils ne sont pas capables de préciser le concept. L'expression favorite d'Euclide à ce sujet est « tant de nombres qu'on voudra » ; par exemple (Livre VII, proposition 35 ; *op. cit.*, p. 206) :

> *« Tant de nombres qu'on voudra étant donné, trouvez les plus petits de ceux qui ont la même raison* [= le même rapport] *avec eux. »*

Archimède a eu, lui aussi, l'intuition de l'infini numérique, et il s'en est servi, ne serait-ce qu'en tant que précurseur du calcul infinitésimal. Toutefois la science et la philosophie grecques se sont toujours senties mal à l'aise en face du concept d'infini (les philosophes de l'École d'Élée, au V[e] siècle av. J.-C., avaient construit des raisonnements vicieux, fondés sur la division à l'infini d'une distance, raisonnement qui débouchait sur des conclusions paradoxales).

● *Les nombres irrationnels.* Les Pythagoriciens étaient persuadés que toute chose pouvait s'exprimer par des nombres. Mais ils avaient de ceux-ci une notion limitée, puisqu'ils ne connaissaient que les nombres entiers ou, à la rigueur, fractionnaires. Or l'application du théorème de Pythagore à la mesure de la diagonale d'un carré conduit à une impasse. Soit, en effet, un carré de côté égal à l'unité de longueur (1 pied, 1 mètre, 1 millimètre, peu importe). La diagonale de ce carré, c'est-à-dire le segment AC, est l'hypoténuse du triangle rectangle ABC. Si nous écrivons le théorème de Pythagore appliqué à ce triangle, nous obtenons :

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 , \qquad (1)$$

c'est-à-dire :

$$1 + 1 = x^2 \qquad (2)$$

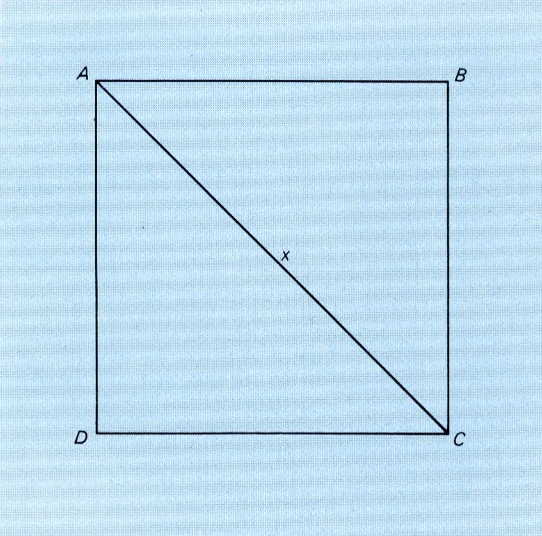
(en appelant x la longueur de la diagonale). Le nombre qui mesure cette diagonale a donc pour carré 2. Or, si nous consultons une table de carrés, nous voyons que :

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \times 1 = 1 \,; \\ 2^2 &= 2 \times 2 = 4 \,; \\ 3^2 &= 3 \times 3 = 9 \,; \\ &\text{etc.} \end{aligned} \qquad (3)$$

Il n'existe pas de nombre entier dont le carré soit égal à 2. On peut alors chercher s'il existe un nombre fractionnaire dont le carré soit égal à 2 (c'est-à-dire, avec notre système moderne de numération, un *nombre décimal*) : quels que soient nos efforts, et aussi loin qu'on poussera le calcul, nous ne parviendrons jamais à un résultat « exact ». Dès le V[e] siècle av. J.-C., on avait démontré, dans les milieux pythagoriciens, que s'il existait un nombre x dont le carré fût égal à 2, ce nombre devrait être à la fois pair et impair. Comme cette double appartenance est impossible, car *contradictoire*, il en résulte que le nombre x ne peut exister.

Mais alors, les Pythagoriciens se trouvaient dans une position fâcheuse : d'une part ils prétendaient que toutes choses — même les astres ! — étaient mesurables, c'est-à-dire appariables à un nombre, et, d'autre part, ils démontraient qu'il n'existait aucun nombre qu'on puisse faire correspondre à la longueur de la diagonale d'un carré lorsque le côté de ce carré est égal à l'unité. Plus savamment : les Pythagoriciens se trouvaient dans l'obligation d'« avouer » que la diagonale était *incommensurable* avec le côté du carré.

Cette notion d'incommensurabilité est plus géométrique qu'arithmétique : elle s'est perpétuée jusqu'à Euclide, qui appelle irrationnelles des grandeurs (droites ou aires) qui n'ont pas de commune mesure avec une grandeur analogue prise comme unité.



La diagonale** AC **est incommensurable avec le côté** AB **du carré.

De l'arithmétique à l'algèbre.

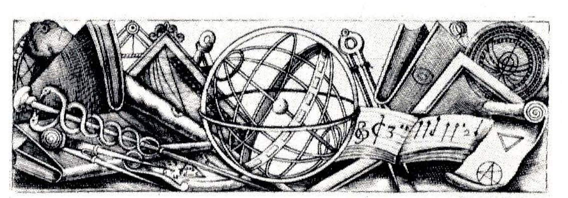
● *L'œuvre météorique de Diophante*, venue d'on ne sait où, sans tradition antérieure, tournant d'emblée le dos au géométrisme grec classique, marque les débuts de l'algèbre dans notre monde occidental. Cette « algèbre » — que Diophante nomme encore une *arithmétique* — se présente comme une succession de problèmes, dans lesquels on doit trouver un nombre inconnu x (notation moderne), rattaché à des quantités connues par certaines relations. En d'autres termes, le nombre x est donné par une *équation* que Diophante nous enseigne à résoudre.

— Précisons d'abord la nature de l'œuvre de Diophante, personnage par ailleurs totalement inconnu. D'après le préambule de l'œuvre qui nous est parvenue sous le titre *Ta Arithmētica* (*Les arithmétiques*), elle comportait treize livres dont six sont en notre possession. Chaque livre comporte un certain nombre de problèmes (trente-neuf pour le Livre I ; trente-cinq pour le Livre II ; trente et un pour le Livre III ; quarante pour le Livre IV ; trente pour le Livre V ; vingt-quatre pour le Livre VI), classés par ordre de difficultés croissantes (ou à peu près). La résolution de ces problèmes exige à chaque fois la résolution d'une équation (du premier ou du second degré en général), dont Diophante nous explique toutes les étapes. Dans le préambule, l'auteur a pris la précaution d'énoncer les règles générales qui permettent de remplacer une équation par une équation équivalente.

Voici un exemple très simple de problème diophantien (traduction P. Ver Eecke, Paris, Blanchard, 1959, p. 9 ; le terme *arithme* désigne l'inconnue) ; nous donnons entre crochets quelques commentaires ou la traduction en langage mathématique moderne :

> *« Partager un nombre proposé en deux nombres dont la différence est donnée.*
> *Que le nombre donné soit* 100, *et que la différence soit* 40 *unités, trouver les nombres* [résoudre le système $x + y = 100$, $y - x = 40$].
> *Posons que le plus petit nombre est* 1 *arithme* [Diophante écrit en abrégé : « ςα » ; ς est la lettre sigma qui termine le mot grec arithmos, et α ou α′ est le nombre 1 dans le système littéral des Grecs ; « ςα » peut se traduire par « 1 x »] ; *donc, le plus grand nombre sera* 1 *arithme plus* 40 *unités* [$y = x + 40$]. *En conséquence, la somme des deux nombres devient* 2 *arithmes* + 40 *unités* [$x + y = 2x + 40$]. *Or les* 100 *unités données sont cette somme ; donc,* 100 *unités sont égales à* 2 *arithmes plus* 40 *unités* [$2x + 40 = 100$]. *Retranchons les semblables des semblables, c'est-à-dire* 40 *unités de* 100 *et, de même,* 40 *unités de* 2 *arithmes plus* 40 *unités* [on fait passer 40 dans le second membre, pour isoler les inconnues].

Les Arithmétiques ***de Diophante (Edition de Toulouse, 1670) : c'est une reprise de la première édition gréco-latine des*** **Arithmétiques** ***qui datait de 1621, et qui contient, en outre, les commentaires de Fermat sur l'analyse diophantienne.***



DIOPHANTI ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM.
LIBER PRIMVS.

VM animaduerterem te (obſeruandiſſime mihi Dionyſi) ſtudio diſcendi explicationem quæſtionum earum quæ in numeris proponuntur teneri ; aggreſſus ſum eius rei viam rationemque fabricari, ex ipſiſque fundamentis, quibus tota res nititur, initio petito, naturam ac vim numerorum conſtituere. Quod negotium vt videatur fortaſſe difficilius (quippe ignotum adhuc) cùm animi incipientium ad bonam de re dextrè conficienda ſpem concipiendam nequaquam ſint procliues : tamen cùm tua alacritas, tum mea demonſtratio efficiet, vt facilè id comprehendas. Celeriter enim addiſcunt, quorum ad diſcendi cupiditatem doctrina accedit.

ΗΝ εὕρεσιν τῶν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς προβλημάτων, τιμιώτατέ μοι Διονύσιε, γινώσκων σε σπουδαίως ἔχοντα μαθεῖν, ὀργανῶσαι τὴν μέθοδον ἐπειράθην, ἀρξάμενος ἀφ' ὧν συνέστηκε τὰ πράγματα θεμελίων, ὑποστῆσαι τὴν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς φύσιν τε καὶ δύναμιν. ἴσως μὲν οὖν δοκεῖ τὸ πρᾶγμα δυσχερέστερον, ἐπειδὴ μήπω γνώριμόν ἐστι, δυσέλπιστοι γὰρ εἰς κατόρθωσίν εἰσιν αἱ τῶν ἀρχομένων ψυχαί, ὅμως δ' εὐκατάληπτόν σοι γενήσεται διά τε τὴν σὴν προθυμίαν, καὶ τὴν ἐμὴν ἀπόδειξιν. ταχεῖα γὰρ εἰς μάθησιν ἐπιθυμία προσλαβοῦσα διδαχήν.

In primum Librum Diophanti Commentarij.

VÆCVNQVE ante primam quæſtionem præmiſit Diophantus, ea definitionum & principiorum locum obtinent. Sed velut ad altiora feſtinans, hæc mira breuitate perſtrinxit, vt non tam ea explicare voluiſſe videatur, quàm indicare, tyronéſque admonere, vt nonniſi horum cognitione iam probè inſtructi ad hoſce libros euoluendos accedant. Quod ſanè non obſcuris verbis profeſſus eſt, definitione decima vndecimáque, cùm ait eum qui hoc negotij ſuſcipit in additione, ſubductione, & multiplicatione ſpecierum iam exercitatum eſſe debere, necnon in æquationibus ritè præparandis apprimè verſatum. Sed & Xilander hîc mutus eſt, & iſtarum definitionum obſcuritatem minimè diſſimulans, vt laborem eas explicandi declinet, lectorem ad ſuam Algebram amandat. Scholiaſtes autem Græcus, more ſuo, multa, ſed ea plerunque futilia, vel à ſcopo Diophanti prorſus aliena nobis obtrudit. Ego media incedens via, quæ obſcuriora videntur breuiter enodanda ſuſcepi, nec tamen inutilia, vel trita & paſſim obuia perſequi ſtatui, præſertim cùm omnia quæ his definitionibus continentur, in omnibus quotquot à quocunque authore extant de logiſtica, libris, reperiantur. Cæterum eſt quod moneam in Græco ſine vlla diſtinctione haſce definitiones haberi, quas ego diſtinguendas numeris putaui, vt ſic facilius explicari, citarique commodius poſſint.

A

Les deux arithmes restants valent 60 *unités* [$2x = 60$], *et chaque arithme devient* 30 *unités.*

Revenons à ce que nous avons posé : le plus petit nombre sera 30 *unités ; tandis que le plus grand sera* 70 *unités, et la preuve est évidente* [$x = 30$, $y = 70$]. »

— Les caractéristiques de la méthode de Diophante peuvent être résumées comme suit.

1 - Diophante part de la théorie des nombres d'Euclide (« tous les nombres sont formés d'une certaine quantité d'unités... », *op. cit.*, p. 1) et affirme au passage que la suite des nombres est infinie (« il est classique que leur établissement s'étend à l'infini »).

2 - Alors que, pour Euclide, le problème était de déterminer les propriétés d'un ou de plusieurs nombres (par exemple : deux nombres *a* et *b* définis par certaines conditions ont-ils un diviseur commun ou bien sont-ils premiers entre eux ?), pour Diophante il s'agit de calculer un nombre inconnu, qu'il désigne par le mot grec *arithmos* (« arithme » dans la traduction de Ver Eecke) ou par l'abréviation ς (lettre grecque *sigma*, finale du mot *arithmos*). Diophante a d'ailleurs introduit quelques autres symboles pour représenter les six premières puissances de l'inconnue (x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6) et fait parfois usage d'abréviations opératoires. De ce fait, il est le précurseur d'algébristes comme Viète qui, au XVI[e] siècle, créeront le symbolisme algébrique. Autres apports intéressants : règles sur les calculs des exposants ($x^m x^n = x^{m+n}$) ; refus des solutions négatives qu'il considère comme impossibles.

— Diophante est à la fois en progrès et en recul par rapport à Euclide. En tant que créateur de l'*algèbre*, conçue comme l'art de résoudre les équations, il inaugure une des grandes aventures de la pensée mathématique. Mais son attitude *logique* est très inférieure à celle d'Euclide, qui reprenait lui-même la théorie d'Eudoxe (définition axiomatique des entiers comme un ensemble possédant deux lois opératoires — l'addition et la multiplication — et dont les éléments peuvent être *comparés* par les relations « égal », « plus grand que », « plus petit que »). C'est pourquoi il admet que les fractions ou les quantités irrationnelles peuvent être traitées comme des nombres, c'est-à-dire introduites dans les calculs, sans s'interroger sur le fondement de cette assimilation.

En d'autres termes, Diophante et ses successeurs, les algébristes du XVI[e] siècle, ont calculé sur les fractions et les irrationnels comme sur les entiers, et ils ont obtenu des résultats exacts. Mais : 1° ils ne se sont pas étonnés de ce fait, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas compris que les entiers, les rationnels et les irrationnels constituaient un ensemble homogène (l'ensemble des *réels*) ; 2° ils n'ont pas établi les axiomes qui leur permettaient cette généralisation ; 3° cette manière hâtive et naïve de traiter les « nombres » esquivait les difficultés théoriques qui ressurgiront au XIX[e] siècle et imposeront à Cauchy de construire une *théorie des réels* généralisant et consolidant la théorie des entiers d'Eudoxe/Euclide.

● *L'apport des Arabes et des Persans*, principalement ceux d'al-Ḫārizmī (IX[e] siècle et d''Umar Ḫayyām, a déjà été signalé. C'est d'abord un apport formel, hérité des Indiens : le livre fameux d'al-Ḫārizmī a permis la diffusion de la numération décimale de position, de l'usage du trait de fraction entre le numérateur et le dénominateur et, concurremment, des méthodes de calcul automatiques (valables non seulement pour les opérations fondamentales, mais aussi pour l'extraction des racines carrées ou cubiques). Les Arabes ont repris et perfectionné les méthodes algébriques de Diophante relatives aux équations du premier et du second degré. Cet apport est donc purement technique : il n'y a aucun progrès théorique quant à la théorie des nombres et, à cette époque encore, l'œuvre d'Eudoxe/Euclide reste inégalée.

Cependant les germes de tous progrès futurs sont à la disposition des intellects proche-orientaux et occidentaux : dès le Haut Moyen Âge, les mathématiciens indiens utilisent le zéro d'une manière moderne, c'est-à-dire comme un nombre et non comme un symbole de numération, et se servent des *nombres négatifs* pour traduire le résultat de certaines opérations commerciales (déficit). Arrêtons-nous quelques instants sur ces deux points.

— Pour Eudoxe/Euclide, un nombre est un être mathématique qui répond aux définitions énoncées au début du Livre VII des *Éléments*, c'est-à-dire sur lequel on peut toujours faire deux opérations : l'ajouter à ou le multiplier par un autre nombre pour obtenir un troisième nombre appelé *somme* ou *produit* des deux autres. Ce qui s'écrit, avec la symbolique moderne :

1 - si *a* et *b* sont des nombres, $(a + b)$ est un nombre ;



Le calcul digital : cette image est extraite d'un manuscrit médiéval (X[e] siècle) du* De rerum natura*, encyclopédie du savoir antique rédigée par le moine northumbrien Bède le Vénérable (673-735).

2 - si *a* et *b* sont des nombres, (ab) est un nombre.

Il en résulte en outre de la définition des entiers comme une collection d'unités deux résultats très importants :

1 - entre *a* et $a + 1$ il n'existe aucun nombre entier ;

2 - $1 \times a = a \times 1 = a$: la multiplication d'un nombre par 1 ne change pas ce nombre (en langage « moderne » on dirait : « 1 est neutre pour la multiplication dans l'ensemble des nombres entiers »).

Quant aux propriétés générales des deux opérations citées (commutativité, associativité, distributivité), propriétés que nous expliquons p. 25, elles sont implicitement reconnues et utilisées dans les calculs.

— Le symbole 0 (initiale du mot grec *ouden* qui signifie « rien ») n'est pas conçu comme un nombre par Eudoxe/Euclide puisqu'il n'est pas une collection d'unités. Des expressions comme $a + 0$ ou « 0 fois *a* » n'ont alors aucun sens : le zéro sert simplement de symbole pour indiquer qu'il n'existe aucun nombre ou, dans la notation positionnelle des Indiens/Arabes, pour indiquer qu'un ordre d'unités est absent ($105 =$ une centaine $+ 0$ dizaine $+ 5$ unités). Euclide ne traite pas le zéro comme un nombre, c'est-à-dire ne lui reconnaît pas le *droit aux opérations*, parce qu'il n'entre pas dans sa rigoureuse définition des nombres entiers.

— La soustraction $a - b$ n'est possible que si *a* est plus grand que *b* ; dans ce cas on peut écrire que $c = a - b$ est un nombre (entier). Ni Euclide, ni les Arabes n'ont été capables de donner un sens à $a - b$ lorsque *a* est plus petit que *b*, et c'est là une chose curieuse : tout commerçant, quand il calcule son bénéfice par l'opération *prix de vente* − *prix d'achat*, sait qu'il gagne de l'argent si le prix de vente est supérieur au prix d'achat et qu'il en perd dans le cas contraire. Et les commerçants ne manquaient pas ni à Alexandrie, ni à Bagdad, ni à Ispahan. Et pourtant cette extension, c'est-à-dire la création des nombres négatifs, n'a pas eu lieu : elle n'interviendra qu'à la Renaissance, chez les algébristes italiens.

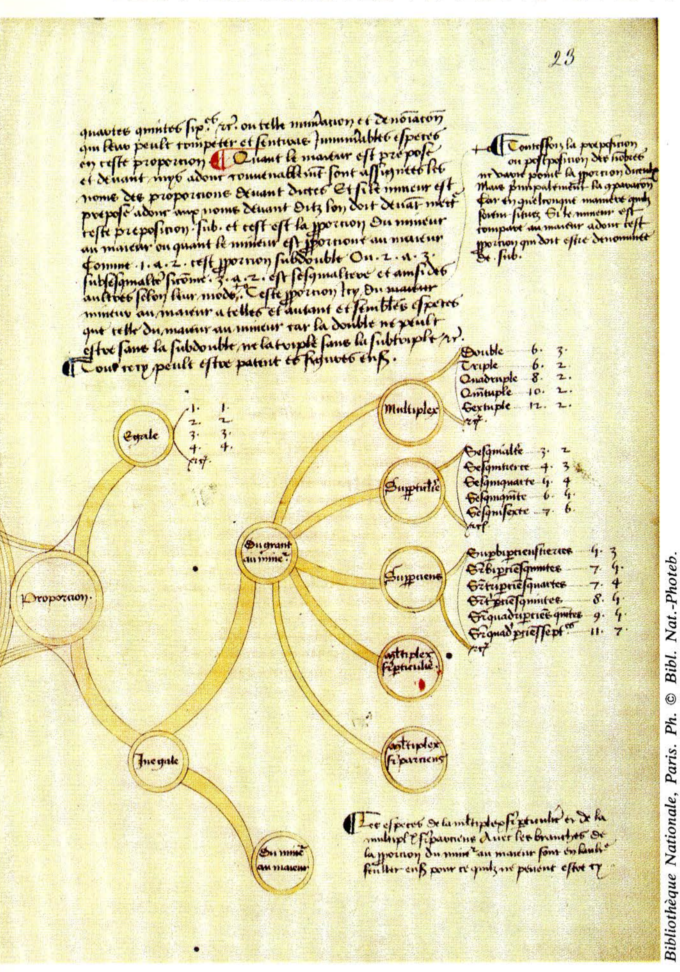
— Autre opération « impossible » dans l'ensemble des nombres entiers : la division de *a* par *b* lorsque *b* n'est pas un *diviseur* (Euclide disait : une *partie*) de *a*. Nous savons maintenant que le résultat de l'opération « *a* divisé par *b* », *a* et *b* étant entiers, est la *fraction a/b* et que le calcul sur les fractions se fait selon les lois du calcul sur les nombres entiers à condition que *b* soit différent de zéro. Les Grecs, et Euclide comme les autres, ont utilisé les fractions, mais ils ne les considèrent pas comme des nombres ; Euclide les appelle des *rapports*. Dans le langage des mathématiciens modernes, nous dirions que les rapports d'entiers sont conçus par les Grecs comme des *opérateurs*, c'est-à-dire comme un processus qui, à un nombre *N* entier fait correspondre un autre entier *N'*. Ainsi le rapport 3/5 appliqué à *N*, *N* étant un multiple de 5 donne le nombre entier *N'* tel que $N' = 3 \times (N/5)$; par exemple, si $N = 35$, l'opérateur 3/5 donne $N' = 21$. L'opérateur 3/5 appliqué à un nombre *N* qui ne serait pas un multiple de 5 ne fournit aucun résultat (aucun entier).

Diophante, les algébristes arabes et les algébristes italiens ont considéré les fractions comme des nombres, ce en quoi ils dépassent le point de vue euclidien ; mais ils n'ont pas justifié cette extension d'une manière logique. Et la « loi du milieu » des mathématiques est impitoyable : toute théorie, tout système dont les fondements ne sont pas rigoureusement cohérents entraînent, à court ou à long terme, l'effondrement de la théorie, c'est-à-dire l'erreur.

Les algébristes de la Renaissance.

L'héritage gréco-arabe a été transmis à l'Occident à partir du XII[e] siècle, par des traducteurs et des commentateurs comme Gérard de Crémone ou Léonard de Pise. L'essor de l'algèbre date du XV[e] et du XVI[e] siècles : l'étude des problèmes et des méthodes employées par les mathématiciens de cette époque va nous permettre de comprendre l'origine des mathématiques modernes.

● *Le symbolisme.* L'algèbre, pour un mathématicien du XV[e] siècle, c'est à peu près uniquement la science qui permet de résoudre des équations. Qu'est-ce alors qu'une *équation* ? C'est une *phrase* (un énoncé) par laquelle on exprime qu'une quantité inconnue est reliée à des quantités connues. Nous en avons rencontré un exemple simple en citant le premier problème de Diophante (ci-dessus, *b*). Le calcul verbal est très difficile à manier, et celui qui s'y exerce a bien du mal à ne pas perdre de vue les résultats à atteindre. L'introduction d'abréviations, puis de symboles opératoires a permis de faire des calculs de plus en plus compliqués sans trop de difficultés. L'usage de *lettres* pour représenter des nombres quelconques, connus ou inconnus, a donné au calcul algébrique une plus grande généralité. L'affinement du symbolisme algébrique a eu lieu à la Renaissance. Voici quelques points de repère.



Un extrait du Triparty _en la science des nombres (1484) de Nicolas Chuquet; cette page concerne la classification des proportions._

— Le médecin parisien Nicolas Chuquet est l'auteur d'un traité en trois parties appelé *Le Triparty en la science des nombres* (1484), dans lequel il étudie les nombres rationnels (entiers ou fractionnaires), les nombres irrationnels et la théorie des équations. Ce traité ne fut publié que tardivement, de sorte que l'influence de son auteur sur ses contemporains et successeurs immédiats ne peut être retenue. L'apport de Nicolas Chuquet, en ce qui concerne le symbolisme algébrique, se résume aux points suivants.

1 - Les nombres sont précédés du signe p̄ ou m̄ selon qu'on les ajoute ou qu'on les soustrait ; ces signes désignent aussi l'addition ou la soustraction. Ainsi $5-2$ s'écrit : « 5 m̄ 2 ». La multiplication des polynômes, par exemple le produit $(a+b)(c-d)$, exige l'énoncé de la fameuse *règle des signes* que Chuquet exprime ainsi :

> *« Qui multiplie plus par moins ou vice versa il en vient toujours moins. Qui multiplie plus par plus et moins par moins et il en vient plus. Et qui partit plus par moins ou moins par plus il en vient moins ».*

2 - Les racines sont notées à l'aide du signe ℞, utilisé déjà par Léonard de Pise : ℞² est la racine carrée ; ℞³ pour la racine cubique, etc.

3 - L'inconnue n'est pas écrite, mais son exposant est mentionné ; ainsi 3^2 signifie non pas « 3^2 », mais $3\,x^2$. Cette notation exponentielle permet à Chuquet d'énoncer la loi $x^m x^m = x^{m+m}$.

— L'Allemand Johann Widmann introduit les signes « + » et « − » pour marquer le surplus ou le manque (1489).

— Les Italiens ont perfectionné et complété ces symboles. Ils nomment l'inconnue *cosa* (= « chose » ; en latin : *res*) et l'écrivent souvent *co.* en abrégé ; ils conservent en général les symboles p̄ et m̄ (qu'ils énoncent parfois en toutes lettres : *piu* pour « plus » et *meno* pour « moins ». La notation exponentielle est en recul par rapport à Chuquet : ainsi Pacioli (1494) écrit *ce.* (abréviation de *censo*) pour « carré », *cu.* (*cubo*) pour la puissance 3 ; etc. Le signe « = » n'existe pas encore. L'apport très important de Bombelli est étudié plus loin.

— Les Allemands ont repris l'italien *cosa* et en ont fait *coss*, terme qui désigne aussi l'algèbre. L'algébriste Ch. Rudolff (1525) emploie couramment les signes « + » et « − » et introduit le signe $\surd$ pour la racine carrée, le signe $\surd\surd\surd$ pour la racine cubique, et le signe $\surd\surd$ pour la racine quatrième ; les puissances sont notées comme chez les Italiens, mais à l'aide de caractères spéciaux dits *cossiques*. C'est Stifel qui pousse le plus loin la symbolique à cette époque (1544). Influencé par Chuquet, dont il connaît l'œuvre par des extraits, il insiste sur la théorie des progressions et emploie, pour la première fois, les exposants négatifs. Il simplifie la notation du Rudolff pour les racines en faisant usage de signes cossiques :

ʒ, ce, ʒʒ,

pour respectivement le carré, le cube et le bicarré. Ainsi $\surd$ʒ signifie « $\sqrt{\ }$ » dans notre notation (qui a laissé tomber l'exposant) ; $\surd$ce signifie « $\sqrt[3]{\ }$ » et $\surd$ʒʒ signifie « $\sqrt[4]{\ }$ ». Enfin Stifel représente les inconnues par les lettres *A*, *B*, *C*, ... en les répétant 2, 3, 4, ... fois pour indiquer les degrés 2, 3, 4, ... :

AA signifie A^2 ;
AAA signifie A^3 ;
etc.

— Simon Stevin emploie la notation italienne (1585) en notant les opérations fondamentales par les signes « + » (addition), « − » (soustraction), « M » (multiplication) et « D » (division). L'originalité de sa notation réside dans l'introduction des puissances, notées à l'aide d'un cercle, sans mentionner l'inconnue. Ainsi :

3 ① signifie $3\,x$;
3 ② signifie $3\,x^2$;
3 ③ signifie $3\,x^3$;
etc.

Cette notation lui permit d'écrire les *fractions décimales* (c'est un de ses titres de gloire). Par exemple, le nombre 3,141 6 s'écrit :

3 ⓪ 1 ① 4 ② 1 ③ 6 ④.

Quelques années plus tard, on remarquera que les ①, ②, ... qui signifient 10^{-1}, 10^{-2}, etc., ne sont pas utiles, et qu'il suffit de séparer les unités entières (ici : 3) des décimales par un ⓪, ou, plus simplement, par une virgule ou un signe de ponctuation quelconque.

— C'est à François Viète que l'on doit le symbolisme algébrique moderne (1591) : il désigne les inconnues par des voyelles (*E*, *I*, ...), les quantités connues (paramètres) par des consonnes, et crée ainsi l'*algèbre littérale* qui est celle que connaissent — aux notations près — tous les collégiens. Une expression comme $ax^2+bx+c=0$ est écrite par Viète (en appelant *E* l'inconnue et *B*, *C*, *D* les coefficients) :

B in *E* quadr. plus *C* in *E* plano + *D* aequabitur 0

(*in* = « que multiplie » ; *E quadr.* = E^2 ;
E plano = $E^1 = E$).

Bien entendu, Viète utilise aussi le symbolisme des Italiens et des Allemands. L'intérêt de l'algèbre littérale est évident : elle conduit à énoncer des *formules de résolution*, valables pour toutes les équations particulières. Toutefois c'est à Descartes que l'on est redevable des derniers perfectionnements de la symbolique algébrique.

● *La théorie des nombres.* Oublions maintenant le problème des notations, qui a gêné sans doute les algébristes de la Renaissance mais ne les a pas paralysés et examinons comment ils conçoivent les nombres et les opérations sur les nombres.

— La résolution des équations, dès que l'on quitte le domaine des problèmes concrets pour aborder les cas généraux, impose de considérer d'autres nombres que les entiers positifs. Soit en effet *a* et *b* deux nombres entiers positifs premiers entre eux (c'est-à-dire qu'ils n'ont pas de diviseur commun) et considérons les équations :

$$a+x=0\,; \qquad (1)$$

$$ax=b\,; \qquad (2)$$

$$x^2+1=0\,. \qquad (3)$$

L'équation (1) admet pour solution $x=-a$ (par exemple $3+x=0$ est vérifiée pour $x=-3$, car on a alors $3-3=0$), c'est-à-dire qu'elle possède une *racine négative*. Au XVIe siècle, une telle solution était encore appelée « fausse » ou « impossible », ou encore « absurde ». Toutefois le calcul impose de traiter les nombres négatifs comme les entiers positifs, c'est-à-dire de les additionner et de les multiplier, en faisant usage de la règle des signes de Nicolas Chuquet.

L'équation (2) admet comme solution générale b/a qu'il faut bien renoncer à considérer comme un opérateur. Une fois définies les règles techniques du calcul sur les fractions (réduction au même dénominateur, etc.), on passe alors tout naturellement de l'ensemble des nombres entiers, cher à Euclide, à celui des *nombres rationnels* (les nombres entiers sont considérés, dans ce cas, comme un cas particulier de nombres rationnels, celui de fractions dont le numérateur est un multiple entier du dénominateur ; ainsi $5=15/3$ par exemple).

L'équation (3) est plus délicate à résoudre. Il faut en effet écrire $x^2=-1$ et chercher la racine carrée du nombre négatif -1. Or, si l'on veut respecter la règle des signes, il est impossible de trouver un nombre qui, multiplié par lui-même, donne -1. Deux attitudes sont alors possibles : ou bien déclarer que l'équation (3) n'a pas de solution, ou bien introduire *par convention* un nombre noté i (ou d'une toute autre manière), défini par $i^2=-1$. Avec cette convention, l'équation (3) a pour racines $+i$ ou $-i$, puisque :

$$(+i)\times(+i)=i^2=-1\,; \quad (-i)\times(-i)=i^2=-1\,. \qquad (4)$$

— Historiquement, les choses se sont passées d'une manière légèrement différente. Les nombres négatifs et les nombres fractionnaires ont été

Niccolò Fontana, dit Tartaglia (« Le Bègue »), vers 1499-1557, qui découvrit la méthode générale de résolution des équations du troisième degré, en 1535 (25 ans après qu'elle eut été découverte une première fois par Scipione del Ferro).



_Gerolamo Cardano (1501-1576), qui s'appropria la méthode de Tartaglia, utilisée dans l'_Ars magna_, en 1545, pour résoudre les équations du troisième degré : la « formule de Cardan » devrait s'appeler, en toute équité, la « formule de Tartaglia »._



« absorbés » algébriquement à la fin du XVe siècle, et « digérés » pendant tout le XVIe siècle. Non sans mal, puisqu'il faut attendre 1585 pour voir Simon Stevin affirmer que tout ce sur quoi on peut calculer est un nombre, et que les qualificatifs « absurdes », « irrationnels », « impossibles », « inexplicables » dont on décore certains nombres n'ont aucune raison d'être. C'est d'ailleurs parce qu'il a admis que les nombres négatifs pouvaient être traités comme les nombres positifs que Simon Stevin a pu montrer que l'équation du second degré avait une solution générale (celle qu'on enseigne de nos jours aux collégiens) : avant lui, on distinguait trois types d'équations du second degré, et on ne comprenait pas la signification des racines négatives.

L'introduction des nombres imaginaires, tels que $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, etc., est due à Bombelli (1550) ; elle a été préparée par les recherches de Scipione del Ferro (v. 1496-1500), de Tartaglia (1535) et de Cardan (1539). Le problème qui s'est posé à ces mathématiciens concernait la résolution générale de l'équation du 3e degré :

$$x^3 + px + q = 0\,. \qquad (5)$$

Sans entrer dans les détails (voir p. 142), disons que la solution du problème impose de calculer des quantités telles que $\sqrt{-1}$, qu'on appelait alors des « faux nombres » et qu'on nomme maintenant des *nombres imaginaires*. Tartaglia refusait de les prendre en considération, et ce refus l'empêcha de découvrir la formule générale de résolution ; Cardan les accepta à titre d'instrument de calcul, ce qui lui permit de trouver la formule connue sous le nom de *formule de Cardan*, mais il ne comprit pas qu'il s'agissait là de véritables nombres, sur lesquels on pouvait calculer comme sur des nombres entiers.

Bombelli eut le courage intellectuel de donner droit de cité aux nombres imaginaires, et d'éclairer définitivement la théorie des équations du 3e degré. Le nombre [0 . m . 1], c'est-à-dire en notation moderne (0 − 1), admet, dit-il, deux racines carrées : $+\sqrt{0-1}$ et $-\sqrt{0-1}$, qu'il désigne par les symboles respectifs *p.di.m.* et *m.di.m.* (abréviations de « plus de moins » et de « moins de moins »). Dans notre notation moderne (due à Euler), on écrirait :

$$\sqrt{-1} = \mathrm{i}\,; \quad -\sqrt{-1} = -\mathrm{i}\,. \qquad (6)$$

— Résumons-nous. En s'en tenant aux règles opératoires appliquées aux nombres positifs et négatifs, la quantité $\sqrt{-1}$ est « impossible ». *Mais* si l'on pose un nouvel ensemble de règles, le symbole $\sqrt{-1}$ peut faire partie de ces grandeurs qu'on appelle des « nombres », à condition qu'on cesse de se demander ce qu'il signifie concrètement (attitude que ne conserveront pas, heureusement, les mathématiciens, puisque c'est en s'interrogeant sur leur nature qu'ils ont fait progresser la théorie des nombres). Par exemple, si nous adoptons la règle complémentaire suivante :

$$(\sqrt{-1})^2 = -1\,, \qquad (7)$$

une opération comme :

$$(3 + \sqrt{-1}) \times (3 - \sqrt{-1}) \qquad (8)$$

donne un résultat très « normal » lorsqu'on lui applique la formule bien connue des écoliers $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Ici nous avons :

$$a = 3, \text{ donc } a^2 = 9 \text{ (règle ordinaire de calcul)}, \qquad (9)$$

$$b = \sqrt{-1}\,, \quad \text{donc} \quad b^2 = -1\,, \qquad (10)$$

d'après la convention complémentaire (7) ci-dessus. Donc :

$$a^2 - b^2 = 9 - (-1) = 10\,. \qquad (11)$$

Le « tour de passe-passe » est terminé : le produit de deux nombres « absurdes » $(3 + \sqrt{-1})$ et $(3 - \sqrt{-1})$ donne un nombre bien réel !

Qu'est-ce que cela suppose ? Tout simplement un progrès considérable sur les algébristes orientaux : pour qu'une notion soit appelée « nombre », il n'est plus nécessaire qu'elle *représente* quelque chose, c'est-à-dire qu'elle puisse servir à compter des objets concrets ou à mesurer des longueurs géométriques ; il suffit qu'on puisse faire sur elles certaines opérations fondamentales. Nous verrons que cette attitude naïve peut se transformer en une attitude hautement logique, en étudiant la théorie des ensembles et l'algèbre moderne qui est donc plus, et même autre chose, que le simple art de résoudre des équations.

A la recherche d'une axiomatique.

Le point des connaissances mathématiques au début du XVIIe siècle.

Lorsque Descartes et Fermat commencent leurs recherches mathématiques, sur lesquelles vont se bâtir l'algèbre, la géométrie analytique et l'analyse des XVIIe et XVIIIe siècles, la situation des mathématiques peut être décrite comme suit.

● *La géométrie*, science de la mesure et de la position des figures dans l'espace, est toujours la géométrie d'Euclide. C'est un monument de perfection : à partir de trente-cinq propositions fondamentales (*axiomes* au sens large), un important corpus de théorèmes et de corollaires a pu être établi. La vérité de cette géométrie ne fait de doute pour personne, car son *axiomatique*, c'est-à-dire ses règles et définitions de base, semble sans reproche. Elle n'a qu'un inconvénient : les problèmes de géométrie sont difficiles à résoudre, car il n'existe pas de méthode générale pour les traiter. Autrement dit, chaque problème exige qu'on *invente* une méthode de résolution.

● *La théorie des nombres*, ou arithmétique, comprend la description des propriétés de l'ensemble des nombres entiers, de l'ensemble des nombres rationnels, positifs et négatifs et de l'ensemble des nombres irrationnels ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc.). Ces différents nombres, dont l'unité a été soulignée par Simon Stevin, peuvent être représentés par des segments de droite, et les opérations sur ces nombres correspondent à des constructions géométriques. Dans la mesure où la géométrie est *certaine*, elle confère donc cette certitude à la théorie des nombres. Et c'est pourquoi Bombelli, puis Descartes ont insisté sur la signification géométrique des opérations sur les nombres (voir figure ci-contre). Une fois cette correspondance assurée, le mathématicien peut calculer à loisir et faire confiance à la combinatoire numérique : elle ne le trahira jamais, puisqu'elle est le reflet abstrait de la géométrie.

● *L'algèbre, ou théorie des équations*, est donc, elle aussi, une science certaine, aussi solide que la géométrie. Descartes, en perfectionnant le symbolisme de Viète, lui a donné son aspect moderne : les inconnues sont désignées par *x*, *y*, *z* ... ; les quantités connues par *a*, *b*, *c* ... ; les opérations par les symboles « + », « − », « × » et par la barre de fraction ; la notation exponentielle est acquise, et aussi celle des radicaux. Depuis les travaux des algébristes italiens, venus compléter ceux de Diophante et des Arabes du Moyen Âge, on sait résoudre, à l'aide de formules comportant ou non des radicaux, c'est-à-dire des extractions de racines, les équations générales du premier, du deuxième, du troisième et du quatrième degré (l'équation du quatrième degré a été résolue par Ludovico Ferrari, élève de Cardan, vers 1545).

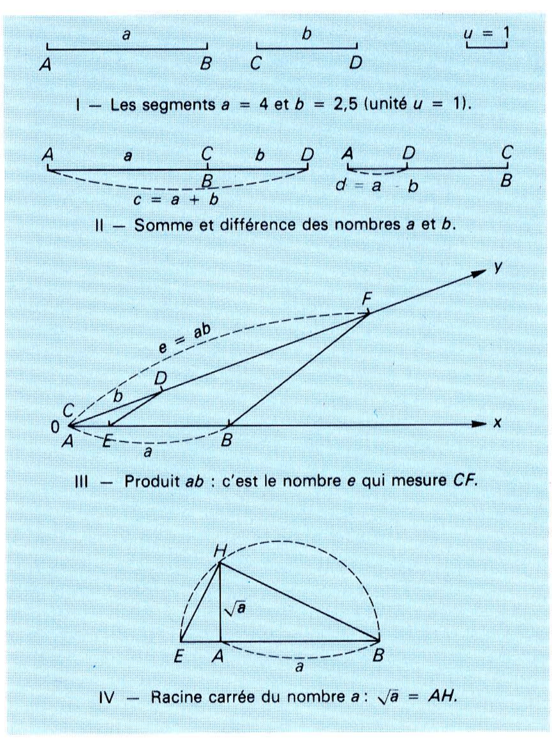
Une seule ombre au tableau : les nombres négatifs et les nombres imaginaires. On les admet pour le besoin des calculs et pour la résolution des équations, mais personne n'a su encore déterminer leur équivalent géométrique, qui leur donnerait la même garantie axiomatique qu'aux nombres positifs (entiers, fractionnaires ou irrationnels).

L'algèbre et l'analyse au XVIIe et au XVIIIe siècle.

● *Au XVIIe siècle* l'algèbre pure semble se reposer sur ses lauriers. Une bonne armature symbolique permet le développement — avec toutes les subtilités que cela comporte — du calcul algébrique et la résolution des équations devient — presque — un jeu d'enfant. Ce qui est nouveau, et ce qui va passionner pendant deux siècles les mathématiciens, c'est un domaine de recherches qui repose sur deux découvertes fondamentales.

— Descartes invente, à partir de 1619, la *géométrie analytique* (qu'il exposera en 1637). Il s'agit d'une méthode permettant de traduire algébriquement, par des équations, les propositions géométriques. Cette découverte capitale, à laquelle a aussi participé le Français Fermat, n'est pas seulement un progrès méthodologique, c'est un pas en avant vers l'unification des mathématiques.

— Environ un demi-siècle après les travaux de Descartes, et après ceux de plusieurs précurseurs comme Cavalieri, Barrow, Fermat, Pascal, etc., le *calcul infinitésimal* est inventé presque simultanément par Newton et Leibniz (voir ci-après, p. 102 l'histoire de l'analyse). Les premiers éléments de ce calcul avaient été posés quelque deux mille ans auparavant par Eudoxe et Archimède (méthode dite d'exhaustion). Le calcul infinitésimal, qui fut le premier objet de l'*analyse*, se présente comme un élargissement du champ de l'algèbre traditionnelle et, en conséquence, de la géométrie analytique : il porte sur des *grandeurs infiniment petites* et non plus sur des nombres réels ou imaginaires, et il est l'auxiliaire indispensable de l'étude des fonctions d'une variable réelle.



I — Les segments $a = 4$ et $b = 2{,}5$ (unité $u = 1$).

II — Somme et différence des nombres *a* et *b*.

III — Produit *ab* : c'est le nombre *e* qui mesure *CF*.

IV — Racine carrée du nombre *a* : $\sqrt{a} = AH$.

Équivalents géométriques des opérations sur les nombres positifs (entiers, fractionnaires ou irrationnels). Soit a et b (a > b) deux nombres positifs, représentés par deux segments AB et CD de longueur a unites et b unités.

I — La somme a + b est le segment de longueur c obtenu en portant bout à bout les segments AB et CD (B et C confondus).

II — La différence a − b est le segment AD = d, obtenu en portant CD sur AB comme on l'a indiqué sur la figure.

III — Le produit ab est obtenu comme suit. On porte AB = a sur l'axe Ox où l'on marque aussi le segment unité AE = 1. Sur une droite quelconque Oy on porte CD = b et l'on joint DE ; on mène par B la droite parallèle à DE, soit BF. Le théorème bien connu de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{AB}{CF} = \frac{AE}{CD}\,, \qquad \textbf{soit :} \qquad \frac{a}{CF} = \frac{1}{b}\,,$$

d'où, en faisant le produit des extrêmes et le produit des moyens : ab = CF : le segment CF représente donc le produit ab. De même b représente le quotient de CF par a, et a le quotient de CF par b.

IV — La racine carrée de a s'obtient en menant AE = 1 dans le prolongement de AB du côté de A et en traçant le demi-cercle de diamètre EB. Les théorèmes de géométrie sur le triangle rectangle permettent d'écrire la relation :

$$AH^2 = AE \times AB\,,$$

soit :

$$AH^2 = 1 \times a = a\,.$$

d'où $\sqrt{a} = AH$: le segment AH représente donc la racine carrée du nombre a.

● *Au XVIIIe siècle*, l'analyse l'emporte sur l'algèbre, dans la mesure où elle est considérée comme la théorie des équations. Cependant un certain nombre de problèmes algébriques restent en suspens.

— La résolution de certaines équations différentielles (les équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants : voir à ce sujet p. 158), qui est un important chapitre du calcul différentiel et intégral, impose de résoudre une équation du second degré classique appelée *équation caractéristique* dont les coefficients sont précisément les coefficients de l'équation différentielle proposée et de considérer ses racines imaginaires aussi bien que ses racines réelles (voir ci-après pp. 71-72, où est expliquée la résolution de l'équation du second degré) : les nombres imaginaires, pour lesquels Euler définit le symbole i par $\mathrm{i}^2 = -1$, semblent donc avoir une importance plus grande que celle que leur accordaient les algébristes italiens et leurs successeurs immédiats. Le fait que ces nombres puissent servir au

calcul trigonométrique (de Moivre, 1730) ne peut que confirmer cette impression : il faudra toutefois attendre le XIXe siècle pour que les nombres imaginaires, qu'on baptisera *complexes*, fassent l'objet d'un traitement logique.

— La théorie des équations stagne. Malgré tous leurs efforts, les mathématiciens ne parviennent pas à découvrir la formule générale permettant de résoudre des équations d'un degré supérieur à 4 à l'aide de radicaux. Pour faire comprendre ce problème, considérons l'équation générale du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0 . \qquad (1)$$

Résoudre cette équation, c'est trouver la valeur de x qui la vérifie, a, b et c (les *coefficients*) représentant des nombres connus. On démontre à tous les collégiens que cette équation possède deux racines (deux solutions), x' et x'' :

$$x' = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} ;$$
$$x'' = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} . \qquad (2)$$

Pour discuter cette équation, on étudie le signe de la quantité $\Delta = b^2 - 4ac$ qu'on appelle le *discriminant* de l'équation. Si Δ est positif, $\sqrt{\Delta}$ est un nombre réel et les deux racines x' et x'' sont réelles et distinctes. Si Δ est nul, les deux racines se confondent en une seule et l'on a $x' = x'' = -b/2a$: c'est ce qu'on nomme une *racine double* (ou encore une *racine d'ordre 2*). Si Δ est négatif, $\sqrt{\Delta}$ est imaginaire et les racines x', x'' sont elles-mêmes complexes. Ainsi donc, dans tous les cas, l'équation du second degré admet deux racines, qui peuvent être réelles (distinctes ou confondues) ou complexes.

Cardan a montré, par une méthode qui lui est propre, que l'équation du 3e degré

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (3)$$

possédait trois racines, réelles ou complexes, distinctes ou confondues ; et Ferrari a montré que l'équation du 4e degré

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \qquad (4)$$

avait toujours quatre racines, réelles ou complexes, distinctes ou confondues. Il est donc assez « naturel » (?) de penser que le nombre de racines d'une équation générale de degré n était égal à n, à condition d'accepter les racines complexes et de tenir compte des racines confondues. C'est ce que fit A. Girard (*Invention nouvelle en algèbre*, 1629) qui énonça, sans la démontrer, la proposition connue sous le titre de *théorème fondamental de l'algèbre* : une équation de degré n a exactement n racines, en comptant les racines « impossibles » (imaginaires), chacune avec son degré de multiplicité (une racine double compte pour deux, une racine triple compte pour trois, etc.). Nous retrouverons bientôt ce théorème capital que tentèrent en vain de démontrer, dans la période qui nous intéresse ici, Descartes (1637), Newton (1685), Euler (1742) et D'Alembert (1746). Ce dernier fit faire des progrès à la question en démontrant notamment une proposition préliminaire indispensable à la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre, et qu'on appelle le *lemme de D'Alembert*.

— Un autre domaine qui intrigua fort les algébristes du XVIIIe siècle fut celui de l'*algèbre linéaire*, c'est-à-dire de la théorie des équations du premier degré.

Rien n'est plus simple qu'une équation du premier degré à une inconnue, de la forme $ax + b = 0$. Elle admet, comme chacun le sait, une solution $x = -b/a$, à la condition que a soit différent de 0. D'autre part tous les collégiens ont appris à résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y, système qui se présente sous la forme générale :

$$\begin{cases} ax + by = c ; \\ a'x + b'y = c' . \end{cases} \qquad (5)$$

Page 58, nous expliquons que les racines x et y de ce système sont données par :

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} ;$$
$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} . \qquad (6)$$

La quantité $ab' - ba'$, qui sert à résoudre le système (5) est appelée le *déterminant* du système. Lorsqu'on veut résoudre un système de trois équations linéaires à trois inconnues, de quatre équations linéaires à quatre inconnues, ..., de n équations linéaires à n inconnues, on procède d'une manière analogue, en calculant une grandeur qui est fonction des coefficients du système et qui est le *déterminant* de ce système. La méthode, entrevue par Leibniz, a été systématisée par Cramer (1750) et perfectionnée dans la seconde moitié du XVIIIe siècle par Bezout (1764), Vandermonde (1772), Laplace (1772), Lagrange (1773) et bien d'autres.

L'étude des systèmes du premier degré à n inconnues, qui constitue l'*algèbre linéaire*, n'en est pas restée là. En effet, il peut se trouver que le nombre des équations ne coïncide pas avec le nombre d'inconnues. Dans ce cas, la théorie des déterminants est en défaut, et il faut introduire d'autres méthodes, qui ne seront découvertes qu'au XIXe siècle et qui ouvriront elles aussi une voie royale à l'algèbre linéaire.

Naissance de l'algèbre moderne.

● *Les difficultés de l'analyse*, à la fin du XVIIIe siècle, ont remis à la mode le problème de la résolution des équations algébriques. Elles concernent un chapitre de l'analyse intitulé « *Intégration des fractions rationnelles* », que nos lecteurs peuvent très bien ignorer pour l'instant. Il suffit de savoir que ce problème conduit à chercher les *zéros* d'un polynôme $P(x)$ (lire : « P de x »), c'est-à-dire les valeurs de x pour lesquelles on a :

$$P(x) = 0 . \qquad (7)$$

Un polynôme de degré n est de la forme :

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n . \ (8)$$

Pour $n = 1, 2, 3$ ou 4, la question a été résolue depuis le XVIe siècle, et l'on savait résoudre l'équation (7) à l'aide de radicaux. Vandermonde et Lagrange cherchèrent à résoudre des équations de degré supérieur à 4 vers 1770-1774, et cela les conduisit à approfondir la théorie des polynômes et les méthodes algébriques dites de *combinaison* et de *substitution*.

Les idées de Vandermonde et de Lagrange furent reprises au début du XIXe siècle par trois mathématiciens de génie : Gauss (qui démontra le théorème fondamental de l'algèbre en 1799-1801), Abel et Galois. De leurs travaux et de ceux de Cauchy devait sortir la *théorie des groupes de substitution*, l'un des chapitres fondamentaux de l'algèbre moderne qui devait aboutir, cent ans plus tard, aux travaux d'Emmy Noether (1921-1927) sur l'*algèbre commutative*, l'une des principales branches des mathématiques modernes.

Toutefois les théories de Gauss et de Galois n'ont pas été vraiment comprises en leur temps ; de sorte que l'algèbre moderne est née d'autres préoccupations. Lorsqu'elle a été constituée, on a constaté qu'elle était contenue en puissance dans les travaux abondants de Gauss et dans les notes brèves mais géniales écrites par Galois dans la nuit qui précéda sa mort (en duel, à l'âge de 21 ans).

● *La généralisation de la notion de nombre* repose sur les travaux de Gauss, au début du XIXe siècle, relatifs aux nombres complexes (dès 1797, Gauss avait étudié le problème de la représentation géométrique des nombres complexes, mais il n'a livré ses résultats au public savant qu'à partir de 1831. Un *nombre complexe* est un être mathématique défini par la relation :

$$z = a + bi , \qquad (9)$$

définition des réels, voir p. 52) c'est-à-dire des nombres entiers ou fractionnaires, rationnels ou irrationnels, positifs, négatifs ou nuls, et i un symbole défini par $i^2 = -1$. Si $b = 0$, on a $z = a$, et le nombre z se réduit à un nombre réel. L'addition de deux nombres complexes $z = a + b\,i$ et $z' = a' + b'\,i$ se fait selon les règles générales du calcul classique ; on obtient un nouveau nombre complexe :

$$z + z' = (a + a') + (b + b')\,i = A + Bi . \qquad (10)$$

De même le produit zz' de deux nombres complexes est le nombre complexe :

$$zz' = (aa' - bb') + (ab' + ba')\,i . \qquad (11)$$

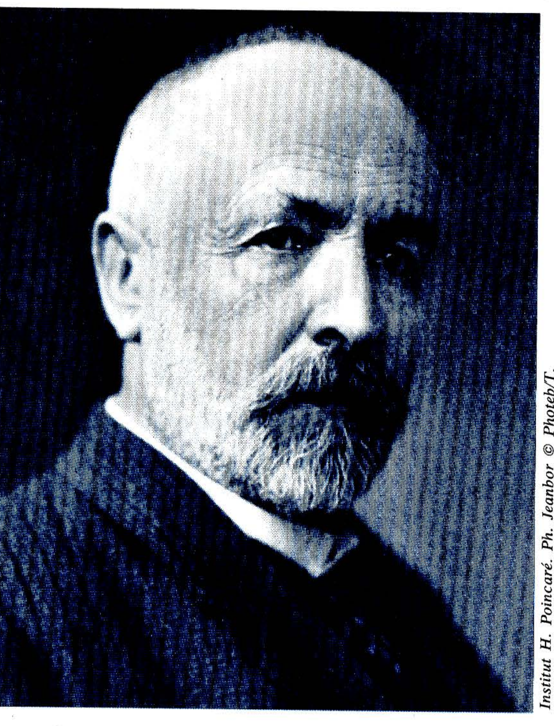
L'image géométrique d'un nombre complexe $z = a + bi$ est un point A, de coordonnées rectangulaires (a, b).

Cette représentation géométrique a été proposée, avant la publication de Gauss, par le Danois Wessel (en 1798) et par le Suisse J.-R. Argand (en 1806). Cauchy a employé une méthode analogue de représentation. Ces théories attirèrent l'attention des mathématiciens sur de nouveaux êtres mathématiques, susceptibles d'être les objets d'une nouvelle algèbre : vecteurs, quaternions et nombres hypercomplexes, matrices, qui furent notamment étudiés par l'école britannique (Hamilton, Clifford, Sylvester, Cayley) et par les mathématiciens allemands Möbius et Grassmann. Ainsi se constitue, à partir de 1840/1850, ce qu'on appelle l'*algèbre linéaire* (voir p. 58).

En 1854, Riemann élargit encore ce point de vue en montrant qu'on peut *calculer* non seulement sur des nombres, au sens très général qui vient d'être évoqué, mais aussi sur des *transformations géométriques* : ses recherches sont à l'origine de la *topologie* (voir p. 127).

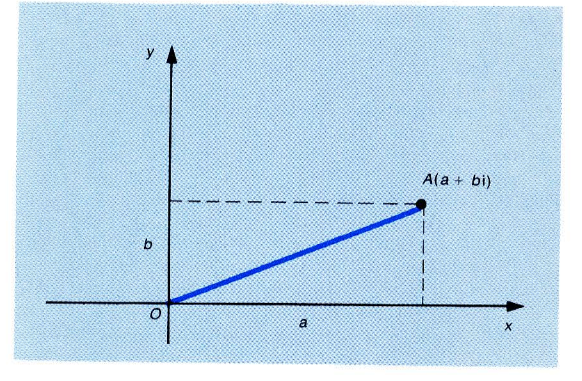
● *Le courant arithmétique* est lié, lui aussi, aux travaux de Gauss (à partir de 1801). Le mathématicien allemand envisageait une algèbre portant sur des notions plus abstraites encore que les nombres complexes ou les transformations géométriques. Il aboutit à la *théorie des nombres algébriques* et aux recherches arithmétiques de Dirichlet, Dedekind, Kümmer, Kronecker, Hilbert, à la fin du XIXe siècle (introduction des *idéaux* et notion de *corps commutatifs*). Ces travaux débouchent, au XXe siècle, sur l'*algèbre commutative* et la *géométrie algébrique*.

L'acte de naissance officiel de l'algèbre moderne est la publication par le mathématicien allemand E. S. Steinitz, en 1910, d'un mémoire intitulé *Algebraische Theorie der Körpern* (*Théorie algébrique des corps*, Journal de Crelle, tome CXXXVII, pp. 167-309) ; l'auteur, renonçant à décrire tel ou tel corps particulier (un *corps* est un ensemble dont les lois seront étudiées plus loin, p. 43), y expose les propriétés d'éléments abstraits telles qu'on peut les déduire de certaines propriétés fondamentales posées a priori comme des *axiomes*.



Georg Cantor (1845-1918), créateur de la théorie des ensembles ; son œuvre la plus célèbre a été publiée en 1895-1897 : Contributions au fondement de la théorie des nombres transfinis.

Représentation géométrique d'un nombre complexe $z = a + bi$.





Cantor, en équilibre sur un aleph — nombre cardinal caractérisant la puissance d'un ensemble — entre l'infini, représenté par Dieu sur son nuage, et Kronecker, qui a durement critiqué les théories de Cantor sur l'infini (caricature de Barbe).

Problèmes en suspens.

Au cours de la première moitié du XIXe siècle, les mathématiciens sont donc parvenus graduellement à cette idée que l'objet le plus général des mathématiques était l'étude des *relations* entre des objets abstraits, définis par des *axiomes* et sans rapport nécessaire avec une réalité expérimentale quelconque. « Faire des mathématiques », c'est donc calculer, combiner selon des règles générales énoncées dans les axiomes qui sont à la base de telle ou telle théorie. Que, dans certains cas, il puisse y avoir une certaine correspondance entre ces objets, ces relations, ces calculs et le monde de la perception commune n'ajoute ni n'ôte rien à la consistance des mathématiques ; c'est simplement une façon commode d'appréhender le monde en question. Dès lors les grands problèmes en suspens vers 1870 peuvent être énumérés comme suit.

1 - Il faut énoncer avec rigueur les axiomes qui sont à la base de chacune des grandes théories mathématiques : géométrie, théorie des nombres entiers, théorie des nombres en général, algèbre, analyse, etc. Ce travail d'axiomatisation, commencé par Leibniz au XVIIe siècle (la notion de *caractéristique universelle*), se développe à partir de 1850 environ, avec les logiciens et les mathématiciens anglo-saxons (Augustus De Morgan, George Boole, et, plus tard, W. S. Jevons, C. S. Peirce) et l'Allemand Hermann Hankel. Il s'épanouit, à la fin du XIXe siècle et au début du XXe siècle, avec F. L. G. Frege, Peano, Hilbert, Bertrand Russell et A. H. Whitehead, etc.

2 - Une autre idée qui fait petit à petit son chemin dans l'esprit des mathématiciens est celle d'*isomorphisme* (en grec *isos* = « égal » ; *morphē* = « forme »). Déjà Leibniz avait signalé l'existence d'une certaine correspondance entre l'addition et la multiplication, qui sont des opérations *isomorphes* en ce qui concerne les nombres réels. Par la suite, on a compris qu'on pouvait passer d'une théorie à une autre, portant sur des objets différents, en changeant simplement de langage (sans référence aux objets considérés). Ainsi, en géométrie projective, on démontre des théorèmes à double face en transformant une figure selon des règles appropriées ; par exemple à des droites concourantes peuvent correspondre, par une transformation dite « par polaires réciproques » des points alignés, et *vice versa*).

Nous verrons plus loin comment la notion d'isomorphisme est comprise dans la notion plus générale et très importante de *structure*.

3 - Jusqu'au XIXe siècle, le modèle mathématique par excellence était le modèle géométrique : le besoin de rapporter les nombres réels à des grandeurs (longueurs de segments), de représenter géométriquement des notions comme celles de nombres complexes, de dérivées d'une fonction, etc., correspond à cette géométrisation des mathématiques. A partir de 1820/1830, on assiste à un mouvement inverse. On cherche (Grassmann, Hankel, Weierstrass, Dedekind, Méray, Cantor) à éliminer l'intuition de grandeurs géométriques de l'analyse et à fonder celles-ci sur une définition rigoureuse des nombres réels, eux-mêmes fondés sur la notion de nombres entiers. C'est ce qu'on appelle l'*arithmétisation* des mathématiques.

4 - L'arithmétique elle-même, considérée comme le modèle par excellence de toute théorie mathématique, se devait d'être rigoureusement axiomatisée. Ce fut là l'œuvre principale de Dedekind (1888) et de Peano.

5 - Les difficultés logiques rencontrées dans le domaine de la géométrie, de l'algèbre, de l'analyse et de l'arithmétique ont été résolues par une théorie générale, élaborée entre 1872 et 1895 par le mathématicien allemand d'origine russe Georg Cantor, et qui se nomme la *théorie des ensembles.* Toute théorie mathématique traite d'objets abstraits qui constituent des ensembles (avant Cantor, on parlait souvent de *classes*) : l'ensemble des nombres entiers, l'ensemble des réels, l'ensemble des nombres complexes, l'ensemble des polynômes, etc. sont des exemples d'ensembles au sens de la définition célèbre (... et critiquée) de Cantor :

> *« Par ensemble on entend un groupement en un tout d'objets bien distincts de notre intuition ou de notre pensée. »*

Cantor a approfondi cette notion d'ensemble, montré comment les diverses difficultés des mathématiques pouvaient être résolues grâce à elle et il a mis fin, ce faisant, à des querelles logiques qui menaçaient l'édifice mathématique tout entier.

De la théorie des ensembles à la métamathématique.

Infini actuel et infini potentiel.

Les mathématiciens et les non-mathématiciens s'occupent continuellement d'ensembles d'objets, sans éprouver le besoin de réfléchir sur ces ensembles eux-mêmes. Les *lieux géométriques* des anciens Grecs (... et aussi des écoliers !) sont des « ensembles de points » possédant une même propriété ; on parle couramment de « l'ensemble des valeurs de la variable » comprises entre deux valeurs limites, *a* et *b*, etc. De temps à autre, un savant s'interrogeait sur l'un de ces ensembles et y rencontrait bien souvent des paradoxes inquiétants. L'un des premiers en date est le *paradoxe de Galilée.*

Considérons la suite infinie des nombres entiers naturels : 1, 2, 3, 4, ... n, $n+1$, ... « Il va de soi » qu'elle est infinie, puisqu'*on peut toujours* ajouter une unité à tout nombre donné à l'avance, aussi grand soit-il : cet infini est appelé par les mathématiciens et les philosophes un *infini potentiel*, parce qu'il n'est pas donné réellement, avec tous ses éléments, mais seulement « en puissance », sous la forme d'une règle de composition. Chacun de ces nombres entiers n possède un carré, n^2, et l'on peut écrire les deux suites l'une au-dessous de l'autre :

Suite n : 1, 2, 3, 4, ... n, $(n+1)$, ...
Suite n^2: 1, 4, 9, 16, ... n^2, $(n+1)^2$ ...

Puisque à chaque entier n correspond un nombre n^2, on peut dire qu'il y a autant de carrés parfaits que de nombres entiers : mais alors que fait-on du bel axiome que « le tout est plus grand que la partie » ? L'ensemble des carrés parfaits ne représente pas *tous* les entiers et cependant il y a autant de carrés parfaits que de nombres entiers. Nous voici donc en présence d'un *paradoxe.* Il en existe bien d'autres lorsqu'on s'interroge sur les ensembles infinis, c'est-à-dire lorsqu'on cesse de les considérer comme des infinis « possibles » (potentiels), pour les considérer comme des infinis réalisés, ou, comme on dit en mathématiques, des *infinis actuels.*

Conclusion (avisée) de Galilée : méfions-nous de l'infini actuel comme de la peste, et interdisons aux mathématiciens de s'en occuper. Deux mille ans plus tôt, les philosophes éléates en étaient arrivés au même point en essayant de comprendre comment Achille pourrait rattraper une tortue, et trois cents ans plus tard, en 1833, Cauchy citera ce paradoxe et félicitera Galilée de sa prudence.

Or il est des chapitres entiers d'analyse qui conduisent à considérer l'infini actuel, ou, tout au moins, des ensembles *exceptionnels*, comme menant à des paradoxes de ce genre. Nous ne les étudierons pas ici, car nos lecteurs ne sont pas nécessairement des mathématiciens. Mais nous pouvons en signaler quelques titres : étude approfondie des fonctions de variables réelles (ces mêmes fonctions dont les lycéens connaissent les plus simples... celles qui ne posent pas de problèmes, et qui leur font croire que toutes les mathématiques sont inéluctables), étude des séries trigonométriques, définitions des nombres irrationnels, de la continuité d'une fonction, etc.

L'analyse, plus spécialement la théorie des fonctions continues, et ses diverses extensions, était donc bâtie sur un terrain logique peu solide. Tout s'était très bien passé jusqu'au début du XIXe siècle, mais, à ce moment-là, les difficultés et les paradoxes se sont multipliés. C'est pour les éliminer que le mathématicien russe Cantor a élaboré, entre 1872 et 1895, la *théorie des ensembles*, qui, en reconsidérant la totalité des notions jusque-là développées séparément, a donné à l'algèbre moderne et à l'analyse la base rigoureuse qui leur manquait, les garantissant contre toute « surprise » à venir. Selon une expression due à Hilbert, Cantor avait créé un véritable paradis pour mathématiciens, et ceux-ci étaient bien décidés à ne pas s'en laisser chasser.

La crise des mathématiques.

Il s'en est fallu cependant de peu que ce paradis ne se transformât rapidement en un paradis perdu. En 1895, la théorie des ensembles est achevée. En 1897, au premier congrès international des mathématiciens, à Zurich, elle est officiellement adoptée, en raison notamment des conséquences importantes qu'on en tire et de son application immédiate en analyse. Et pourtant, dès 1897, l'Italien Burali-Forti, en mettant en évidence un certain paradoxe de la théorie, ouvrait une crise qui ne devait se terminer que dans les années 30.

● *Les ensembles paradoxaux.* Acceptons la définition célèbre d'un ensemble donnée par Cantor : « un groupement en un tout d'objets bien distincts de notre intuition et de notre pensée », bien que celle-ci soit, pour les mathématiciens actuels, trop vague et insuffisante. Elle pose la distinction entre un *ensemble* et les *éléments* qui composent cet ensemble. Par exemple, « un sac de billes » est un ensemble dont les billes sont les éléments ; la suite des nombres entiers positifs est un ensemble dont chaque nombre, 1, 2, etc., est un élément ; etc. La définition de certains ensembles, nous allons le voir, conduit à des paradoxes insolubles ; on les appelle des *ensembles paradoxaux.*

— *Premier exemple.* Considérons la totalité des notions morales, juridiques, sociales, etc. de l'humanité ; leur *ensemble* constitue les *Sciences humaines* ; nous le désignerons par la lettre *S.* Il ne tient qu'à nous de décréter : « *S* est lui-même une notion morale (ou juridique, ou etc.) » ; dans ce cas l'*ensemble S se contient lui-même comme élément.* Considérons maintenant l'ensemble *A* des ensembles *a* qui ne se contiennent pas eux-mêmes comme éléments (c'est-à-dire qui ne se comportent pas comme *S*) et demandons-nous : « *A* se contient-il lui-même ? ». Nous pouvons répondre à cette question par « oui » ou par « non ». Examinons les conséquences de ces deux réponses.

1 - Si nous répondons « *non, A* ne se contient pas lui-même », cela signifie que *A* est un *a*, donc un ensemble contenu dans *A*, ce qui est en contradiction avec notre réponse « *non* ».

2 - Si donc nous répondons « *oui, A* se contient lui-même », cela signifie que *A* est un élément de *A*, donc un *a* : mais, précisément, un *a* ne peut se contenir lui-même, ce qui est en contradiction avec la réponse « *oui* ».

3 - Conclusion : la question posée à propos de l'ensemble *A* ne peut recevoir ni la réponse *oui*, ni la réponse *non.*

— *Deuxième exemple* (paradoxe de J. Richard). Ce paradoxe a été exposé dans un article de la *Revue générale des Sciences pures et appliquées* (1905, pp. 541-543), sous le titre *Les principes des mathématiques et le problème des ensembles* ; nous en donnons un exposé simplifié, selon N. Bourbaki.

1 - Considérons l'ensemble *B* des entiers *b* dont la définition peut s'exprimer en moins de seize mots français. Cet ensemble comprend un nombre fini d'éléments.

2 - Considérons maintenant la définition suivante d'un entier *b'* : « le plus petit entier qui n'est pas définissable en moins de seize mots français ». De toute évidence, *b'* ne peut appartenir à *B*, puisqu'il faut, d'après le contenu de sa définition, plus de seize mots pour le définir. Mais, d'autre part, sa définition,

donnée entre guillemets, ne comprend que quinze mots français, ce qui permet de placer *b'* dans l'ensemble *B*.

Autrement dit, *b'* appartient et n'appartient pas, en même temps, à l'ensemble *B*, selon que l'on considère le nombre de mots qui le définit, ou le sens des mots qui le définissent. *B* est un ensemble paradoxal.

Le lecteur qui a fait l'effort de nous suivre jusqu'à ce point est sans doute déconcerté. Quoi, pensera-t-il, voilà à quoi « jouent » les mathématiciens ? Au lieu de se réjouir de ce que la théorie des ensembles, en coiffant toutes les mathématiques modernes, achève le grand mouvement d'unification souhaité par Descartes, et en particulier l'arithmétisation de la géométrie, de ce qu'elle confère aux mathématiques un caractère déductif d'une très haute rigueur, au lieu de l'utiliser pour résoudre le plus grand nombre possible de questions encore pendantes en analyse, ils se posent des problèmes bizarres sur les ensembles qui se contiennent eux-mêmes ou qui ne se contiennent pas en même temps, ou sur les éléments qui sont à la fois contenus et non contenus dans un ensemble ! Cela ne semble pas très « sérieux ». Pour répondre au lecteur étonné, donnons la parole au mathématicien allemand Weyl (*Mathematische Zeitschrift*, 10, 1921) cité par F. Gonseth, *Les fondements des mathématiques*, Paris, 1926, p. 189 :

> *« On considère généralement les antinomies de la théorie des ensembles comme des escarmouches qui n'intéressent que les confins les plus extrêmes de l'empire des Mathématiques, et qui ne menacent en aucune façon la sécurité et la solidité de l'empire lui-même... Mais en fait... il faut interpréter ces irrégularités dans les régions frontières des mathématiques comme des symptômes ; c'est par là que vient au jour le mal secret que cache le jeu en apparence parfait des rouages dans les domaines centraux, et qui est l'inconsistance et le manque de solidité des fondements sur lesquels tout l'empire est assis. »*

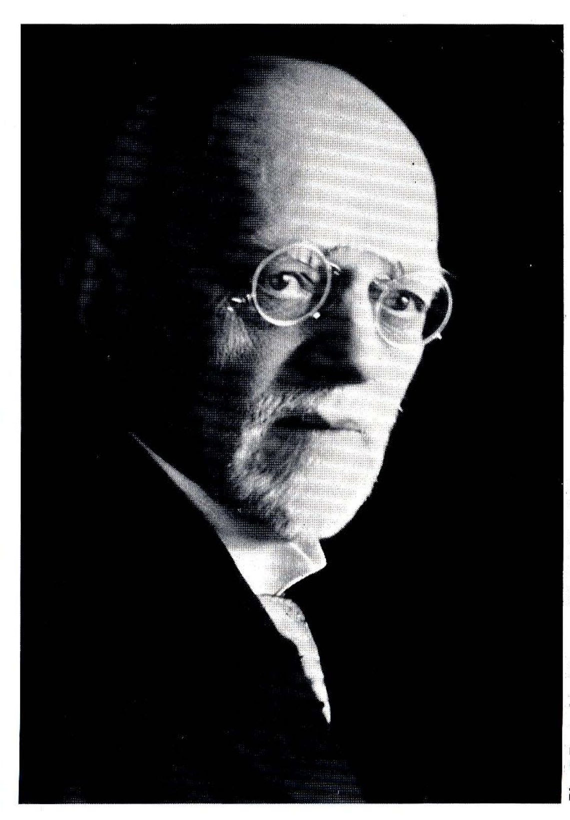
● *La nature des notions mathématiques.* Pour résoudre ces paradoxes, sans perdre les avantages indiscutables procurés par la théorie des ensembles, les mathématiciens entreprirent d'explorer plus à fond — entre 1900 et 1936 environ — les fondements des mathématiques. Il est impossible d'indiquer ici, techniquement, les résultats auxquels ils sont parvenus ; nous nous limiterons à décrire les principales tendances exprimées.

— Les *formalistes* (Zermelo, Fraenkel, von Neumann, Skolem, Bernays, Gödel, Hilbert) éliminent le problème. La théorie des ensembles, comme toute autre théorie mathématique, comporte des principes fondamentaux — des *axiomes* — et des déductions à partir de ces axiomes ; il suffit d'introduire un axiome supplémentaire décrétant que les *ensembles paradoxaux* sont éliminés de la théorie des ensembles, et le problème est résolu. Pour un formaliste, l'exactitude d'une proposition résidant dans la correction de la déduction (respect des axiomes et des règles logiques), la théorie des ensembles devient donc exacte à partir du moment où l'on a mis « hors jeu » les ensembles paradoxaux. En d'autres termes, le formaliste se désintéresse (théoriquement) du contenu de ses raisonnements. Il est dans la situation d'un joueur de tennis qui cesse de regarder la balle lorsqu'elle rebondit en dehors des lignes : en décrétant « *out* » les ensembles paradoxaux, les formalistes conservent bonne conscience.

Il faut dire que ce point de vue — qui rompt avec la tradition millénaire de l'existence d'une *réalité mathématique* explorée et découverte par l'activité incessante de l'esprit — n'a pas entraîné l'adhésion unanime. Russell, Whitehead, pour ne citer que ces grands noms, ont tenté de *justifier* la mise hors jeu des ensembles paradoxaux et non pas, simplement, de la *poser* comme un axiome. Quant à savoir s'ils ont réussi, c'est une autre affaire !...

— Les *non-formalistes* refusent ce qu'ils appellent une abdication de l'esprit. L'étude d'un objet mathématique — qu'il s'agisse d'un nombre, d'un ensemble ou d'une figure — doit s'accompagner de la *garantie* que cet objet *existe*, non pas, certes, *concrètement*, parce que cela restreindrait curieusement l'ambition des mathématiques, mais *intellectuellement*. Ainsi, Poincaré, qui fut l'un des grands adversaires du formalisme, considérait que le passage d'un nombre au suivant (de $n-1$ à n) était une sorte de pouvoir inné de l'esprit humain et non une convention imposée par la règle du jeu axiomatique, et que c'était sur ce pouvoir qu'il fallait bâtir l'édifice arithmétique et ses prolongements que sont l'algèbre et l'analyse.

Dans le sillage de Poincaré, l'école française de mathématiques devait, au début du XXe siècle, critiquer la méthode formaliste (du moins dans ses excès) et les constructions axiomatiques. Tel fut le cas — à



Ph. ©Deutsches Museum. Munich-Photeb/T.

David Hilbert, mathématicien allemand (1862-1943) qui a dominé l'école mathématique allemande dans la première partie du XXe siècle. Ses *Fondements de la géométrie (1899)* sont un ouvrage capital pour la formation de l'axiomatique moderne.

des degrés plus ou moins importants — pour Émile Borel, Baire, Jacques Hadamard, Lebesgue, etc. Mais les objections soulevées n'étaient pas systématiques ; elles portaient sur telle ou telle construction formelle et n'abordaient pas le problème de front, comme le fit le Néerlandais Brouwer à partir de 1913. Pour ce dernier, le fondement ultime des mathématiques est l'*intuition* première de la suite des nombres entiers et naturels, intuition intraduisible dans le langage axiomatique. Balayant ainsi tous les espoirs des formalistes, Brouwer insiste sur le fait que l'exactitude d'une déduction mathématique provient, en définitive, de l'évidence immédiate et intuitive de ses parties et non du respect de règles posées à l'avance. Il a tenté d'instaurer ce qu'on appelle une *mathématique intuitionniste*, qui aurait eu pour conséquence le rejet de la théorie des ensembles et de toute une partie de l'algèbre moderne. La critique intuitionniste, exposée sous une forme logique par Heyting, n'a pas été retenue, mais elle a eu le mérite d'être perspicace, et d'imposer aux mathématiciens de réfléchir davantage sur les fondements de leur science.

La métamathématique.

Après cet ouragan, il fallait bien choisir une voie sûre. Le plus « poincariste » des mathématiciens n'aurait pas accepté, en 1930, d'abandonner la théorie des ensembles sous le seul prétexte qu'il existait « aux confins de l'empire des mathématiques », comme le disait Weyl, des ensembles paradoxaux. La théorie rendait, quotidiennement, trop de services à l'analyse pour être mise en réserve. Pour sauvegarder l'édifice des mathématiques classiques, ce mathématicien était prêt à faire quelque entorse à son anti-formalisme. Après tout, il était toujours possible de se « raccrocher » au modèle arithmétique. Les mathématiciens ont donc « oublié » l'intuitionnisme et sont retournés à leurs théories, en acceptant, bon gré mal gré, d'en limiter parfois la portée.

● *Mais l'arithmétique est-elle une planche de salut solide ?* Ne risque-t-on pas, en l'approfondissant, d'y découvrir des contradictions qui feront sauter le dernier refuge de notre raison ? C'est pour résoudre ce problème de la *non-contradiction de l'arithmétique* que Hilbert a développé une théorie qu'on appelle la *métamathématique*, dont on comprendra le rôle en examinant *l'escalade logique* suivante :

— *Première étape :* la géométrie euclidienne, partant de principes traduisant en langage axiomatique l'expérience spatiale de tout un chacun, aboutit à un ensemble de propositions qu'on peut appeler, au sens large, une *théorie* ; nous l'appellerons *Théorie GE* (G pour Géométrie, E pour Euclide).

— *Deuxième étape :* Lobačevskij, Bolyaï, Riemann découvrent qu'on peut raisonner en géométrie sans tenir compte de l'axiome d'Euclide (appelé autrefois « postulat des parallèles ») ; à partir d'un ensemble de principes excluant cet axiome, ils construisent les géométries non-euclidiennes, que nous noterons *Théorie GNE*.

— *Troisième étape :* comment être certain que *Théorie GNE* ne contient pas, en germe, quelque contradiction ? La réponse à cette question a été donnée par Beltrami (1868) : *Théorie GNE* est la traduction, en diverses langues géométriques, de *Théorie GE* ; il suffit donc de s'assurer de la non-contradiction de *Théorie GE*.

— *Quatrième étape :* depuis Descartes, on sait que toutes les propositions constituant *Théorie GE* peuvent être exprimées sous une forme analytique (algébrique). La non-contradiction de *Théorie GE* est donc assurée par la non-contradiction de l'analyse.

— *Cinquième étape :* mais l'analyse, en y incluant la théorie des ensembles, s'est révélée contradictoire à partir de 1897, ce qui invalide, en principe, toutes les étapes précédentes, *sauf si l'on accepte de limiter la théorie des ensembles* par une axiomatique convenable.

— *Sixième étape :* l'analyse, même exposée comme un système formel *S*, ne peut renvoyer à un autre système qui en serait le modèle, comme *Théorie GE* était le modèle de *Théorie GNE*. On doit donc renoncer à prouver sa non-contradiction par le moyen d'un modèle.

● *La méthode proposée par Hilbert* est la suivante : une théorie mathématique est cohérente si elle est *libérée de la contradiction*. Pour s'assurer de cela, il faut établir la liste : 1° de toutes les propositions (axiomes ou théorèmes) constituant la théorie ; 2° de toutes les propositions de la logique (principes et règles de raisonnement) utilisées par la théorie. Cela fait, il faut montrer qu'aucune déduction n'aboutit à deux théorèmes dont l'un serait la négation de l'autre.

Autrement dit, il s'agit d'examiner l'*aspect formel* du système *S*, indépendamment de son contenu (de sa signification), et de faire de ces formes l'objet d'une *métathéorie* (*méta* = « après »), qu'on appellera une *métamathématique* si *S* est un système mathématique ; cette métamathématique est une *théorie de la preuve*.

Une étude de la métamathématique dépasserait le cadre de ce livre. Retenons-en simplement quelques problèmes importants :

— le problème de l'*indépendance* des propositions constituant un système d'axiomes ;

— le problème de la *catégoricité* d'une théorie (une théorie est dite *catégorique* si, pour toute proposition *p* de cette théorie, l'une des deux propositions *p* ou non-*p* est un théorème de cette théorie). Ce problème a conduit à des solutions négatives (Gödel), c'est-à-dire qu'on a essentiellement démontré que certaines théories *n'étaient pas* catégoriques.

— Le problème de la *décision* rejoint les préoccupations de Leibniz à propos de la Caractéristique (langage logique) universelle. Voici comment N. Bourbaki l'énonce :

> *« ... Il s'agit de savoir si, pour un langage formalisé donné, on peut imaginer un « procédé universel » quasi mécanique qui, appliqué à n'importe quelle relation du formalisme considéré, indique... si cette relation est vraie ou non »* (N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Hermann, Paris, 1970, E.IV.75).

Le dernier mot semble être revenu (provisoirement) à Gödel ; il a démontré (théorème de Gödel) en 1931 : 1° que l'arithmétique est non catégorique ; 2° qu'il est impossible de prouver par la *méthode hilbertienne* la non-contradiction de toute théorie contenant l'arithmétique.

Une démonstration, par une méthode non hilbertienne, de la non-contradiction de l'arithmétique formalisée a été donnée en 1936 par Gentzen.

● *Est-ce là un échec ?* Doit-on conclure que la non-contradiction ne se démontre pas, mais qu'elle se constate, et que les métamathématiques ne font pas partie intégrante des mathématiques ? Peut-être. Mais ce n'est pas là une raison suffisante pour renoncer à tout exposé logique et formaliste du savoir mathématique, puisque le formalisme est, en dernière analyse, un moindre mal. Prenant, *dans une certaine mesure*, le contre-pied des thèses de Poincaré (mort en 1912), l'école mathématique française a entrepris, à partir des années 20, un vaste programme de recherches et d'expositions formelles, qui ont été publiées sous le *nom collectif* de Nicolas Bourbaki.

NOTIONS FONDAMENTALES SUR LA THÉORIE DES ENSEMBLES.

Définition et opérations sur les ensembles.

Les ensembles.

● *Au sens « naïf »*, c'est-à-dire sans se préoccuper de très difficiles problèmes de logique formelle, le mot « ensemble » est employé en mathématiques comme synonyme de « collection », « bande », « totalité », etc. Le mathématicien ne dit pas « une équipe de rugby », mais « un ensemble de joueurs de rugby » ; la « mafia » est « un ensemble de gangsters » ; le *Code civil* est un « ensemble de lois » ; la suite infinie des nombres entiers naturels est l'« ensemble des entiers naturels », etc.

Ce que nous venons de dire ne constitue pas une définition, au sens rigoureux, de la notion d'ensemble, mais une banale remarque de vocabulaire. Cantor s'en contentait et la définition formelle des ensembles est trop ardue et trop abstraite pour être signalée ici (voir N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Paris, Hermann, 1970).

● *Notation.* Un ensemble est noté par une lettre majuscule : A, B, C, ... En français, on emploie souvent la lettre E (initiale du mot « ensemble ») ; en anglais, la lettre S (initiale de *set* = « ensemble ») ; en allemand, la lettre M (initiale de *Menge* = « ensemble »).

Les *éléments* d'un ensemble sont désignés par des lettres minuscules : a, b, c, ... ; un élément quelconque, non spécifié, se désigne souvent par x.

Pour écrire qu'un objet est un élément d'un ensemble E, on utilise le signe « $\in$ », dont la négation est « $\notin$ » :

— $x \in E$, s'énonce « x appartient à E » ou « x est un élément de E » ;

— $x \notin E$ s'énonce « x n'appartient pas à E » ou « x n'est pas un élément de E ».

● *Ensemble vide.* Un ensemble qui ne contient aucun élément est appelé *ensemble vide* ; on le désigne par le symbole « $\varnothing$ ». Par exemple, l'ensemble des hommes immortels est l'ensemble vide $\varnothing$; l'ensemble des triangles à quatre côtés est l'ensemble vide $\varnothing$.

● *Ensembles finis.* Nous n'avons pas encore défini la notion de nombre naturel, mais elle est intuitivement connue de tous et nous allons nous en servir pour *compter* les éléments d'un ensemble. Ce comptage peut être réalisé avec exactitude dans certains cas : il y a neuf planètes dans le système solaire, il y a cinq nombres pairs inférieurs ou égaux à 10, il y a vingt-six lettres dans l'alphabet. Dans d'autres cas, il ne peut être qu'estimé : le nombre de grains de sable de la plage de Deauville est sans doute très grand, et il est impossible de l'établir exactement, mais c'est de toute façon un nombre *fini*.

Appelons donc a_1, a_2, ..., a_n les éléments d'un ensemble contenant un nombre n fini d'éléments, n étant connu avec rigueur ou estimé (lire « a-un », « a-deux », ... « a-n ») et E l'ensemble de ces éléments. Cet ensemble est dit *fini* et s'écrit :

$$E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}. \qquad (1)$$

● *Ensembles infinis.* En mathématiques, nous rencontrerons des ensembles dont les éléments ne sont pas en nombres finis : l'ensemble des nombres entiers, l'ensemble des points d'une droite, sont des exemples d'*ensembles infinis*. Le traitement de ces ensembles pose des problèmes délicats, qui seront examinés plus loin.

● *Description d'un ensemble.* Pour définir un ensemble particulier, on peut utiliser plusieurs procédés, nous en retiendrons deux :

1 - la façon la plus simple est d'énumérer tous ces éléments, par exemple :

$$E = \{2, 4, 6, 8, 10\}; \qquad (2)$$

$$F = \{1, 2, 3\}; \qquad (3)$$

2 - on peut aussi énoncer la/les propriétés caractéristiques des éléments de l'ensemble considéré, ainsi l'ensemble E ci-dessus est l'ensemble des nombres pairs inférieurs ou égaux à 10, et peut se décrire par :

$$E = \{x \text{ entier, pair et} \leqslant 10\}. \qquad (4)$$

Quant à l'ensemble F, c'est l'ensemble des entiers dont le carré est inférieur à 16, donc :

$$F = \{x \text{ entier} \mid x^2 < 16\}. \qquad (5)$$

Bien entendu, nous rencontrerons en mathématiques des ensembles plus compliqués que les deux ensembles E et F qui viennent d'être définis : l'ensemble des racines d'une équation du n-ième degré, l'ensemble des entiers x, y, z qui vérifient la relation $x^n + y^n = z^n$, l'ensemble des fonctions d'une variable réelle, etc. L'étude des propriétés de ces ensembles peut occuper plusieurs vies de mathématiciens !

Ensembles et sous-ensembles.

● *Notion de sous-ensemble.* Soit E un ensemble, défini de quelque manière que l'on voudra, et X un ensemble dont tous les éléments appartiennent à E : on dit alors que X est un *sous-ensemble* de E.

Exemple : soit E l'ensemble des entiers naturels :

$$E = \{1, 2, 3, ...\} \qquad (6)$$

et soit X l'ensemble défini par :

$$X = \{\text{entiers multiples de } 3 < 435\}. \qquad (7)$$

Nous dirons que X est un sous-ensemble de E, car tous ses éléments appartiennent aussi à E. De même $X = \{$les triangles$\}$ est un sous-ensemble de $E = \{$les polygones$\}$; $X = \{$les Mammifères$\}$ est un sous-ensemble de $E = \{$les Vertébrés$\}$; etc.

● *Inclusion stricte.* Si X est un sous-ensemble de E *différent* de E, on dit qu'il est *strictement inclus* dans E et l'on écrit :

$X \subset E$ (« X est strictement inclus dans E »)

ou $E \supset X$ (« E contient strictement X »).

● *Inclusion.* Si X est un sous-ensemble de E, mais si l'on ne précise pas qu'il doit être différent de E, on ne parle pas d'inclusion stricte, mais simplement d'*inclusion*. On écrit alors :

$X \subseteq E$ (« X est inclus dans E)

ou $E \supseteq X$ (« E contient X »).

● *Remarques* :

1 - La négation de l'inclusion, stricte ou générale, est marquée par le symbole « $\not\subset$ » ou « $\not\subseteq$ » ;

2 - Certains auteurs emploient, pour l'inclusion ($\subseteq$) le symbole de l'inclusion stricte ($\subset$) : ce procédé est à déconseiller.

3 - On s'aide parfois de schémas pour représenter des ensembles (*diagrammes de Venn*). Ainsi l'inclusion stricte $B \subset A$ se représente par le schéma de la figure ci-dessous.

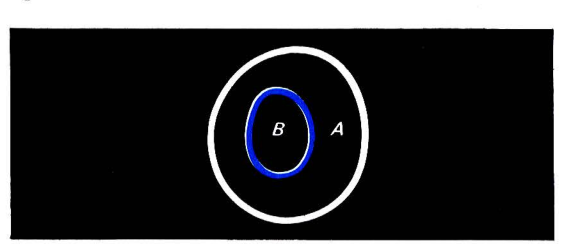


Diagramme de Venn représentant l'inclusion stricte $B \subset A$. Chaque ensemble, A ou B, est représenté par une surface au contour fermé.

4 - Un procédé courant pour définir un sous-ensemble X d'un ensemble E consiste à définir X comme l'ensemble des éléments x appartenant à E et possédant la propriété P. On écrit alors, conventionnellement :

$$X = \{x \in E \mid P(x) \text{ vraie}\}, \qquad (8)$$

le symbole $P(x)$ se lisant « x possède la propriété P ».

Partition d'un ensemble.

Étant donné un ensemble E, on peut classer tous les éléments de cet ensemble en sous-ensembles de E ; cette opération s'appelle partition de l'ensemble E. L'ensemble de tous les sous-ensembles est nommé *ensemble des parties* ou encore *booléen* de E (par référence au mathématicien britannique George Boole). On le désigne par le symbole $\mathfrak{P}(E)$ ou $\mathcal{P}(E)$.

Un exemple concret va nous faire comprendre le processus de partition d'un ensemble. Supposons qu'un cuisinier nous demande ce que nous désirons comme menu pour un dîner, sachant qu'il peut nous offrir trois plats que nous désignerons, pour simplifier les explications ultérieures, par les lettres a, b et c : des huîtres (a), un civet de lièvre (b) et un sorbet (c). Il nous propose donc l'ensemble des plats $E = \{a, b, c\}$ et nous prie d'écrire sur un carton le menu désiré. Examinons toutes les possibilités. Nous pouvons décider :

1 - soit de ne rien manger : nous n'inscrivons rien sur notre carton, qui figurera, par conséquent, la *partie vide* de E, c'est-à-dire le sous ensemble $\{\varnothing\}$;

2 - soit de ne manger qu'un seul plat : nous inscrirons donc « huîtres » sur un carton, « civet de lièvre » sur un autre et « sorbet » sur un troisième ; chacun de ces trois cartons figurera les sous-ensembles $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, qu'on appelle des *singletons* car ils sont réduits à un seul élément, a, b, ou c ;

3 - soit de faire honneur à deux plats, d'où les sous-ensembles $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$;

4 - soit enfin de choisir le menu complet, c'est-à-dire l'ensemble *plein* $\{a, b, c\}$.

En résumé, l'ensemble E comprend les parties suivantes :

$$\{\varnothing\}$$
$$\{a\}\ \{b\}\ \{c\}$$
$$\{a, b\}\ \{a, c\}\ \{b, c\}$$
$$\{a, b, c\}.$$

L'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ de ces huit sous-ensembles constitue l'*ensemble des parties* de l'ensemble E.

● *Plus généralement*, si E est un ensemble fini contenant n éléments :

$$E = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \qquad (9)$$

l'ensemble des parties $\mathfrak{P}(E)$ est composé de l'ensemble vide $\varnothing$, des n sous-ensembles $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, ..., $\{a_n\}$ à un élément, des sous-ensembles à deux éléments distincts, à trois éléments distincts, etc., et de l'ensemble E lui-même, à n éléments. On montre que le nombre de sous-ensembles contenus dans E, c'est-à-dire le nombre d'éléments de l'ensemble des parties $\mathfrak{P}(E)$ est alors égal à 2^n.

Opérations sur les ensembles.

Les ensembles sont des êtres mathématiques sur lesquels on peut faire trois opérations fondamentales, appelées *réunion, intersection* et *complémentation*. Les règles de calcul permettant l'utilisation de ces opérations ont été notamment étudiées par A. De Morgan.

● *Égalité.* Deux ensembles sont égaux, si tout élément de chacun d'eux est élément de l'autre.

● *Réunion.* Soit A, B, C, ... des ensembles ; l'ensemble S dont chaque élément appartient à l'*un au moins* des ensembles A, B, C, ... est la *réunion* de ces ensembles. Cette opération est désignée par le symbole « $\cup$ » ; on écrit donc, dans le cas de la réunion de deux ensembles A et B par exemple :

$$S = A \cup B \qquad (10)$$

(lire : « $S = A$ union B »). La réunion de deux ensembles est encore appelée *somme logique* de deux ensembles.

Par exemple, si l'on pose :

$$A = \{\text{entiers naturels multiples de } 3\} = \{3, 6, 9, ...\} \qquad (11)$$

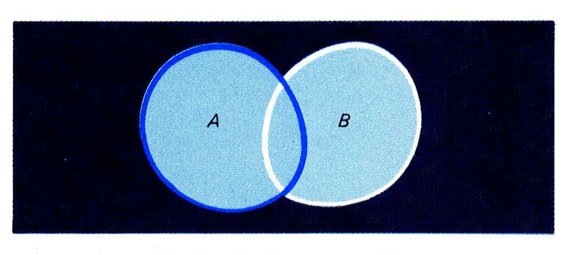
et

$$B = \{\text{entiers naturels multiples de } 7\} = \{7, 14, 21, ...\} \qquad (12)$$

on a :

$$S = A \cup B = \{\text{entiers naturels multiples de 3 ou de } 7\}. \qquad (13)$$

On peut figurer l'opération de la réunion à l'aide d'un diagramme de Venn, comme ci-dessous.



Réunion de deux ensembles. L'ensemble $S = A \cup B$ est représenté par la totalité de la surface bleue.

● *Intersection.* On appelle intersection de deux (ou de plusieurs) ensembles A et B (ou A, B, C, ...) l'ensemble des éléments appartenant à *chacun* des ensembles donnés. Cette opération, qui est aussi appelée *produit logique* (ne pas la confondre avec le *produit cartésien*, qui sera défini p. 22) est notée par le symbole « $\cap$ », et l'on écrit :

$$E = A \cap B \qquad (14)$$

(lire : « $E = A$ *inter* B »).

OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES

Par exemple les deux ensembles finis :

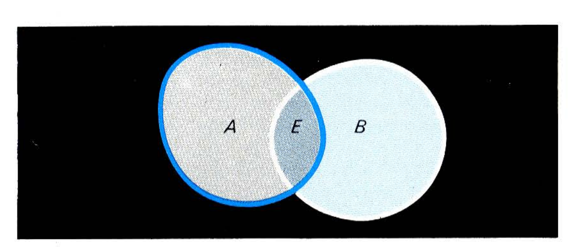
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 50\}$$
$$B = \{5, 10, 15, ..., 95, 100\} \qquad (15)$$

ont pour intersection :

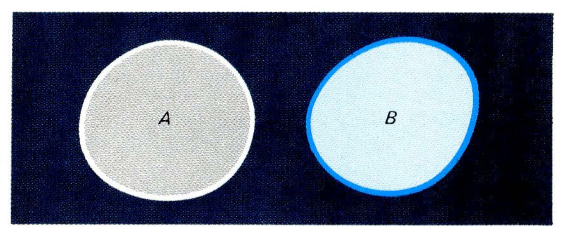
$$E = A \cap B = \{5, 10, 15, 20, ..., 45, 50\}. \qquad (16)$$

L'intersection peut aussi se représenter par un diagramme de Venn (voir figure ci-dessous). L'ensemble E (en gris foncé) est l'intersection des deux ensembles A et B.

Si l'intersection $A \cap B$ est un ensemble vide $\varnothing$, A et B sont dits *disjoints*. Par exemple l'intersection des ensembles $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{4, 5, 6\}$ est l'ensemble vide $\varnothing$ (A et B n'ont aucun élément commun) : les ensembles A et B sont dits disjoints.



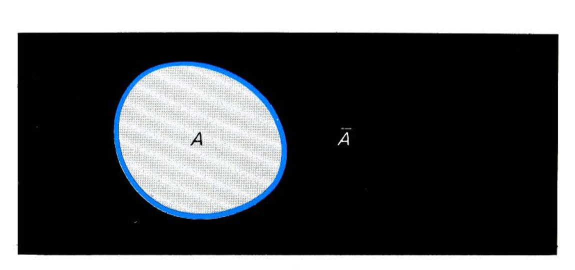
Intersection de deux ensembles.* L'ensemble $E = A \cap B$ *est représenté par la surface foncée centrale.



***Représentation de deux ensembles disjoints* A *et* B.**

● *Trace d'un ensemble sur un autre.* Soit une partie déterminée A d'un ensemble E, et X une autre partie de E, mais arbitraire ; on appelle *trace* de X sur A l'ensemble $A \cap X$. On considère cette trace comme une partie de A.

● *Complémentation.* Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. Considérons un élément x de E possédant la propriété « $x \in A$ » ; l'ensemble des éléments possédant cette propriété est évidemment A. Les éléments de E qui ne possèdent pas cette propriété, c'est-à-dire qui possèdent la propriété « $x \notin A$ » constituent un ensemble appelé *complémentaire* de A dans E. On le note $E - A$ ou $\complement A$ ou $\bar{A}$. Par exemple : l'ensemble des Parisiens est un sous-ensemble de l'ensemble des Français ; l'ensemble des Français non parisiens est le complémentaire de l'ensemble des Parisiens. La figure ci-dessous est une image (diagramme de Venn) correspondant à la notion d'ensemble complémentaire d'un autre ensemble.



E est représenté par le rectangle noir tout entier. A n'est autre que la partie grisée du rectangle ; le complémentaire de A dans E est l'ensemble $\bar{A}$.

● *Règles fondamentales de calcul.* Les opérations symbolisées par $\cup$, $\cap$ et $\complement$ ainsi que les relations d'égalité et d'inclusion, symbolisées par les signes « $=$ » et « $\subset$ » ou « $\subseteq$ » permettent de calculer sur les ensembles à condition de respecter certaines règles, énoncées dans le tableau ci-après, dans lequel nous avons introduit en outre le symbole « $\Leftrightarrow$ » qui signifie « est équivalent à ».

N°	Proposition	Commentaire
1	$\varnothing = \complement E$ $E = \complement \varnothing$	Résulte de la définition de la complémentation : les éléments de l'ensemble E qui ne sont pas contenus dans E forment évidemment un ensemble vide ; de même E contient tous les éléments qui n'appartiennent pas à l'ensemble vide.
2	$\complement(\complement A) = A$	Le complémentaire du complémentaire d'un ensemble redonne cet ensemble. Par exemple en prenant comme référentiel l'ensemble E des nombres entiers naturels, et en appelant A l'ensemble des *pairs*, $\complement A$ est l'ensemble des impairs, et $\complement(\complement A)$ est l'ensemble des pairs.
3	$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$	La proposition n° 3 exprime l'*idempotence* de la réunion et de l'intersection.
4	$A \cup (\complement A) = E, \quad A \cap (\complement A) = \varnothing$	
5	$A \cup \varnothing = A, \quad A \cap E = A$	
6	$A \cup E = E, \quad A \cap \varnothing = \varnothing$	
7	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Les opérations de réunion et d'intersection sont *commutatives* : leur résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on considère les ensembles sur lesquels on opère.
8	$A \subset (A \cup B), (A \cap B) \subset A$	A est inclus dans l'ensemble formé par la réunion des ensembles A et B ; l'intersection $A \cap B$ est incluse dans A.
9	$\complement(A \cup B) = (\complement A) \cap (\complement B)$ $\complement(A \cap B) = (\complement A) \cup (\complement B)$	Le complémentaire de l'union est l'intersection des complémentaires ; le complémentaire de l'intersection est l'union des complémentaires.
10	$A \subset B \Leftrightarrow \complement A \supset \complement B \Leftrightarrow A \cup B = B$ $\Leftrightarrow A \cap B = A$	
11	$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subset \complement B \Leftrightarrow B \subset \complement A$	
12	$A \cup B = E \Leftrightarrow \complement A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset A$	
13	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $= A \cup B \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$	Ces relations expriment l'*associativité* des opérations de réunion et d'intersection ; pour unir A à l'ensemble constitué par l'union de B et C, on peut donc faire d'abord l'opération de réunion de A et B, et réunir C au résultat.
14	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Ces relations expriment la *distributivité* de la réunion par rapport à l'intersection, et celle de l'intersection par rapport à la réunion. Comparer avec la propriété bien connue du *produit* en algèbre élémentaire, qui est distributif par rapport à la somme.
15	$(A \subset B)$ entraîne les relations $(A \cup C) \subset (B \cup C)$ et $(A \cap C) \subset (B \cap C)$	Cette proposition permet de modifier les deux termes d'une inclusion, tout comme, en algèbre élémentaire, on peut ajouter ou soustraire une même quantité des deux membres d'une égalité.
16	$(C \subset A$ et $C \subset B) \Leftrightarrow [C \subset (A \cap B)]$ $(A \subset C$ et $B \subset C) \Leftrightarrow [A \cup (B \subset C)]$	

***Règles fondamentales de calcul sur les ensembles.* (A *et* B *désignent des sous-ensembles de* E)**

Les relations.

Généralités.

Lorsque nous disons : « l'oisiveté est mère de tous les vices », nous établissons une *relation* entre le terme x = « oisiveté » et le terme y = « tous les vices » ; elle est exprimée par la locution « est mère de », qui possède un sens bien précis en français (il s'agit bien entendu, ici, de son sens figuré). Désignons cette relation par la lettre R ; nous écrirons la relation sous la forme de :

$$R\{x, y\}.$$

Voici un autre exemple de relation :

— x = un personnage historique ou légendaire (par exemple : Caïn) ;

— y = un autre personnage historique ou légendaire (par exemple : Abel) ;

— R = « est le frère de ».

La relation $R\{x, y\}$ est vraie pour des couples (x, y) d'éléments appartenant à l'ensemble E = {les personnages historiques ou légendaires} — comme (Caïn, Abel), (Napoléon Bonaparte, Joseph Bonaparte), (Romulus, Rémus) — mais elle est fausse pour des couples comme (Napoléon, Caïn), (Abel, Romulus), etc. : on dit qu'elle est *satisfaite* dans le premier cas, *non satisfaite* dans le second.

La relation R' = « est le père de » est satisfaite pour des couples (x, y) tels que (Louis XIII, Louis XIV), (Adam, Abel), (Adam, Caïn), (Napoléon, duc de Reichstadt), etc. ; mais, si nous y regardons de plus près, nous constatons qu'il existe une différence importante entre R et R' : on peut permuter x et y sans changer R, alors que cette permutation n'est pas possible pour R'. On a en effet, identiquement :

$$R\{\text{Caïn, Abel}\} = R\{\text{Abel, Caïn}\},$$

et non pas :

$$R'\{\text{Louis XIII, Louis XIV}\} = R'\{\text{Louis XIV, Louis XIII}\},$$

car, si « Louis XIII est le père de Louis XIV » est une proposition vraie, « Louis XIV est le père de Louis XIII » est une proposition fausse.

Ces premiers exemples nous montrent que toutes les relations n'ont pas les mêmes propriétés, et que, si nous voulons apprendre à calculer sur elles, c'est-à-dire à apprendre à les combiner, il nous faut d'abord décrire systématiquement leurs propriétés.

Propriétés des relations.

● *Réflexivité.* Une relation R est dite *réflexive* si et seulement si, quel que soit x dans le domaine où elle est définie, on a $R\{x, x\}$. Par exemple la relation R = « est diviseur de » est réflexive dans le domaine des entiers naturels, car on peut dire de tout entier x qu'il est un diviseur de lui-même :

$$R\{x, x\} = x \text{ est diviseur de } x. \qquad (1)$$

De même la relation symbolisée par le signe « $=$ » est réflexive, car on a évidemment, quel que soit le domaine choisi, $x = x$.

● *Symétrie.* Une relation R est dite *symétrique* si et seulement si, dans le domaine considéré, $R\{x, y\}$ entraîne $R\{y, x\}$. Par exemple la relation « est de la même famille que » est symétrique puisque « x est de la même famille que y » entraîne « y est de la même famille que x ». En revanche la relation « est diviseur de » n'est pas symétrique pour les entiers naturels, car « x est diviseur de y » n'implique pas « y est diviseur de x » (sauf si $x = y$).

● *Transitivité.* Une relation est dite transitive si, et seulement si, « $R\{x, y\}$ et $R\{y, z\}$ entraîne $R\{x, z\}$. Exemple : l'égalité (« $=$ »), le parallélisme (« $//$ »), « est diviseur de » sont des relations transitives, en effet :

$$« x = y, y = z » \Rightarrow x = z ;$$
$$« D \parallel D', D' \parallel D'' » \Rightarrow D \parallel D'' ; \qquad (2)$$
$$« x \text{ est diviseur de } y, y \text{ est diviseur de } z »$$
$$\Rightarrow « x \text{ est diviseur de } z ».$$

● *Antisymétrie.* Une relation binaire est dite

antisymétrique si et seulement si, « $R\{x, y\}$ et $R\{y, x\}$ » entraîne $x = y$.

● *Quantificateurs.* Soit $R\{x, y\}$ une relation ; on peut préciser son champ d'application en disant qu'elle est vraie *quel que soit* x, par exemple, ou bien qu'il existe *au moins un* x tel qu'elle soit vraie. Dans le premier cas, on écrit :

$$(\forall x)\ R\{x, y\}$$

et dans le second cas :

$$(\exists x)\ R\{x, y\}.$$

Les symboles « ∀ » et « ∃ » sont appelés respectivement *quantificateur universel* et *quantificateur existentiel* ; et le premier se lit « pour tout » ou « quel que soit » et le second se lit : « il existe ... tel que » or « il existe au moins un ... tel que ».

Relations d'équivalence.

● *Définition.* Une relation binaire $\mathscr{E}$ qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive est appelée *relation d'équivalence* ; on peut l'écrire, comme toute relation, $\mathscr{E}\{x, y\}$, mais aussi, si l'on veut souligner son caractère :

$$x \equiv y \pmod{\mathscr{E}},$$

qui se lit des trois façons suivantes :

— x congru à y *modulo* (= selon le mode) $\mathscr{E}$,
— x équivalent à y *modulo* $\mathscr{E}$,
— x équivalent à y (quand il n'y a pas de confusion possible).

● *Exemples.*

1 - Soit $\mathscr{E}$ = « est parallèle à », et l'ensemble des droites appartenant à un même plan (c'est-à-dire, par exemple, l'ensemble de toutes les droites qu'on peut tracer sur une feuille de papier supposée indéfiniment prolongée dans toutes les directions ; on dit souvent, en géometrie : « coplanaires ») ; (x, y) désignant un couple quelconque de droites de l'ensemble, et la relation « être parallèle à » signifiant, pour deux éléments tels que x et y : « n'avoir aucun point commun ou être confondues ».

La relation $\mathscr{E}\{x, y\}$ est réflexive ($\mathscr{E}\{x, x\}$ est satisfaite pour tout x, puisqu'une droite est toujours confondue avec elle-même), symétrique (si x est parallèle à y, alors y est parallèle à x), et transitive (si x est parallèle à y et si y est parallèle à z, alors x est parallèle à z) ; il s'agit donc d'une relation d'équivalence et l'on peut écrire :

$$x \equiv y \pmod{\mathscr{E}}.$$

2 - Soit dans l'ensemble ℕ (les entiers naturels et le zéro) la relation $\mathscr{E}$ = « la division de x par 3 donne le même reste que la division de y par 3 » ; est-ce une relation d'équivalence ?

Assurons-nous d'abord que nous avons bien compris la relation proposée. Soit x un entier naturel, par exemple 19 ; la division 19 : 3 donne comme quotient 6 et comme reste 1. Soit y un autre nombre entier, par exemple $y = 20$; la division 20 : 3 donne pour quotient 6 et pour reste 2. Donc le couple $(x, y) = (19, 20)$ ne vérifie pas la relation considérée. Soit maintenant $y = 22$; la division 22 : 3 donne pour quotient 7 et pour reste 1 : le couple $(x, y) = (19, 22)$ vérifie $\mathscr{E}$. Et ainsi de suite.

La relation $\mathscr{E}\{x, y\}$ est réflexive, car il est bien évident que « la division de x par 3 donne le même reste que la division de x par 3 » ; elle est symétrique, car on peut aussi dire que « la division de y par 3 donne le même reste que la division de x par 3 » ; elle est transitive, car, si x et y donnent le même reste dans une division par 3 et si y et z donnent le même reste dans une division par 3, alors x et z donnent le même reste dans une division par 3 (si 1 est le reste pour x et y et si 1 est le reste pour y et z, alors 1 est le reste pour x et z ; même raisonnement avec un reste égal à 2). Conclusion : la relation $\mathscr{E}$ est une relation d'équivalence et l'on peut écrire :

$$x \equiv y \pmod{\mathscr{E}}.$$

3 - Soit dans l'ensemble ℤ des entiers relatifs (entiers positifs et négatifs et 0) la relation :

$$x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z},\ \mathscr{E}\{x, y\} = \text{« } x - y \text{ est divisible par 3 »}.$$

Cette relation est réflexive ($x - x = 0$ et 0 est divisible par n'importe quel nombre), symétrique (puisque le calcul algébrique élémentaire nous permet d'écrire : $x - y$ = multiple de $3 = 3a \Rightarrow y - x = -3a$ = multiple de 3) et transitive, puisque, si l'on a :

$$x - y = 3a \quad \text{et} \quad y - z = 3b,$$

on a aussi (par addition membre à membre des deux égalités), $x - z = 3a + 3b$.

Donc on peut écrire :

$$x \equiv y \pmod{\mathscr{E}}.$$

● *Remarques* :

— La relation d'équivalence est une généralisation formelle de la relation d'égalité, et, réciproquement, on peut souvent considérer une égalité comme une « équivalence contractée ». Par exemple, les deux fractions 3/4 et 6/8 ne sont pas représentées par des symboles *identiques* ; nous n'avons donc pas le droit de dire que ces symboles sont *égaux*. Mais les nombres fractionnaires qu'ils traduisent sont *égaux* : on dira que ce sont deux symboles équivalents.

● *Classe d'équivalence.* Considérons maintenant un ensemble E muni d'une relation d'équivalence (c'est-à-dire tel qu'on a pu définir une relation d'équivalence entre deux de ses éléments x et y). Soit a un des éléments de E ; on peut lui associer un certain nombre d'éléments a_1, a_2, ... tels que

$$a_1 \equiv a, \quad a_2 \equiv a, \ldots \pmod{\mathscr{E}}.$$

L'ensemble des éléments tels que a_1, a_2, etc., est une partie de E qu'on appelle *classe d'équivalence* de a et qu'on désigne par $C(a)$.

Exemple : Soit x et y deux entiers relatifs et la relation « $x - y$ est divisible par 3 » (voir § *c*, exemple n° 3), qui est une relation d'équivalence ; soit le nombre $x = 3$; on vérifie aisément que les valeurs suivantes de y satisfont à la relation considérée :

$$\ldots, y = -15, y = -12 \ldots y = 3, y = 6, y = 9, \ldots$$

Tous ces nombres sont équivalents à 3 pour la relation considérée ; leur ensemble forme la classe d'équivalence $C(3)$; on démontre facilement, en algèbre élémentaire, que ce sont les multiples entiers, positifs ou négatifs, de 3 et le nombre 0. Soit ensuite le nombre $x = 2$; les nombres y tels que $2 - y$ soit divisible par 3 sont :

$$\ldots y = -16, y = -13, \ldots y = 2, y = 5, y = 8, \ldots$$

et l'on démontrerait tout aussi facilement que leur ensemble, qui constitue la classe $C(2)$, est formé de multiples de 3 diminués d'une unité (par exemple $-16 = -15 - 1$, etc.). Enfin la classe $C(1)$ est composée des multiples de 3 augmentés de 1 (-14, -11, et ainsi de suite).

Cet exemple nous conduit à la remarque suivante : un nombre entier relatif quelconque est, soit un multiple de 3, soit un multiple de 3 moins 1, soit un multiple de 3 plus 1 ; donc les trois classes d'équivalence que nous avons trouvées, $C(1)$, $C(2)$ et $C(3)$, sont les trois seules classes possibles dans ℤ.

● *Ensemble-quotient.* D'une manière générale, on démontre qu'une relation d'équivalence $\mathscr{E}$, définie sur un ensemble E, détermine une partition de E en classes d'équivalence, et que, réciproquement, toute partition de E définit sur E une relation d'équivalence $\mathscr{E}$. L'ensemble des classes d'équivalence déterminées sur E par la relation $\mathscr{E}$ s'appelle l'*ensemble-quotient* de E par $\mathscr{E}$; on le note $E/\mathscr{E}$. Si l'on a, sur E, $a \equiv b \pmod{\mathscr{E}}$, on a $C(a) = C(b)$ dans l'ensemble-quotient $E/\mathscr{E}$.

Relations d'ordre.

● *Définition.* Une relation binaire est appelée *relation d'ordre* lorsqu'elle est réflexive, transitive et antisymétrique. Appelons $\omega\{x, y\}$ une telle relation (« ω » est la dernière lettre de l'alphabet grec ; elle se lit « oméga »). En d'autres termes : la relation $\omega\{x, y\}$ entre deux éléments x et y appartenant à un ensemble E est une relation d'ordre dans E si elle est réflexive et si :

— « $\omega\{x, y\}$ et $\omega\{y, z\}$ » $\Rightarrow \omega\{x, z\}$ (transitivité) ;

— « $\omega\{x, y\}$ et $\omega\{y, x\}$ » $\Leftrightarrow x = y$ (antisymétrie).

Exemple : soit la relation « ≤ » définie dans l'ensemble ℕ des nombres entiers naturels et du zéro ; elle se lit « inférieur ou égal à » ; considérons deux nombres x et y appartenant à ℕ :

— la relation « $x \leq y$ et $y \leq z$ » entraîne « $x \leq z$ » (transitivité) ;
— la relation « $x \leq y$ et $y \leq x$ » entraîne « $x = y$ » (antisymétrie) ;
— en outre $x \leq x$ (réflexivité).

Conclusion : la relation « est inférieur ou égal à » est une relation d'ordre dans ℕ (on dit aussi que ℕ est ordonné selon cette relation).

Remarque : la relation « < », qui se lit « est strictement inférieur à » n'est pas une relation d'ordre, car elle n'est pas réflexive (elle interdit, dans ℕ, l'égalité $x = y$). La prise en considération de la réflexivité, dans une relation d'ordre, impose certaines précautions de vocabulaire, ce qui est bien le moins qu'on puisse exiger d'un logicien et d'un mathématicien ; par exemple, « est à la gauche de », en parlant des points d'une droite, est une relation d'ordre à condition qu'on admette que « x est à la gauche de x » signifie « x est confondu avec x ».

Il est fréquent, dans le langage mathématique actuel, de lire le symbole « ≤ » : « inférieur à » et le symbole « < » : « *strictement* inférieur à », le premier n'excluant pas l'égalité entre les deux termes qu'il relie. Nous nous conformerons, en général, à cet usage, nous réservant de préciser toutes les fois qu'il y aura une confusion possible (mais non inévitable...).

● *Notation.* Dans un ensemble E quelconque, on note souvent une relation d'ordre $\omega\{x, y\}$ par $x \leq y$. Le symbole « ≤ » se lit « inférieur ou égal à », mais il n'a pas nécessairement la signification usuelle (notamment si x et y ne sont pas des nombres).

● *Ordre total et ordre partiel.* Quand la relation d'ordre considérée relie deux termes *toujours* comparables par cette relation, l'ordre est dit *total.* C'est le cas de la relation « ≤ », puisque, dans ℕ, on a toujours :

— soit $a \leq b$;
— soit $b \leq a$;
— soit les deux relations à la fois si $a = b$.

Mais supposons, toujours en restant dans l'ensemble ℕ, que l'on considère la relation « est un diviseur de », notée par le symbole : « / ». On peut écrire 11/33 (11 est un diviseur de 33), mais non pas 11/34 : le couple (11, 34) n'est pas comparable — ni dans un sens, ni dans l'autre — par la relation « / ». Par contre, si l'on retient tous les couples (a, b) comparables par « / », on montre aisément qu'il s'agit d'une relation d'ordre, puisqu'elle est transitive, antisymétrique et réflexive : la relation « / » est dite d'ordre *partiel.*

Majorants et bornes d'un ensemble ordonné.

Les notions que nous allons maintenant définir seront reprises en *Analyse*, à propos de la théorie des fonctions.

● *Ensembles fermés et ensembles ouverts.* Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre total, que nous noterons « ≤ » ou « < », sans rien préjuger de la

Les concepts mathématiques sont des objets abstraits sur lesquels on ne peut que raisonner. Toutefois il est possible de donner une illustration naïve de certains d'entre eux. Ainsi, au triangle abstrait du géomètre, on peut faire correspondre l'image expérimentale de la forme triangulaire d'un morceau de papier, par exemple, ou d'un triangle dessiné. De même, la notion de majorant d'un ensemble ordonné peut être illustrée — avec toutes les réserves d'usage — par le document ci-dessous : la hauteur 3,25 m est un majorant pour l'ensemble des hauteurs de véhicules autorisés à circuler sous ce tunnel.

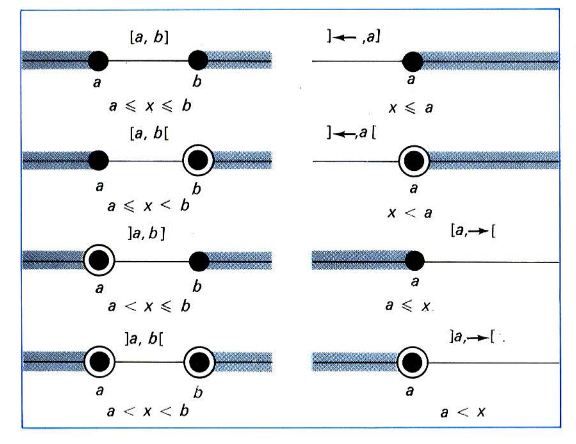


Ph. Jeanbor © Photeb/T.

nature des éléments composant cet ensemble (qui peuvent être des nombres, mais aussi les points d'une droite, les droites d'un plan, les éléments phonologiques d'une langue, etc.). Nous allons considérer une partie de l'ensemble E dont les éléments x sont ordonnés entre deux éléments a et b ; on l'appelle un *intervalle dans E.* Les différents cas possibles sont décrits dans le tableau ci-dessous :

Relation entre *a, b* et *x*	Caractère de l'intervalle considéré	Notation
$a \leqslant x \leqslant b$	Intervalle *fermé* d'origine a et d'extrémité b.	$[a, b]$
$a \leqslant x < b$	Intervalle *semi-ouvert à droite* d'origine a et d'extrémité b.	$[a, b[$
$a < x \leqslant b$	Intervalle *semi-ouvert à gauche* d'origine a et d'extrémité b.	$]a, b]$
$a < x < b$	Intervalle *ouvert* d'origine a et d'extrémité b.	$]a, b[$
$x \leqslant a$	Intervalle fermé *illimité à gauche*, d'extrémité a.	$]\leftarrow, a]$
$x < a$	Intervalle ouvert *illimité à gauche*, d'extrémité a.	$]\leftarrow, a[$
$a \leqslant x$	Intervalle fermé *illimité à droite*, d'origine a.	$[a, \rightarrow[$
$a < x$.	Intervalle ouvert *illimité à droite*, d'origine a.	$]a, \rightarrow[$
E	Intervalle ouvert *illimité dans les deux sens.*	$]\leftarrow, \rightarrow[$

Les nombres réels forment un ensemble ouvert, illimité dans les deux sens ; si a et b sont deux nombres réels, tels que a soit plus petit que b, et si x est lui-même un nombre réel, les définitions ci-dessus peuvent être illustrées facilement, en donnant aux relations « $\leqslant$ » et « $<$ » leur signification usuelle (« inférieur ou égal à » et « strictement inférieur à »). Si E est l'ensemble des points d'une droite (E), si a et b désignent deux points déterminés de cette droite, a étant à gauche de b, et si x est un point quelconque situé entre a et b, on a une image des intervalles désignés dans le tableau ci-dessus en donnant à « $\leqslant$ » le sens « à gauche de ou confondu avec » et à « $<$ » celui de « strictement à gauche de ». Graphiquement, on a les cas indiqués sur la figure ci-dessous.



Différents types d'intervalles.
La partie en grisé de la droite est exclue de l'intervalle considéré ; a et b ont été entourés d'un cercle quand ils ne font pas partie de l'intervalle (relation « < ») ; la partie de la droite qui n'est pas en grisé et, éventuellement, les points a et/ou b constituent l'intervalle considéré.

● *Majorant et minorant d'un ensemble.* Soit un ensemble E muni d'une relation d'ordre total, représentée par « $\leqslant$ » ; si entre deux éléments x et y de E on a la relation $x \leqslant y$, y est appelé un *majorant pour* x et, en renversant l'ordre, x est dit *minorant pour* y.

Si X est une partie de E telle que pour tout $x \in X$ on ait $x \leqslant y$, on dit que y est un *majorant* de X. Si l'ensemble de tous les majorants de X comprend un élément β plus petit que tous les autres, on démontre en théorie des ensembles que cet élément β est unique et on l'appelle *la borne supérieure* de X. En renversant l'ordre, on définit de la même façon *un minorant* pour X et *la borne inférieure* de X.

● *Exemples.*

1 - Soit l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et du zéro :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

et un sous-ensemble X de $\mathbb{N}$ défini par « les multiples de 2 inférieurs ou égaux à 10 », soit : $X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Un nombre tel que 11 (extérieur à l'ensemble X) est un majorant pour X, puisque pour tout x appartenant à X on a évidemment $x < 11$; il y a ainsi une infinité de majorants pour X, qui sont les entiers supérieurs ou égaux à 11. Considérant l'entier 10 : pour tout x appartenant à X on peut écrire $x \leqslant 10$; 10 est donc aussi un majorant pour X. Mais 10 est inférieur à 11, et à tous les autres majorants de X, comme 12, 13, ... : 10, plus petit que tous les autres majorants de X, est la *borne supérieure* de X (cette borne est contenue dans X). De même on montre aisément que 2 est la *borne inférieure* de X.

2 - Soit l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs) ; considérons le sous-ensemble X ayant pour éléments les nombres de la forme $x = 1 - k$, k étant un nombre rationnel positif (par exemple : $x = 1 - 1/2 = 1/2$; $x = 1 - 1 = 0$; $x = 1 - 5/3 = 2/3$; ...). Tous les éléments de X sont inférieurs à 1 (puisque x est égal à « 1 *moins* un nombre positif »), donc 1 est un majorant pour X ; de même, tout nombre rationnel supérieur à 1 est aussi un majorant pour X. D'autre part, tout rationnel inférieur à 1 appartient à X (puisque $1 - k$ peut prendre toute valeur rationnelle donnée inférieure à 1) ; donc 1, qui est le plus petit des majorants de X, est la borne supérieure de cet ensemble, qui, selon la terminologie indiquée plus haut, est ouvert à droite et illimité à gauche :

$$X =]\leftarrow, 1[\text{ (avec } x \text{ rationnel)}.$$

3 - Considérons, dans $\mathbb{Q}^+$ (ensemble des rationnels positifs), les nombres x tels que leur carré soit inférieur à 2 ; écrivons quelques-uns des éléments de cet ensemble, sous leur forme décimale :

x : 0... 0,5... 0,7... 1... 1,1... 1,4...
x^2 : 0... 0,25... 0,49... 1... 1,21... 1,96...
x : 1,41... 1,415...
x^2 : 1,988 1... 2,002 225...

On voit que 1,415 est un majorant pour X, puisque son carré est supérieur à 2, et qu'il en est ainsi de tout nombre rationnel supérieur à 1,415 ; mais il existe aussi des nombres inférieurs à 1,415 dont le carré soit inférieur à 2, et l'on sait qu'il n'en existe aucun dont le carré soit égal à 2. L'ensemble X, partie de $\mathbb{Q}^+$, admet bien une infinité de majorants, mais il n'admet pas de borne supérieure (par contre, si l'on avait étudié X dans l'ensemble des réels positifs, qui comprend les irrationnels, on aurait pu écrire qu'il admet $\sqrt{2}$ pour borne supérieure).

Remarque sur ces exemples : il est commode d'illustrer la notion de majorant ou de borne supérieure (respectivement : de minorant ou de borne inférieure) à l'aide d'exemples tirés de la théorie des nombres, c'est-à-dire de l'arithmétique ; mais le lecteur ne doit pas perdre de vue cette idée que la théorie des ensembles, telle qu'on l'expose de nos jours, n'est pas bâtie sur la théorie des nombres ou en vue de la justifier : elle peut être édifiée axiomatiquement, sans tenir compte de la nature des éléments des ensembles, et, à partir des résultats qu'elle fournit, on peut définir *en particulier* les ensembles des nombres arithmétiques et leurs propriétés.

Le théorème de Zermelo.

(Ne pas confondre avec l'*axiome* de Zermelo.)

Soit X une partie d'un ensemble E sur lequel on a défini une relation d'ordre total. Si, pour tout x appartenant à X, il existe un élément a de X tel que $a \leqslant x$, on dit que c'est *le plus petit élément de X.* On définit d'une façon analogue *le plus grand élément de X.* On montre que tout ensemble *fini* non vide contenu dans E possède un plus petit et un plus grand élément.

Étant donné maintenant un ensemble ordonné dans lequel toute partie non vide admet un plus petit élément : un tel ensemble est dit *bien ordonné* : c'est le cas de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs, sur lequel nous allons nous étendre un peu. Cet ensemble est fermé à gauche et illimité à droite, autrement dit, il possède un premier terme, mais il n'a pas de dernier terme :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\};$$

une partie quelconque de $\mathbb{N}$ comprend toujours un plus petit élément, mais elle ne possède pas nécessairement un plus grand élément. Par exemple le sous-ensemble $X = \{3$ et ses multiples$\}$ admet comme plus petit élément le nombre 3, mais il est illimité, car il n'existe pas de nombre qui soit le plus grand multiple de 3 ; par contre, le sous-ensemble $X' = \{3$ et ses multiples inférieurs à 100$\}$ admet un plus petit élément (3) et un plus grand élément (99). D'une manière générale : pour qu'une partie de $\mathbb{N}$ ait un plus grand élément, il faut et il suffit qu'elle soit *finie* et non vide.



Le mathématicien allemand Ernst Zermelo (1871-1953). Son fameux axiome de choix (1904) a alimenté une importante controverse entre les mathématiciens.

On démontre enfin que, sur tout ensemble, il existe une structure d'ensemble bien ordonné : ce résultat *important* constitue le *théorème de Zermelo.*

Puissance d'un ensemble.

Ensembles équipotents.

● *Définition.* Pour comparer le nombre d'éléments d'un ensemble fini A au nombre d'éléments d'un autre ensemble fini B, il existe une manière très simple de procéder, c'est de les compter. Nous dirons alors que A et B ont *même puissance* ou encore qu'ils sont *équipotents* s'ils contiennent le même nombre d'éléments. Ce nombre d'éléments s'appelle d'ailleurs, au sens large, le *cardinal* de l'ensemble considéré. Toutefois cette définition n'est pas applicable aux ensembles infinis, et il est bon de définir autrement l'équipotence de deux ensembles, sans passer par le comptage des éléments d'un ensemble. Considérons par exemple deux ensembles A et B, A étant un ensemble d'hommes et B un ensemble de femmes. Pour comparer la puissance de deux ensembles, on peut inviter les hommes et les femmes à se réunir par couples mixtes : on pourra ainsi constater, sans calcul, si A est équipotent à B.

Lorsqu'à tout élément a_i d'un ensemble A on fait correspondre un élément b_i d'un ensemble B, de sorte que tout élément de B correspond à un, et à un seulement, élément de l'ensemble A, on dit qu'il y a *correspondance biunivoque* entre les deux ensembles, et ceux-ci sont dits *équipotents.*

Soit par exemple l'ensemble des entiers naturels (sans le zéro), que l'on désigne habituellement par le symbole $\mathbb{N}^*$ (lire « $\mathbb{N}$ étoile »). Nous écrirons $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ et considérons l'ensemble des entiers négatifs $\{-1, -2, -3, \ldots\}$. A tout nombre a du premier ensemble, on peut faire correspondre le nombre $-a$ du deuxième ensemble, et cette correspondance est biunivoque : les deux ensembles sont donc équipotents :

$$1 \quad 2 \quad 3 \; . \; . \; . \; . \quad a \; . \; . \; .$$

$$-1 \; -2 \; -3 \; . \; . \; . \; . \; -a \; . \; . \; .$$

● *Propriétés de la relation d'équipotence.* Soit A et B deux ensembles équipotents, relation que nous écrirons $\mathscr{E}_q\{A, B\}$.

— Il est aisé de montrer que $\mathscr{E}_q\{A, B\}$ est une relation réflexive, symétrique et transitive, donc qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

— Si A et B sont équipotents, alors les ensem-

bles des parties correspondants $\mathfrak{P}(A)$ et $\mathfrak{P}(B)$ sont équipotents, ce qui s'écrit

$$\mathscr{E}_q\{A, B\} \Rightarrow \mathscr{E}_q\{\mathfrak{P}(A), \mathfrak{P}(B)\}. \qquad (1)$$

— Si A et B sont deux parties d'un ensemble E, la relation $\mathscr{E}_q\{A, B\}$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des parties $\mathfrak{P}(E)$; la classe d'équivalence selon cette relation à laquelle appartient A s'appelle *puissance* de A (l'identification courante « puissance de A = cardinal de A » est un abus de langage toléré).

Ensembles dénombrables.

● *Définition.* L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}^*$ est infini : il est impossible de dire « il y a *tant* de nombres entiers ». Cet ensemble a des propriétés très remarquables, qui seront étudiées en temps utile ; nous allons nous en servir pour mesurer la puissance d'un ensemble quelconque à l'aide de la définition suivante : un ensemble est dit *dénombrable* s'il est équipotent à $\mathbb{N}^*$, c'est-à-dire, d'après les remarques du paragraphe précédent, si l'on peut apparier chacun de ses éléments avec un nombre entier, dans une correspondance biunivoque.

● *Exemples.*

— A chaque entier a on peut apparier un nombre $3a$ et construire ainsi l'ensemble des multiples de 3. Il est clair que la correspondance entre cet ensemble et l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est biunivoque : l'ensemble des multiples de 3 est donc dénombrable (on peut faire la même remarque pour les multiples de 2, les multiples de 5, etc.) :

$$\mathbb{N}^* = 1\ 2\ 3\ .\ .\ .\ .\ a\ .\ .\ .\ .$$

$$\text{multiples de } 3 = 3\ 6\ 9\ .\ .\ .\ .\ 3a\ .\ .\ .\ .$$

— L'ensemble des *entiers relatifs* (sans le zéro), communément désigné par le symbole $\mathbb{Z}^*$, comprend les entiers positifs et les entiers négatifs. Écrivons cet ensemble en l'appariant à l'ensemble $\mathbb{N}^*$ selon la règle suivante : chaque entier positif est apparié à un nombre impair dans $\mathbb{N}^*$ et chaque entier négatif à un nombre pair.

$$\mathbb{N}^*\{1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6 \ldots.$$

$$\mathbb{Z}^*\{1\quad -1\quad 2\quad -2\quad 3\quad -3 \ldots.$$

Il est clair, là aussi, que la correspondance est biunivoque : donc l'ensemble $\mathbb{Z}^*$ est dénombrable.

— On peut aussi démontrer les théorèmes suivants, qui complètent nos considérations sur les ensembles dénombrables.

1 - Tout sous-ensemble infini B d'un ensemble dénombrable A est lui-même dénombrable.

2 - La réunion d'une famille finie d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.

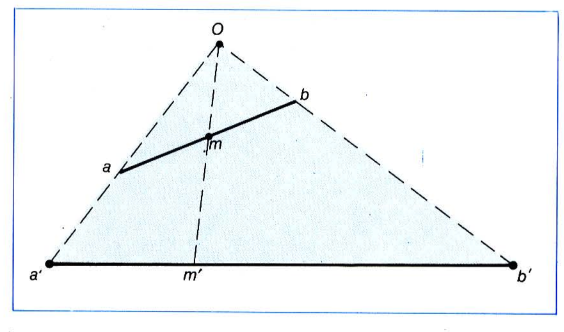
3 - La réunion d'une famille infinie dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.

4 - L'ensemble des rationnels a/b, a et b étant des entiers, est dénombrable.

● *L'aleph zéro.* Convenons de désigner par le symbole « $\aleph_0$ » (lire « *aleph zéro* » ; *aleph* est la première lettre de l'alphabet hébraïque) la puissance de l'ensemble $\mathbb{N}^*$. Ce symbole est appelé *premier nombre transfini cardinal.* La puissance de tout ensemble dénombrable est donc mesurée par le nombre transfini $\aleph_0$.

Puissance du continu.

● *Paradoxe de Galilée.* Considérons deux fragments de ligne droite : un segment « court » et un segment « long » (voir figure ci-après), et mettons en correspondance biunivoque les points de la « ligne longue » avec ceux de la « ligne courte ». Il est clair que chaque point m de celle-ci a son correspondant m' sur celle-là et réciproquement : les deux ensembles de points $[a, b]$ et $[a', b']$ ont la même puissance : il n'y a pas « plus » de points sur la ligne longue que sur la ligne courte. Ce paradoxe a été résolu pour la première fois par Dedekind, en 1872 : une ligne droite, dit-il, est plus riche en points individuels que ne l'est l'ensemble des nombres algébriques en nombres distincts. En d'autres termes : l'ensemble des points d'une ligne droite et l'ensemble des nombres réels sont équipotents. Ainsi le terme « réel » est justifié, il témoigne de la correspondance entre l'ensemble numérique considéré et un ensemble géométrique. Ainsi s'explique aussi que l'on désigne la puissance de l'ensemble des nombres réels par l'expression « puissance du continu ».



Paradoxe de Galilée.
***Il y a « autant » de points sur le segment** [a, b] **que sur le segment** [a', b'].*

● *Théorème de Cantor.* Considérons l'ensemble $\mathbb{R}$ de tous les nombres réels : ces nombres seront définis plus loin (voir p. 53), mais tous les collégiens savent les manipuler. Ils comprennent les nombres rationnels (entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs), les nombres irrationnels (comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... et les nombres dits *transcendants*, comme π ou e, base des logarithmes népériens). L'ensemble des réels est parfois appelé *droite numérique*, et chaque nombre réel est alors appelé un *point* sur cette droite. Cantor a démontré, en 1874, l'important théorème suivant :

L'ensemble des points de l'intervalle $0 \leq x \leq 1$ *est non dénombrable.*

● *Portée du théorème de Cantor.* Les nombres rationnels de l'intervalle $0 \leq x \leq 1$, c'est-à-dire le nombre 0, l'entier 1 et l'infinité de nombres fractionnaires compris entre 0 et 1, sont un sous-ensemble de l'ensemble des rationnels. Or nous avons dit (ci-dessus, § **C**, *b*, théorème n° 4) que l'ensemble des rationnels était dénombrable : il en résulte (d'après *b*, théorème n° 1) que le sous-ensemble de rationnels $0 \leq x \leq 1$ est dénombrable.

Par conséquent les nombres de l'intervalle $0 \leq x \leq 1$ peuvent être rangés en deux sous-ensembles, une fois démontré le théorème de Cantor :

— les rationnels, qui forment un sous-ensemble dénombrable ;

— un deuxième sous-ensemble, non dénombrable, que l'on appelle le sous-ensemble des irrationnels (si les irrationnels étaient dénombrables, l'ensemble $0 \leq x \leq 1$ serait dénombrable puisque composé de deux sous-ensembles dénombrables, ce qui serait en contradiction avec le résultat du théorème de Cantor).

Ajoutons qu'on peut répartir les irrationnels eux-mêmes en deux sous-ensembles :

1 - les irrationnels *algébriques*, qui sont les racines d'équations du *n*-ième degré à coefficients rationnels, et qui forment un ensemble dénombrable (selon un théorème que nous n'avons pas énoncé, mais que nous pouvons admettre ici) ;

2 - les irrationnels *non algébriques*, qui forment un ensemble non dénombrable et qu'on nomme *nombres transcendants* (en d'autres termes, le caractère non dénombrable des nombres réels provient de l'existence de nombres transcendants, puisque tous les autres espèces de réels sont dénombrables).

● *La puissance du continu.* La puissance de l'ensemble des points de l'intervalle $0 \leq x \leq 1$ est appelée *puissance du continu*. L'examen du paradoxe de Galilée nous fait comprendre que l'ensemble des réels x tel $0 \leq x \leq 1$ est équipotent à l'ensemble $\mathbb{R}$ de tous les réels, c'est-à-dire des réels tels que $-\infty < x < +\infty$ (la droite numérique), qui possède donc, lui aussi, la puissance du continu.

Nous avions appelé $\aleph_0$ la puissance de $\mathbb{N}^*$, l'aleph de l'ensemble $\mathbb{R}$ est donc différent de $\aleph_0$ et nous devons écrire :

$$\aleph \text{ de } \mathbb{R} > \aleph_0 .$$

● *Deux questions se posent alors :*

1 - Y a-t-il d'autres alephs que l'aleph zéro et l'aleph du continu ?

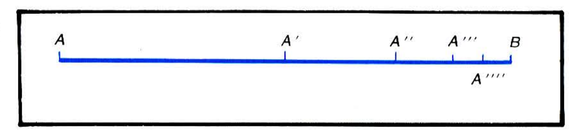
2 - Y a-t-il des alephs entre aleph zéro et l'aleph du continu ?

Ces questions, dont le traitement est indispensable si l'on veut faire progresser l'analyse et l'algèbre, sont loin d'avoir reçu à l'heure actuelle des réponses satisfaisantes.

Le transfini ordinal.

Considérons le problème suivant, qui fait songer aux problèmes de « trains qui se rencontrent » et de « bassins qui se vident » de l'arithmétique élémentaire.

Un piéton se dirige de A vers B (AB = 1 000 mètres) à la vitesse de 1 m/s (3,6 km/h). En même temps que lui un cycliste part de A ; il se déplace à la vitesse uniforme de 3 m/s (10,8 km/h). Lorsque le cycliste arrive en B, il fait un demi-tour instantané et se dirige vers A ; il rencontre le piéton en A', fait alors un nouveau demi-tour instantané, se dirige vers B, atteint B, retourne vers le piéton, qu'il rencontre en A'', et ainsi de suite jusqu'à ce que le piéton soit arrivé en B. On demande le chemin parcouru par le cycliste (bien entendu, pour raisonner dans l'abstrait, on considère que le piéton et le cycliste sont réduits à n'être que des points, que les « demi-tours » se font sans perdre la moindre fraction de seconde, etc.).



Le transfini.

Étudions en détail les premières étapes de ces déplacements.

— *1re rencontre.* Le cycliste va trois fois plus vite que le piéton ; comme ils partent en même temps de A, le cycliste arrive en B avant le piéton, fait demi-tour et rencontre son compagnon en A'. Appelons t le temps nécessaire pour accomplir ces déplacements, à savoir ABA' pour le cycliste, AA' pour le piéton. Si l'on pose $AA' = x$, le trajet $(AB + BA')$ représente $3x$ (puisque le cycliste a une vitesse trois fois supérieure à celle du piéton) ; les deux trajets réunis :

$$AA' + (AB + BA')$$

représentent deux fois la distance AB. On a donc

$$2\,AB = x + 3\,x = 4\,x , \qquad (2)$$

d'où

$$x = \frac{AB}{2} = 500 \text{ m} ; \qquad (3)$$

le cycliste a donc parcouru, dans cette première étape, 1 500 m.

— *2e rencontre.* Le piéton et le cycliste sont en A', le cycliste va vers B, revient et rencontre le piéton en A''. Le problème est le même que précédemment, mais pour un trajet $A'B$ = 500 m, *moitié* du trajet AB. D'où les réponses :

— trajet du piéton : 250 m ;

— trajet du cycliste : 750 m ;

— *3e, 4e, ..., n-ième rencontres.* Le problème se répète toujours dans les mêmes termes ; à chaque étape, le piéton et le cycliste accomplissent un trajet qui est égal à la moitié du précédent. On peut donc établir le double tableau de marche ci-dessous (en reprenant depuis le départ et en appelant a la distance AB) :

Tableau de marche du piéton et du cycliste.

Étapes	1e (A')	2e (A'')	3e (A''')	. . .	100e ($A^{(100)}$)		n e ($A^{(n)}$)
Chemin parcouru par le piéton (en mètres)	$500 = a \times \frac{1}{2}$	$250 = a \times \frac{1}{2^2}$	$125 = a \times \frac{1}{2^3}$	. . .	$a \times \frac{1}{2^{100}}$	. . .	$a \times \frac{1}{2^n}$
Chemin parcouru par le cycliste (en mètres)	$1\,500 = 3\,a \times \frac{1}{2}$	$750 = 3\,a \times \frac{1}{2^2}$	$375 = 3\,a \times \frac{1}{2^3}$	. . .	$3\,a \times \frac{1}{2^{100}}$	. . .	$3\,a \times \frac{1}{2^n}$

En principe, nous pouvons prolonger ce tableau indéfiniment et nous aurons :
Chemin parcouru par le piéton :

$$AB \times \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\right)=1\,000\text{ m}\,; \quad (4)$$

chemin parcouru par le cycliste :

$$3\,AB \times \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\right)=3\,000\text{ m} \quad (5)$$

Les termes de la somme entre parenthèses forment un ensemble infini dénombrable, puisque l'exposant n prend toutes les valeurs possibles de $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3 ...\}$; on dit qu'ils forment une série. Cependant, nous *savons* que le piéton arrivera en B, c'est-à-dire qu'il aura parcouru 1 000 m, et que le cycliste, *dans le même temps*, aura parcouru 3 000 m, puisqu'il se déplace trois fois plus vite. La série

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

prend, *à la limite* (notion sur laquelle nous reviendrons), la valeur 1 (on dit que c'est une *série convergente*).

● *Numérotation des instants.* Chaque terme de la série correspond à un *instant* dans la vie du cycliste. A l'instant 0 il était en A, à l'instant 1 en A', à l'instant 2 en A'', et ainsi de suite, sans qu'on puisse jamais s'arrêter. Mais, pourtant, le cycliste et le piéton finissent par se rencontrer en B : c'est une évidence ; quel « numéro » faut-il donner à l'instant de cette rencontre finale ? Si l'on utilise un nombre x de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, on pourra toujours évoquer l'existence d'un instant $(x+1)$ qui sera *postérieur* à x, et ainsi de suite.

Pour nommer l'instant « final », il faut utiliser un « nombre entier » qui soit supérieur à tous les entiers successifs ; un tel nombre ne peut être que fictif, bien entendu, et il est impossible de l'écrire avec les signes numériques habituels. Cantor a noté ce « nombre » à l'aide de la lettre grecque *oméga* : « ω ». Ce nombre ω :

1 - est *ordinal* : il désigne le *rang* d'un instant (le piéton et le cycliste se rencontrent au ω^e instant) ;

2 - est supérieur à tout nombre ordinal appartenant à $\mathbb{N}$ (cela signifie qu'il désigne un instant *ultérieur à tous* les instants numérotés à l'aide de $\mathbb{N}$) ;

3 - est le *premier* de son espèce, car, s'il existait un « nombre ω » avant ω, ce nombre désignerait, précisément, l'instant final.

On traduit ces trois remarques en disant que ω est le *premier nombre transfini ordinal* : « premier » traduit la propriété (3), « nombre ordinal » la propriété (1), transfini la propriété (2).

Résumons-nous : le *premier nombre transfini ordinal*, ω, est le rang de l'instant où le piéton et le cycliste se rencontrent en B. On peut ainsi dire — ce qui étend considérablement l'intérêt d'une notion telle que ω — : le *premier nombre transfini ordinal* est le rang du terme pour lequel une série convergente atteint sa limite.

Ce premier nombre transfini ordinal représente un *soulagement* pour l'esprit du mathématicien : « quand on fait la somme des termes d'une série convergente, on *convient* d'appeler ω-ième le terme — *qui ne sera jamais écrit* — celui pour lequel cette somme prend sa valeur limite.

Fonctions et graphes.

Notion générale de fonction.

● *Remarques historiques.* L'origine de l'idée classique de fonction apparaît chez Descartes, le créateur de la géométrie analytique : l'ordonnée y d'un point M d'une courbe C dépend de l'abscisse x de ce point. C'est Leibniz qui introduisit le mot « fonction » et Jean Bernoulli définit, en 1718, les fonctions d'une variable comme des :

> « *quantités composées de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes* ».

Euler introduit la notation :

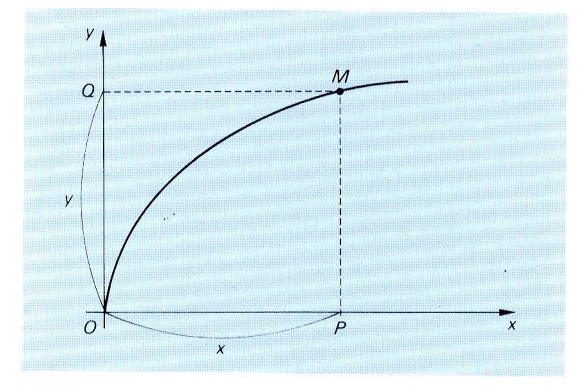
$$y = f(x) \quad (1)$$

(lire « $y = f$ de x »), pour écrire que la grandeur y est *fonction* de la variable x.

Dès 1748, Euler étudie et classe systématiquement les fonctions élémentaires

$$y = ax + b, \quad y = ax^2 + bx + c, \text{ etc. ;}$$

l'année suivante il généralise la notion de fonction : la relation $y = f(x)$ entre l'ordonnée y et la variable x d'un point M appartenant à une courbe quelconque est une fonction.



L'ordonnée y dépend de x : c'est une fonction de x.

Dans la seconde moitié du XVIIIe siècle, l'étude des propriétés des fonctions repose soit sur la théorie des limites (D'Alembert, 1767), théorie féconde mais qui manque alors de rigueur, soit sur des méthodes algébriques, comme le fit Lagrange (1797-1799), qui emploie notamment les *développements en série* de Taylor. Cependant il faut attendre les travaux de Cauchy (1821), Lobačevskij (1834) et Dirichlet (1837) pour parvenir à une définition générale classique de la notion de fonction : c'est une « quantité » (Cauchy prend ce terme au sens de « nombre réel ») dont la valeur dépend d'une ou plusieurs autres quantités, appelées variables indépendantes.

Nous allons voir que la théorie des ensembles permet une définition beaucoup plus générale de la notion de fonction, grâce au concept d'*application* d'un ensemble dans un autre. C'est Dedekind qui a souligné l'importance fondamentale de ce concept dans son livre célèbre *Que sont et que doivent être les nombres ?*, paru en 1888 ; la définition même d'une application est due à Dirichlet.

● *Application d'un ensemble E dans un ensemble F.* Soit un ensemble E, constitué d'éléments x et un ensemble F constitué d'éléments y. Supposons que nous convenions d'une *règle* permettant de faire correspondre à tout élément $x \in E$ un élément $y \in F$ *et un seul* : on dit qu'on a défini une *application* de l'ensemble E dans l'ensemble F. On appelle :

— *fonction* : l'opération qui associe un élément $x \in E$ à un élément $y \in F$ selon la règle convenue ; cette opération est souvent désignée par le symbole f ;

— *ensemble de départ* ou encore *domaine de définition* : l'ensemble E ;

— *variable indépendante* ou *argument* : les éléments x de l'ensemble E ;

— *ensemble d'arrivée* ou *domaine des valeurs* : l'ensemble F ;

— *valeur de la fonction* : pour l'élément $x \in E$ l'élément $y \in F$ qui lui correspond ; on dit souvent que x est l'*antécédent* et y l'*image dans F* de cet antécédent.

Pour noter symboliquement la phrase « Soit f une application de E dans F », on peut utiliser l'une des trois formulations suivantes :

$x \xrightarrow{f} y$ (lire : « x s'applique *sur* y ») ;

$y = f(x)$ (lire : « y égale $f(x)$ ») ;

soit $f : E \to F$ une application.

● *Exemples* :

— Soit E un ensemble de stations de chemin de fer : $E = \{a, b, c, ..., k\}$ et F un ensemble de nombres servant à mesurer le temps :

$$F = \{8\text{ h}, 8\text{ h }01\text{ mn}, ..., 23\text{ h}\} \text{ par exemple.}$$

L'opération f qui associe aux éléments de E des éléments de F tient compte des distances entre les stations et de la vitesse du train. Le résultat de l'application $E \xrightarrow{f} F$ est une table d'indicateur de chemin de fer.

— Soit E une figure géométrique, c'est-à-dire un ensemble de points M, et soit T une *transformation* de cette figure, c'est-à-dire une construction qui fait correspondre à tout point $M \in E$ un point M' selon une règle déterminée. L'ensemble des points M' constitue une figure F, et la transformation T est une application de E dans F, ce qui s'écrit :

$$E \xrightarrow{T} F \quad \text{ou} \quad M' = T(M).$$

— En *analyse*, branche des mathématiques que nous présentons p. 102, on étudie les applications dans lesquelles les ensembles E et F sont des ensembles de nombres (entiers, rationnels, réels, complexes, etc.). Les fonctions correspondantes sont appelées *fonctions numériques* (on précise : fonction d'une variable réelle, d'une variable complexe, etc. selon la nature de l'ensemble de départ). Nous verrons qu'il existe des ensembles, appelés *espaces vectoriels*, dont les éléments sont des *vecteurs* : si l'ensemble de départ E est un espace vectoriel, la fonction est dite *fonction vectorielle*.

Caractères d'une application.

● *Application surjective.* Soit f une application de E dans F, E et F étant des ensembles donnés, distincts ou non ; à tout $x \in E$ on peut associer un élément $y = f(x)$ appartenant à F. Si l'on peut, à tout $y \in F$, associer un élément x tel que $y = f(x)$, l'application de E dans F est dite *surjective*, ce que l'on précise en disant : f est une application de E *sur* F (et non pas, comme dans le cas général, de E *dans* F). Prenons un exemple simple pour illustrer cette définition. Soit les deux ensembles E et F utilisés au paragraphe *a)* pour introduire la définition de l'application : la figure qui les représente montre qu'il existe des éléments de F qui n'ont aucun antécédent dans E, c'est-à-dire que l'application n'est pas surjective. Par contre, si nous considérons les deux ensembles :

— $\mathbb{N}^*$: ensemble des entiers naturels, 1, 2, 3, ... n, $(n+1)$ ...,

— F : ensemble des carrés parfaits, 1, 4, 9 ... n^2, $(n+1)^2$ ...,

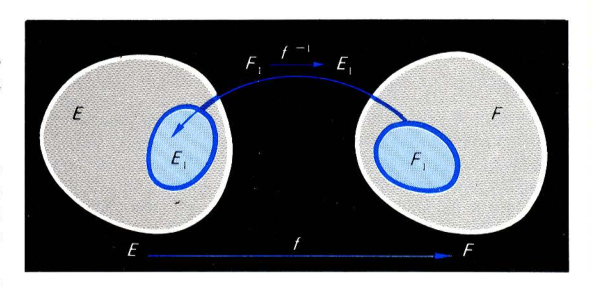
et l'application qui fait correspondre à tout entier n du premier ensemble son carré n^2, appartenant au deuxième ensemble, il est clair qu'à tout élément y de F correspond un élément x de $\mathbb{N}^*$ tel que le carré de x soit y : l'application considérée est donc *surjective*.

Donnons une autre expression de l'application surjective. Soit f une application de E dans F et E_1 une partie quelconque de E. Dans l'application f, à tous les éléments de E_1 on associe des éléments de F dont l'ensemble constitue une partie de F appelée *image de E_1 par f* ; on écrit parfois cette image sous la forme $f(E_1)$. De même $f(E)$ représente l'ensemble des images de tous les éléments de E ; si on a $f(E) = F$, f est une surjection.

Lorsqu'une application est surjective, on dit parfois qu'elle *transforme E en F*, ou x en $f(x)$. Ainsi, dans l'exemple d'une translation (voir ci-dessus, *b*), chaque point M' de la figure F correspond à un point M de la figure E tel que M soit relié à M' par la relation $M' = T(M)$; la translation est une application surjective, et l'on peut dire que *M est transformé en M'*, ou que *E est transformé en F*.

De même, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui fait correspondre à tout nombre réel x un autre nombre réel $y = 3x + 5$ est surjective, car, étant donné une valeur quelconque de y, on peut toujours trouver une valeur de x telle que la relation précédente soit vérifiée, x appartenant à $\mathbb{R}$ (pour trouver une telle valeur, il faut résoudre l'équation $3x + 5 = y$, après avoir donné à y la valeur choisie).

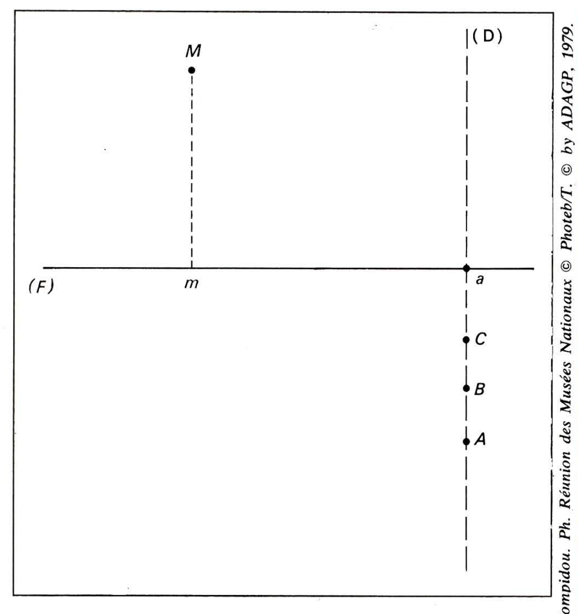
● *Application réciproque.* Soit f une application de E dans F. Considérons une partie F_1 de F ; on appelle *image réciproque* de F_1 par f le sous-ensemble de tous les éléments x appartenant à E tels que $f(x) \in F_1$; on note ce sous-ensemble $f^{-1}(F_1)$, le symbole (-1) en exposant désignant donc une opération réciproque.



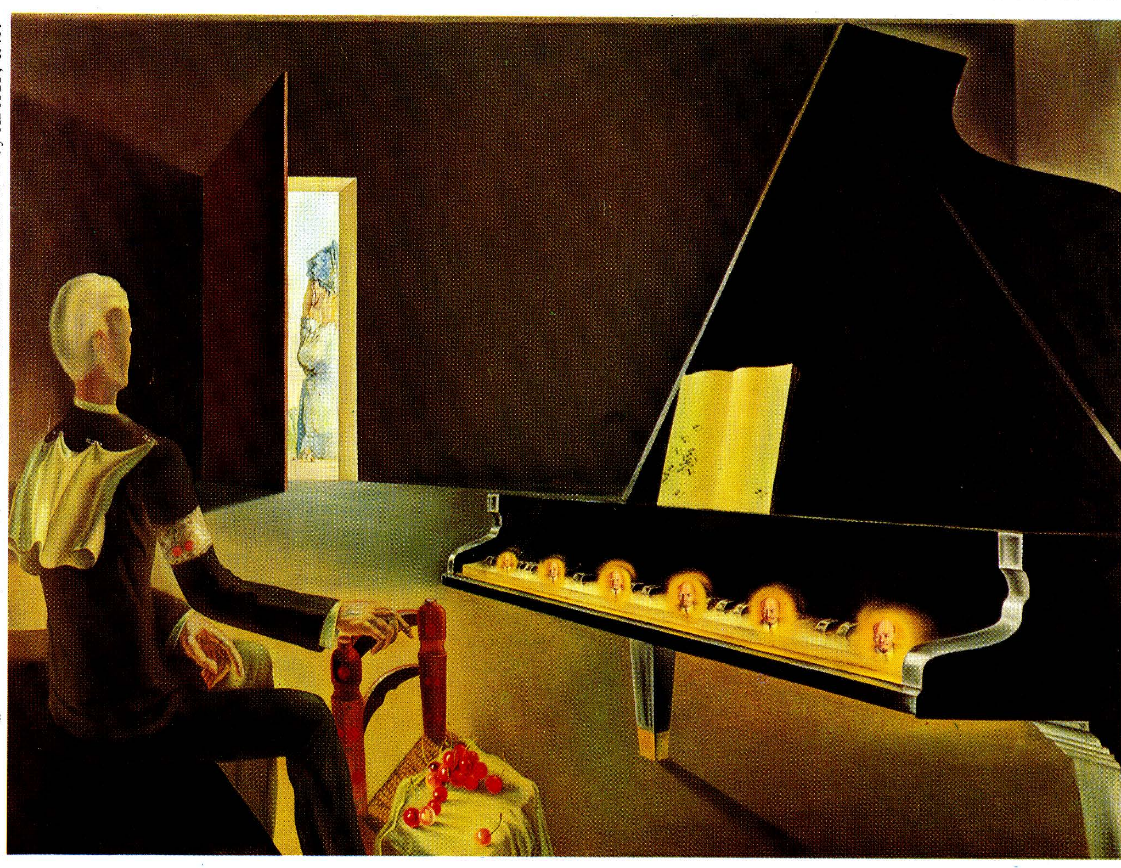
La fonction f applique E dans F et l'on se donne une partie F_1 de F : la partie de l'ensemble E qui est en bleu sur la figure représente le sous-ensemble de E dont les éléments sont appliqués dans F_1 (= ont leur image dans F_1). Ce sous-ensemble est l'image réciproque de F_1 par f ; on la représente par $f^{-1}(F_1)$.

Voici un exemple géométrique. La figure ci-après représente l'application suivante :

— ensemble E de départ : tous les points du plan de la figure.



La fonction *f* associe à tout point *M* du plan sa projection sur la droite *(F)*.



Cette œuvre de Salvador Dali (1931) intitulée* Six apparitions de Lénine sur un piano, *est un exemple naïf d'une application de l'ensemble E (les six têtes de Lénine) dans l'ensemble F (les touches du piano). Le lecteur constatera que cette application n'est pas à la fois injective et surjective, donc qu'elle n'est pas bijective.

— ensemble F d'arrivée : tous les points de la droite (F) ;

— fonction f (règle appliquant E dans F) : à tout point M de E on fait correspondre le point m de (F), pied de la perpendiculaire abaissée de M sur (F).

Sans être grand géomètre, le lecteur constatera aisément que tout point M du plan de la figure possède une *image* m sur (F), puisqu'on peut toujours mener d'un point une perpendiculaire à une droite. Considérons maintenant le point a sur la droite (F) : c'est une *partie* de l'ensemble F, qu'on peut désigner par F_1, ce qui permet d'écrire : $F_1 = \{ a \}$. L'*image réciproque* de F_1 est représentée par l'ensemble de tous les points de E qui se projettent en a, c'est-à-dire par tous les points de la droite (D), puisque aussi bien A, que B, C, ... sont sur une même perpendiculaire à (F). Ainsi donc à un élément de F correspondent une infinité d'éléments réciproques dans E.

● *Application injective.* Une application est dite *injective* lorsque deux éléments de E, distincts, ont pour images deux éléments distincts de F. Il résulte de cette définition qu'un élément de F ne saurait avoir plus d'un antécédent dans E, et que son image réciproque est donc, soit un ensemble vide, soit un ensemble singulier. L'exemple donné au début du paragraphe *a)* est celui d'une application injective : on constate, en examinant la figure qui l'accompagne, que chaque élément de F possède zéro ou un antécédent dans E. La translation géométrique, donnée en exemple au paragraphe *b)*, est aussi une injection, puisque à chaque point de F correspond un antécédent dans E, et un antécédent seulement (elle était, en outre, surjective).

● *Application bijective.* Une application qui est à la fois injective et surjective est appelée *bijective.* Soit f une application de E dans F ; si, pour tout $y \in F$ il existe un $x \in E$ et un seul tel que $y = f(x)$, l'application f est bijective.

Ainsi donc, si deux ensembles E et F se correspondent par une application bijective :

— à tout élément de F correspond un seul antécédent dans E ;

— à tout élément de E correspond une seule image dans F.

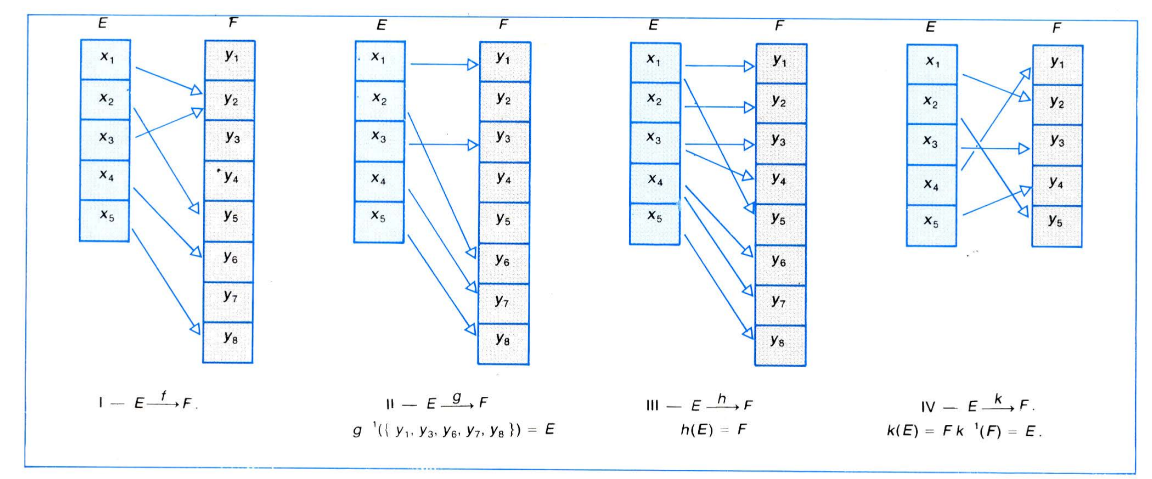
Nous avons illustré les caractères surjectif, injectif et bijectif d'une application sur la figure ci-dessous.

● *Remarque.* Étant donné une application bijective f de E dans F, tout élément de F admet un antécédent et un seul dans E, ce qui définit une application de F dans E, qui est aussi une bijection : on l'appelle la *bijection réciproque* de f. On dit que les deux ensembles E et F sont mis en *correspondance biunivoque* par ces deux applications, notées f et f^{-1}, ou encore que f et f^{-1} réalisent entre E et F une *correspondance biunivoque.* On dit aussi que f et f^{-1} sont des *fonctions inverses.* En appelant x un élément quelconque de l'ensemble E et y un élément quelconque de l'ensemble F, on a les égalités équivalentes :

$$y = f(x) \quad \text{et} \quad x = f^{-1}(y) .$$

Deux ensembles E et F entre lesquels il est possible d'établir une bijection (une correspondance biunivoque) sont dits *équipotents* : nous comprendrons plus loin l'importance de cette propriété.

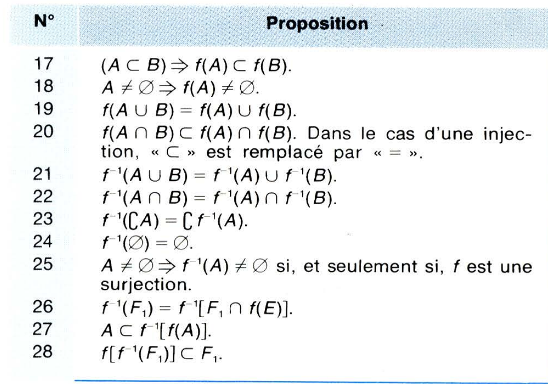
Caractères d'une application.
I — Application quelconque : f n'est pas injective (x_1 et x_3 ont même image y_2) ; elle n'est pas non plus surjective (il y a des éléments de F qui n'ont pas d'antécédent dans E).
II — Application injective : un élément quelconque de F possède, dans l'application g, soit un seul antécédent (y_1, y_3, y_6, y_7, y_8), soit zéro antécédent. Par contre, g n'est pas surjective, puisque certains éléments de F n'ont pas d'antécédent dans E.
III — Application surjective : chaque élément de F possède, dans l'application h, un antécédent dans E ; par contre, h n'est pas injective, puisqu'à certains éléments de F (y_3 et y_4 par exemple) correspond plus d'un antécédent dans E.
IV — Application bijective : le lecteur vérifiera que l'application k est à la fois injective et surjective.



Autres résultats.

Le lecteur intimidé par les calculs abstraits peut éviter de lire ce qui va suivre et passer directement à la théorie du produit.

Dans ce qui suit on appelle f une application d'un ensemble E dans un ensemble F, A et B des sous-ensembles arbitraires de E. On démontre les résultats suivants.



N°	Proposition
17	$(A \subset B) \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
18	$A \neq \emptyset \Rightarrow f(A) \neq \emptyset$.
19	$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
20	$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Dans le cas d'une injection, « $\subset$ » est remplacé par « = ».
21	$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
22	$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
23	$f^{-1}(\complement A) = \complement f^{-1}(A)$.
24	$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
25	$A \neq \emptyset \Rightarrow f^{-1}(A) \neq \emptyset$ si, et seulement si, f est une surjection.
26	$f^{-1}(F_1) = f^{-1}[F_1 \cap f(E)]$.
27	$A \subset f^{-1}[f(A)]$.
28	$f[f^{-1}(F_1)] \subset F_1$.

● *Applications composées.* Soient trois ensembles E, F, G, f une application de E dans F, g une application de F dans G ; l'application de E dans G

définie par l'écriture $g[f(x)]$ s'appelle l'*application composée* de g et f (ou la fonction composée de g et f). On la note $g \circ f$, ou, s'il n'y a pas de confusion possible, gf. A une valeur x de la variable qui décrit l'ensemble E, on associe en G la valeur $y = g[f(x)]$. L'ordre dans lequel on compose les applications est essentiel et, si G est distinct de E, la notation $f \circ g$ n'a aucun sens. Nous retrouverons la notion de fonction composée p. 118.

Produit cartésien.

● *Définition.* Considérons deux ensembles E et F, respectivement constitués d'éléments x et y ; formons tous les couples possibles (x, y) : l'ensemble de ces couples est appelé *ensemble produit de E par F* ou encore *produit cartésien de E par F*. On le note : $E \times F$. On considère que le couple (x, y) est distinct du couple (y, x) et l'égalité de deux couples (x, y) et (x', y') est définie par les conditions $x = x'$, $y = y'$.

● *Comme illustration simple* de la notion d'ensemble produit, nous prendrons un jeu bien connu des écoliers : la bataille navale. On sait que ce jeu se joue à deux, chaque joueur disposant d'un rectangle quadrillé, de vaisseaux de guerre représentés symboliquement par un ou plusieurs petits « carreaux » ; le rectangle quadrillé a l'aspect suivant (que nous réduisons pour simplifier notre exposé) :

Ensemble *E*

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	Ensemble *F*
aa'	*ba'*	*ca'*	*da'*	*ea'*	*fa'*	*a'*
ab'	*bb'*	*cb'*	*db'*	*eb'*	*fb'*	*b'*
ac'	*bc'*	*cc'*	*dc'*	*ec'*	*fc'*	*c'*
ad'	*bd'*	*cd'*	*dd'*	*ed'*	*fd'*	*d'*
ae'	*be'*	*ce'*	*de'*	*ee'*	*fe'*	*e'*
af'	*bf'*	*cf'*	*df'*	*ef'*	*ff'*	*f'*
ag'	*bg'*	*cg'*	*dg'*	*eg'*	*fg'*	*g'*

Quadrillage en vue d'une « bataille navale ».

Chacun des deux joueurs ignore la disposition de la flotte de son adversaire, et chaque joueur annonce, chacun à son tour, un « coup de canon » en précisant : « *aa'* » par exemple, pour désigner le carreau utilisé chez l'adversaire : si celui-ci a placé, en ce carreau, l'un de ses vaisseaux, ce bâtiment est considéré comme coulé. Dans l'exemple que nous avons pris, il y a 30 carreaux, notés *aa'*, *ab'*, *ac'*, ... Appelons E l'ensemble des colonnes *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* et F l'ensemble des lignes *a'*, *b'*, *c'*, *d'*, *e'*, *f'*, *g'*. L'ensemble des carreaux, c'est-à-dire de tous les couples tels que *aa'* est l'ensemble produit $E \times F$.

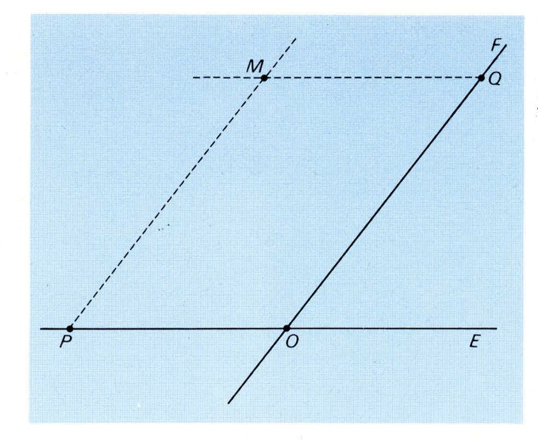
On voit immédiatement que l'ordre dans lequel on prend les lettres du couple a une importance primordiale (« 1ère ligne, 3e colonne » désigne un carreau différent de « 3e ligne, 1ère colonne » : dans un cas il s'agit du carreau *ca'*, et dans le second du carreau *ac'*). Pour que deux éléments de l'ensemble produit soient équivalents, il faut donc non seulement que les deux éléments qui les composent soient égaux, mais encore qu'ils soient pris dans le même ordre. C'est pourquoi le couple (a, c') n'est pas équivalent au couple (c, a').

● *Un exemple moins futile.* Considérons deux droites E et F qui se coupent en O ; la droite E est un ensemble de points P et la droite F un ensemble de points Q. Le produit cartésien $E \times F$, formé des couples (P, Q), représente les points M du plan déterminé par les deux droites, avec la construction suivante : on mène par P une parallèle à F et par Q une parallèle à E, l'intersection de ces deux droites est le point M, image du couple (P, Q). On constate que :

1 - chaque point M distinct correspond à un couple (P, Q) déterminé ;

2 - deux points $M(P, Q)$ et $M'(P', Q')$ sont confondus si $P = P'$ et $Q = Q'$.

Le lecteur quelque peu familiarisé avec les mathématiques scolaires aura reconnu dans ce qui précède un système de *coordonnées cartésiennes* (voir p. 95).



***Les points** M **du plan déterminé par les droites** (E) **et** (F) **sont les images des couples** (P, Q) **dont l'ensemble est le produit cartésien** E × F.*

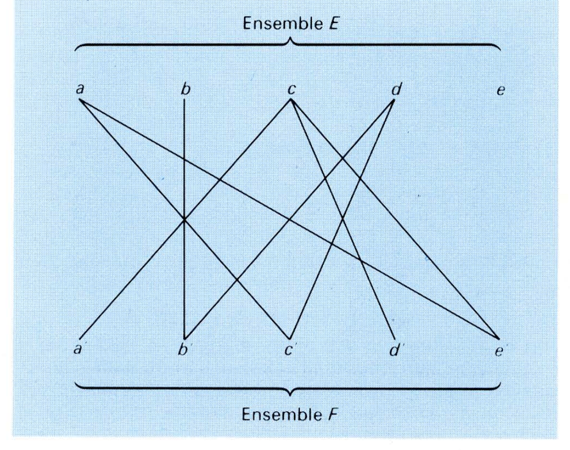
Graphes.

● *Définition.* Soit deux ensembles E et F et leur produit cartésien $E \times F$, composé de tous les couples (x, y) d'éléments $x \in E$ et $y \in F$. Définissons par ailleurs une relation $R \wr x, y \wr$ entre x et y : les couples (x, y) qui vérifient cette relation constituent un sous-ensemble de $E \times F$ qu'on appelle *graphe* de la relation $R \wr x, y \wr$.

Le terme *graphe* a été introduit par Sylvester, à la suite des travaux de Morgan et de Hamilton. Le lecteur doit bien prendre garde à ne pas confondre, malgré la similitude des termes, *graphe* et *graphique* : un graphe est un ensemble déterminé, partie d'un ensemble produit, tandis qu'un graphique est un dessin. Dans certains cas particuliers, un graphe peut être représenté par une image géométrique, ou, comme on dit, par une *représentation graphique*.

● *Graphe d'une correspondance.* Deux ensembles E et F sont mis en correspondance lorsque à chaque élément $x \in E$ on fait correspondre un ou plusieurs éléments $y \in F$. Considérons un ensemble E formé de cinq hommes nommés *a*, *b*, *c*, *d*, *e* et un ensemble F composé de cinq femmes nommées *a'*, *b'*, *c'*, *d'*, *e'* (les deux ensembles comportent autant d'éléments, mais ce n'est pas là une caractéristique nécessaire). Le produit $E \times F$ désigne l'ensemble des couples que l'on peut former avec ces dix personnes. Le lecteur vérifiera sans peine qu'il en existe 25. Parmi ces 25 couples, qu'on peut désigner d'une façon générale par (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$, il en est dans lesquels l'homme est plus âgé que la femme ; cette relation entre x (l'homme) et y (la femme) peut s'écrire $R \wr x, y \wr$. Les couples pour lesquels elle est vérifiée

Les couples** (x, y) **reliés par un trait vérifient la relation :
$R \wr x, y \wr$ = « âge de x supérieur à âge de y ».
Ce schéma exprime que les couples suivants vérifient la relation :
$R \wr x, y \wr$ = « âge de x supérieur à âge de y » :
(a, c'), (a, e'), (b, b'), (c, a')
(c, d'), (c, e'), (d, b'), (d, c').
Ces huit couples constituent le graphe de la relation** $R \wr x, y \wr$ **; les lignes joignant les points** a **et** c', a **et** e', **etc... tracées sur le dessin sont l'image (pas très jolie !) de ce graphe.



forment un sous-ensemble $E \times F$, qui est le *graphe* de la relation $R \wr x, y \wr$. Pour donner une image de ce graphe, c'est-à-dire de ce sous-ensemble, nous pouvons procéder de plusieurs manières. En voici deux parmi un nombre indéfini.

— Écrivons les deux ensembles l'un au-dessous de l'autre, et relions par un trait les valeurs de x et de y qui vérifient la relation, c'est-à-dire les noms des hommes aux noms des femmes qui sont leurs cadettes (voir figure précédente) ;

— Traçons deux droites perpendiculaires Ox et Oy. Marquons sur Ox les points (arbitraires) *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, qui sont les images des hommes de l'ensemble E, et sur Oy les points *a'*, *b'*, *c'*, *d'*, *e'*, images des femmes de l'ensemble F. En menant par chacun de ces points des parallèles à Oy (pour les points de l'ensemble E) et à Ox (pour les points de l'ensemble F), on obtient un « quadrillage » dont chaque intersection est l'image d'un couple. On peut ensuite entourer d'un petit cercle de couleur, par exemple, ceux des couples qui vérifient la relation $R \wr x, y \wr$: cet ensemble de petits cercles colorés est l'image du graphe de la relation $R \wr x, y \wr$.

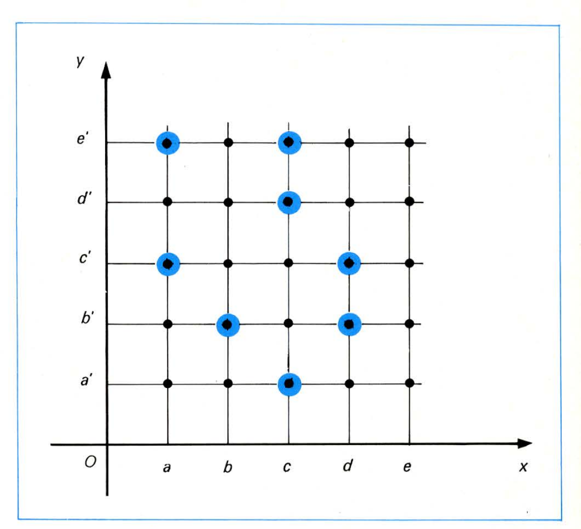


Image de la relation** $R \wr x, y \wr$ **= « âge de** x **supérieur à âge de** y **».

● *Graphe d'une application.* Une application $E \xrightarrow{f} F$ est, on l'a vu ci-dessus, une correspondance telle qu'à un élément $x \in E$ il corresponde *un seul* élément $y \in F$ dans l'ensemble d'arrivée. Les couples (x, y) qui vérifient la relation $y = f(x)$ constituent un sous-ensemble du produit cartésien $E \times F$, c'est-à-dire le graphe de l'application $E \xrightarrow{f} F$.

● *Graphe d'une fonction numérique.* Si E et F sont des ensembles de nombres, l'application $E \xrightarrow{f} F$ est une fonction numérique, et le graphe de cette fonction est constitué des couples (x, y), x et y étant des *nombres*. En *analyse*, nous étudierons notamment les fonctions d'une variable réelle. Dans ce cas, E est l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et les valeurs $y = f(x)$ de la fonction sont aussi des nombres réels. Une telle fonction est donc une *application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. Chaque valeur x de la variable correspond à un point (*abscisse*) sur un axe $x'x$ et chaque valeur $y = f(x)$ de la fonction à un point (ordonnée) sur un axe $y'y$: le graphe de la fonction, c'est-à-dire l'ensemble des couples (x, y) qui vérifie la relation $y = f(x)$, a pour image un *graphique* qui est la courbe représentative de la fonction.

Généralisation et propositions fondamentales.

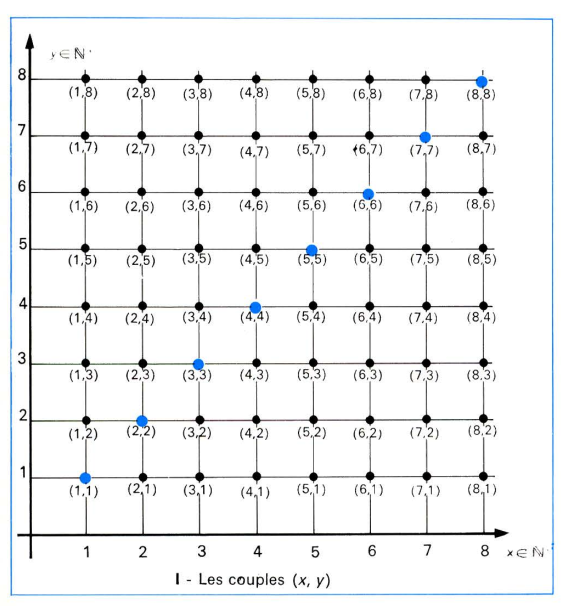
● *Application canonique.* Soit, dans l'ensemble produit $U = E \times F$, le graphe des couples (x, y) et considérons les couples (y, x) dans l'ensemble $U' = F \times E$. L'application bijective de U sur U' qui transforme (x, y) en (y, x) est appelée *application canonique* ; si les ensembles E et F sont identiques, c'est la *symétrie canonique*. Les éléments qui possèdent la propriété $x = y$ sont des *couples invariants* dans cette application : leur ensemble est appelé diagonale de $E \times E$.

Exemple : considérons les couples (x, y) de l'ensemble cartésien $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ désignant l'ensemble des nombres entiers naturels. Ce sont les couples (1, 1), (1, 2), ... représentés sur la figure de la page ci-contre. Si l'on

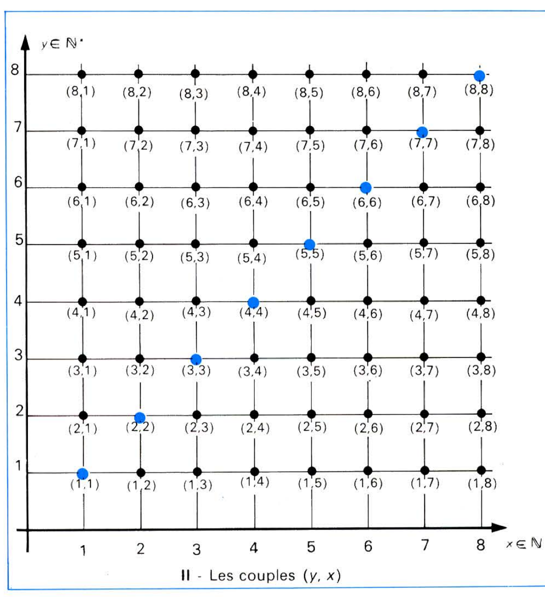
Un arbre généalogique est l'image — souvent décorative — d'un système de relations. Ci-dessus, un fragment de l'arbre généalogique historié de la Maison des Habsbourg.

applique à cet ensemble la symétrie canonique qui transforme (x, y) en (y, x), on obtient un nouvel ensemble dont les éléments sont les couples $(1, 1)$, $(2, 1)$, etc. Les éléments $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, ... sont invariants : ce sont les éléments diagonaux (on les a représentés en bleu sur le quadrillage ci-contre).

Symétrie canonique transformant l'ensemble des (x, y) de la figure I en l'ensemble des (y, x) de la figure II, x et y étant des entiers naturels ; en bleu les éléments diagonaux (invariants dans la symétrie canonique).



I - Les couples (x, y)



II - Les couples (y, x)

• *Produit de plusieurs ensembles.* Soit trois ensembles E, F et G distincts ou non, auxquels appartiennent respectivement les éléments x, y et z. L'ensemble des *triplets* (x, y, z) est l'ensemble produit $E \times F \times G$, auquel on généralise sans difficulté toutes les définitions précédentes. Si l'on représente chacun de ces ensembles par les points (ou par certains points) de trois droites Ox, Oy et Oz formant un trièdre trirectangle, les points (ou certains points) de l'espace tridimensionnel sont l'image du produit $E \times F \times G$ (voir figure ci-après).

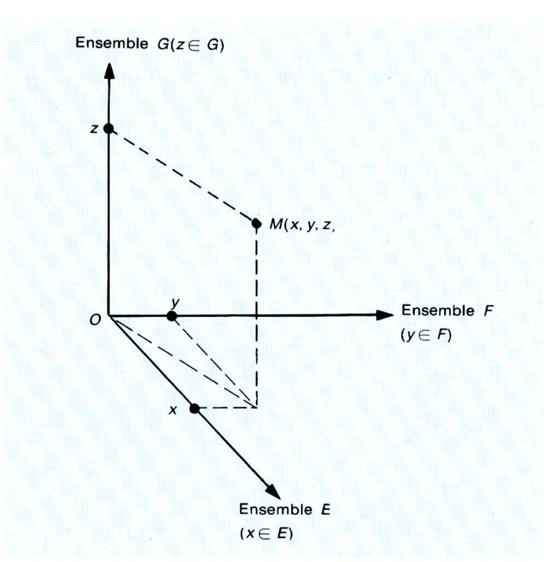


Image du produit de trois ensembles E, F et G. Les images des éléments x, y et z appartenant respectivement aux ensembles E, F et G sont des points des droites Ox, Oy et Oz (E, F et G sont des ensembles continus, tels que l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ par exemple, tous les points de chaque droite sont des images de leurs éléments). Les éléments du produit $E \times F \times G$ sont des points tels que $M(x, y, z)$.

Lorsqu'une fonction f est définie dans un produit de trois ensembles (c'est-à-dire par une relation entre des éléments x, y et z de ces trois ensembles) elle est dite *à trois arguments* dont chacun parcourt l'un des ensembles considérés. La valeur de f pour l'élément (x, y, z) du produit $E \times F \times G$ se note $f(x, y, z)$; l'ensemble des triplets (x, y, z) qui vérifie la relation fonctionnelle est le graphe de la fonction. En général, pour tracer l'image de ce graphe, il sera nécessaire de faire appel à la géométrie dans l'espace.

• *Propositions fondamentales relatives au produit cartésien.* Dans ce qui suit on considère le produit cartésien $E \times F$; A et A' désignent des sous-ensembles quelconques de E, B et B' des sous-ensembles quelconques de F, C un sous-ensemble quelconque du produit $E \times F$. La relation : « x est premier élément du couple z » détermine une application de $E \times F$ dans E qu'on désigne par pr_1 (*première projection*) ; la relation : « y est deuxième élément du couple z » est une application de $E \times F$ dans F, désignée par pr_2.

Propositions fondamentales relatives au produit cartésien.

N°	Proposition
29	$A \times B = \varnothing \Leftrightarrow$ « $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$ ».
30	$(A \times B) \cup (A' \times B) = (A \cup A') \times B$.
31	$(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$.
32	$pr_1^{-1}(A) = A \times F$; $pr_2^{-1}(B) = E \times B$.
33	Si $B \neq \varnothing$, on a pour tout A : $pr_1(A \times B) = A$.
34	Pour tout C on a : $C \subset pr_1(C) \times pr_2(C)$.
	En appelant K une partie de $E \times F$ et en considérant l'application qui fait correspondre à A l'ensemble $K(A)$, on a :
35	$K(\varnothing) = \varnothing$.
36	$(A \subset B) \Leftrightarrow K(A) \subset K(B)$.
37	$K(A \cup B) = K(A) \cup K(B)$.
38	$K(A \cap B) \subseteq K(A) \cap K(B)$.
39	Si K et K' sont des parties de $E \times F$ telles que $K \subset K'$, on a $K(A) \subset K'(A)$.

ARITHMÉTIQUE ET THÉORIE DES NOMBRES.

Remarques historiques.

L'arithmétique des Anciens.

Précédemment pp. 7-8, nous avons récapitulé l'essentiel des connaissances arithmétiques classiques. Les Anciens étaient parvenus à la notion abstraite de *nombre entier*, telle que l'a définie axiomatiquement Euclide, et avaient découvert, tantôt par hasard, tantôt par une réflexion méthodique, quelques propriétés fondamentales des nombres entiers. Rappelons quelques têtes de chapitres importantes : représentation figurée des nombres (arithmo-géométrie des Pythagoriciens), qui met en évidence certains caractères de divisibilité et l'existence des nombres premiers ; théorie des proportions (Archytas de Tarente, Eudoxe, Théon de Smyrne) ; nombres « pythagoriciens », c'est-à-dire tels que le carré a^2 de l'un d'eux soit égal à la somme des carrés des deux autres $b^2 + c^2$; irrationalité de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., $\sqrt{17}$ (Théétète) ; problèmes de numération (Archimède).

Les mathématiciens arabes.

● *Rappel chronologique.* Quand on parle de la « science arabe », on fait allusion aux nombreuses et brillantes Écoles scientifiques qui se sont développées dans le monde musulman entre le VII[e] et le XV[e] siècle. Comme on le sait sans doute, le dénominateur culturel commun de ce monde composite fut la religion (l'Islām) et la langue (l'*arabe écrit*, fixé au début du VIII[e] siècle). Toutefois les savants et philosophes du monde islamique ne furent pas tous d'origine arabe ; il y a parmi eux une notable proportion de Persans (qui, à partir du X[e] siècle, écriront souvent dans leur langue, transcrite à l'aide de caractères arabes), quelques Juifs et, à partir du XIV[e] siècle, des Turcs.

Les centres culturels les plus importants ont été : Bag̲dād, Baṣra, Damas, Alep, Mossoul, Samarra, Ray (près de Téhéran) et, plus tardivement, Le Caire ; en Occident, la science et la culture arabes ont été diffusées à partir des Universités espagnoles : Cordoue, Grenade, Tolède, Séville ; à partir du XIII[e] siècle, Samarkand, qui devait devenir la capitale de Timūr Lang (Tamerlan) est un centre scientifique important, où le prince mongol Ulūg̲ beg fit édifier un observatoire célèbre. La page 135 récapitule les grands noms des mathématiques arabes, parmi lesquels on retiendra ceux d'al-H̲ārizmī (IX[e] siècle, créateur de l'algèbre), d'al-Māhānī (deuxième moitié du IX[e] siècle : théorie des proportions), du Persan 'Umar H̲ayyām (poète et mathématicien, deuxième moitié du XI[e] siècle), de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (deuxième moitié du XIII[e] siècle, auteur d'un traité de trigonométrie), al-Kāšī (XV[e] siècle), introducteur des fractions décimales.

● *Le savoir arithmétique des mathématiciens arabes* est un développement et une analyse de celui des Grecs. Nous retiendrons trois thèmes essentiels.

— 'Umar H̲ayyām et aṭ-Ṭūsī ont généralisé la formule euclidienne donnant le carré du binôme $(a + b)$. Aṭ-Ṭūsī, qui fut avec al-H̲ārizmī le plus grand mathématicien arabe, énonce la formule :

$$(a+b)^n - a^n = na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n \quad (1)$$

et se sert de cette formule pour extraire les racines approchées d'ordre n.

La relation (1) n'est autre que le développement du *binôme de Newton*, qui débouche sur de nombreuses applications (calcul combinatoire, analyse, etc.). Mais ce savoir ne fut pas transmis aux algébristes européens, qui durent le redécouvrir, au XVII[e] siècle.

— Al-H̲ārizmī et ses successeurs ont calculé sur les nombres irrationnels. Ils ont établi des règles générales comme :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \; ; \quad \sqrt[n]{a}\sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m b^n} \; ; \quad \text{etc.} \quad (2)$$

Ainsi les grandeurs irrationnelles, que les Grecs associaient à des constructions géométriques, deviennent peu à peu *des nombres*, c'est-à-dire des objets sur lesquels on peut *calculer*.

— On doit enfin à 'Umar H̲ayyām et al-Māhānī une analyse très fine de la théorie des proportions.

De la Renaissance au XIX[e] siècle.

● *Les mathématiciens de la Renaissance*, on l'a déjà dit, ont été principalement des algébristes, préoccupés par le problème de la résolution des équations d'un degré supérieur à 3. La parution de « manuels » pratiques d'arithmétique, au XV[e] siècle, montre cependant que le savoir arithmétique est largement diffusé et utilisé à cette époque (l'*Arithmétique de Trévise*, 1478, d'un auteur inconnu ; le *Bamberger Rechenbuch*, 1483 ; le *Manuel de calcul* publié par Johann Widmann en 1489 sont les traités les plus célèbres). Dans tous ces ouvrages, sont exposées les règles de la multiplication, de la division, de l'extraction des racines carrées, de la sommation des termes d'une progression arithmétique ou géométrique, de la preuve par 9 ; on y trouve aussi la règle de 3, les méthodes de résolution des problèmes sur les mélanges et les alliages et sur les calculs d'intérêts.

● *Au XVII[e] siècle naît officiellement la théorie des nombres*, aux frontières de l'arithmétique et de l'algèbre, avec les recherches de Fermat, entre 1638 et 1658. On doit à Fermat de nombreuses propositions, dont on ignore s'il les a démontrées, et qui ont fait, depuis, l'objet d'analyses très approfondies. Nous retiendrons ici deux découvertes importantes dues à Fermat :

1 - La méthode dite de *descente infinie*, qui joue un rôle important en arithmétique.

2 - Le fameux « dernier théorème de Fermat », non encore démontré. L'étude de ce théorème a conduit Euler, D'Alembert, Sophie Germain, Dirichlet, Kummer, Gauss et d'autres mathématiciens à d'importantes découvertes concernant les nombres entiers et la généralisation de la notion de nombre.

3 - Fermat a énoncé la loi combinatoire donnant le nombre de combinaisons obtenues en rangeant n objets p à p, nombre qui s'écrit classiquement C_n^p ou $\binom{n}{p}$. A vrai dire, cette loi était déjà connue de divers auteurs, sous une forme plus ou moins générale. Pascal en donne une démonstration, en 1654, dans son traité sur le *triangle arithmétique*.


Ph. Jeanbor © Photeb/T.

La musique et les nombres.
Les Pythagoriciens furent sans doute les premiers à découvrir qu'il existait une relation entre la qualité harmonique des accords sur une lyre et les rapports entre les longueurs des cordes pincées ; ils virent dans cette vérité expérimentale une illustration de leur principe fondamental, à savoir que le monde est régi par les nombres.

● *Au XVIII[e] siècle*, les mathématiciens ont été principalement préoccupés de faire progresser l'analyse. La théorie des nombres tient cependant une place importante dans les travaux d'Euler, de E. Waring et de Lagrange : il faut toutefois attendre l'œuvre de Le Gendre et de Gauss pour que cette branche des mathématiques se définisse comme un ensemble ordonné de connaissances.

XIX[e] et XX[e] siècles.

Au *XIX[e] siècle*, grâce aux travaux de Le Gendre (entre 1798 et 1830) et de Gauss (1801), tous les résultats entièrement acquis sur la théorie des nombres sont systématisés et la théorie devient une branche rigoureuse et coordonnée des mathématiques. L'œuvre tout à fait exceptionnelle de Gauss (*Recherches arithmétiques*, publiées en latin en 1801) introduit notamment en mathématiques un souci de rigueur qui annonce les mathématiques modernes, telles que les concevront les savants du XX[e] siècle. Sans entrer dans les détails de l'apport de Gauss et de ses successeurs, détails dont les principaux seront expliqués par la suite, retenons ici l'introduction et l'exploitation du concept de *congruence*, la notion d'*imaginaires de Galois*, la théorie des *formes quadratiques* (Gauss, Dirichlet, Hermite, etc.), l'élargissement de la notion de nombre à partir de réflexions sur le dernier théorème de Fermat par Gauss (1832) et par Kummer (1844, les *nombres idéaux*). Deux domaines ont été particulièrement approfondis : celui de la répartition des *nombres premiers* (Le Gendre) et celui des *nombres transcendants* (Liouville, 1844 ; Lindemann, 1882).

Ainsi la théorie des nombres, branche initialement arithmétique des mathématiques, s'oriente vers l'algèbre (avec la généralisation de la notion de nombre), vers la théorie des fonctions (avec l'étude de la répartition des nombres premiers et des problèmes du même genre) et vers la théorie des ensembles (avec la théorie des nombres transcendants).

• *Au XXe siècle,* ces orientations se précisent et la théorie des nombres devient le point de confluence de disciplines mathématiques diverses, qu'il s'agisse de l'approximation des nombres algébriques (Thue, Siegel, Dyson, F.K. Roth), de la théorie des nombres premiers (J. Hadamard, E. Landau, A. Selberg, P. Erdös) pour laquelle certains spécialistes ont fait usage de calculateurs électroniques (travaux de J.C.P. Miller et de D.J. Wheeler), du problème dit de « Waring » et des nombres transcendants (Pisot, Salem, Siegel, etc.).

Signalons à ce sujet la dernière grande synthèse sur la théorie des nombres déjà ancienne : elle est due à L. E. Dickson, auteur d'une *History of the Theory of Numbers* (*Histoire de la théorie des nombres*), parue entre 1919 et 1923. Les principaux résultats obtenus depuis 1840 ont été récapitulés par les *Mathematical reviews*, publiées aux États-Unis.

L'ensemble ℕ des entiers.

Les *nombres entiers* sont les nombres avec lesquels l'homme compte les objets qu'il perçoit ou qu'il conçoit ; on a coutume de les qualifier de *naturels*. L'ensemble des *entiers naturels*, désigné par le symbole $\mathbb{N}^*$ (lire « ℕ étoile ») est illimité :

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3 \dots\}. \quad (1)$$

Lorsqu'on adjoint à $\mathbb{N}^*$ le nombre zéro, représenté par le symbole « 0 », on parle de l'*ensemble des entiers* (= ensemble des entiers naturels + le zéro), qu'on désigne par le symbole ℕ :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}. \quad (2)$$

On peut faire, sur les éléments de ℕ, des opérations très variées qui, astucieusement combinées, permettent de résoudre bien des problèmes théoriques ou pratiques. De plus, à partir de l'ensemble ℕ, on peut construire d'autres ensembles qui jouent un rôle capital en mathématiques (par exemple l'ensemble ℝ des réels). Il est donc très important de décrire correctement cet ensemble, c'est-à-dire :

1 - d'énoncer un système d'*axiomes* fixant sa nature ;

Karl Friedrich Gauss (1777-1855) : aussi génial que ses contemporains Beethoven (1770-1827), Hölderlin (1770-1843), Hegel (1770-1831), auxquels il a survécu. Il est mort l'année où le poète américain Walt Whitman publiait Leaves of Grass ; Rimbaud avait un an.



2 - de définir, en s'appuyant sur ces axiomes, des opérations dans ℕ, ce qui lui conférera une *structure* (sur la notion de structure d'un ensemble, voir p. 37) ;

3 - de tirer de ces axiomes et définitions des conséquences dont l'ensemble constitue les *théorèmes* de l'arithmétique élémentaire : propriétés des opérations, règles opératoires, applications de ces règles opératoires à des problèmes, etc.

Les axiomes de Peano.

Il est maintenant classique de décrire l'ensemble ℕ des entiers à partir de cinq axiomes énoncés par le mathématicien italien Giuseppe Peano (1889). Voici ces axiomes.

I - ℕ est un ensemble non vide.

II - A tout $x \in \mathbb{N}$ on peut associer un élément déterminé de ℕ et un seul, noté x', appelé le *successeur* de x ; x lui-même est l'*antécédent* de x'.

III - Il y a dans ℕ un élément, nommé *zéro* et noté 0, qui n'est le successeur d'aucun autre ; le successeur de zéro est noté 1 et nommé « *un* ».

IV - Pour tout élément $n \in \mathbb{N}$ et différent de zéro, il y a un élément $x' \in \mathbb{N}$ et un seul tel que $x' = n$.

V - (*Axiome d'induction ou de récurrence*) - Tout sous-ensemble A de ℕ qui contient 0 et qui contient aussi le successeur x' de tout $x \in A$ coïncide avec ℕ (= contient tous les nombres naturels).

Sur ces cinq axiomes, on peut bâtir toute l'arithmétique. Soulignons l'importance de l'axiome V qui est à la base du *raisonnement par récurrence*, méthode de démonstration très utilisée en arithmétique dont le schéma est le suivant.

Appelons P une propriété quelconque et supposons qu'on ait la relation suivante :

$$\left.\begin{array}{l} P \text{ est vraie de } 0 \\ P \text{ est vraie de } x \end{array}\right\} \Rightarrow P \text{ est vraie de } x'. \quad (3)$$

Alors on peut dire que P est vraie de tout x appartenant à ℕ, puisque, en vertu de l'axiome V, l'ensemble contenant les éléments x vérifiant la relation (3) coïncide avec l'ensemble des entiers.

Propriétés remarquables de l'ensemble ℕ.

• *ℕ est un ensemble infini*, puisque chaque élément x de ℕ a un successeur x', en vertu de l'axiome II.

Dans la théorie des ensembles, on appelle *cardinal* le nombre d'éléments contenus dans l'ensemble considéré, si celui-ci est fini. L'ensemble ℕ étant infini, il possède un *cardinal infini*, noté $\aleph_0$ (aleph 0) par Cantor. Comme on l'a dit à la p. 19, tout ensemble qui peut être mis en correspondance biunivoque avec l'ensemble ℕ possède le même cardinal $\aleph_0$ et on l'appelle un *ensemble dénombrable*. Le cardinal $\aleph_0$ est le plus petit *nombre cardinal transfini*.

• *On peut définir dans ℕ une relation d'ordre* : on dit que l'entier a est plus grand que ou égal à l'entier b si l'équation $a = b + x$ a une solution $x \in \mathbb{N}$ (c'est-à-dire une solution entière). On écrit alors :

$$a \geqslant b. \quad (4)$$

Lire : (« a plus grand que ou égal à b »). Corrélativement, b est dit plus petit que ou égal à l'entier a, et l'on écrit :

$$b \leqslant a. \quad (5)$$

Les propriétés de la relation d'ordre sont les suivantes :

$$\begin{array}{l} — x \geqslant y \text{ et } y \geqslant x \Leftrightarrow x = y ; \\ — x \geqslant y \text{ et } y \geqslant z \Leftrightarrow x \geqslant z ; \\ — \text{pour tout couple } (x, y) \text{ appartenant à } \mathbb{N}, \\ \quad \text{on a soit } x \geqslant y, \text{ soit } y \geqslant x. \end{array} \quad (6)$$

• *L'ensemble ℕ est en outre un ensemble bien ordonné.* Cette propriété peut s'énoncer ainsi : dans tout sous-ensemble non vide A de ℕ il y a un nombre $1 \in A$ tel que $1 \leqslant a$ pour tout $a \in A$.

Opérations dans ℕ.

On définit dans ℕ deux opérations *internes* — c'est-à-dire dont le résultat est un élément de ℕ — à savoir l'*addition* et la *multiplication*.

• *Addition.* Cette opération, désignée par le signe « + », est définie par les formules suivantes (en notant x' et y' les successeurs des entiers x et y, comme dans les axiomes de Peano) :

$$\begin{cases} x + 1 = x' ; \\ x + y' = (x + y)' ; \\ 0 + x = x . \end{cases} \quad (7)$$

L'entier 0 est dit *élément neutre pour l'addition* (combiné selon les règles de l'addition à tout $x \in \mathbb{N}$, il donne x). En s'appuyant sur les axiomes de l'ensemble ℕ, on peut montrer les lois suivantes relatives à l'addition, pour tout x, y, $z \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \textit{associativité} : \ (x + y) + z = x + (y + z) ; \\ \textit{commutativité} : x + y = y + x . \end{cases} \quad (8)$$

• *Multiplication.* Cette opération, désignée par le signe « × » ou « . » (le point peut être omis lorsque les nombres sont représentés par des lettres et qu'il n'y a pas d'ambiguïté possible), se définit par les formules suivantes :

$$\begin{cases} 1\,x = x ; \\ xy' = xy + x ; \\ 0\,x = 0 . \end{cases} \quad (9)$$

L'élément 1 est l'*élément neutre pour la multiplication.* Les lois de la multiplication sont les suivantes :

$$\begin{cases} \textit{associativité} : \ (xy)\,z = x(yz) ; \\ \textit{commutativité} : xy = yx . \end{cases} \quad (10)$$

L'addition et la multiplication sont liées en outre par la loi de *distributivité* :

$$z(x + y) = zx + zy. \quad (11)$$

• *Remarques* :

1 - La relation d'ordre est compatible avec l'addition et la multiplication ; on a en effet :

$$\begin{cases} a \geqslant b \Rightarrow a + c \geqslant b + c ; \\ a \geqslant b \Rightarrow ac \geqslant bc . \end{cases} \quad (12)$$

2 - La soustraction $a - b = x$ n'est possible que si $a \geqslant b$; le nombre entier x est alors appelé différence entre a et b. Si $a < b$, la soustraction n'a pas de sens dans ℕ.

3 - La division de a par b est une opération qui associe à deux entiers a et b des entiers q et r tels que :

$$a = bq + r, \quad \text{avec } r < b .$$

Lorsque $r = 0$, on a : $a = bq$ et b est un *diviseur* de a (on dit aussi que a est un *multiple* de b).

Conclusion.

Le lecteur trouvera, p. 136 un certain nombre de résultats classiques sur les entiers et concernant les systèmes de numération (en particulier le système binaire et le système décimal), la pratique des opérations fondamentales et l'extraction des racines carrées, la recherche du diviseur d'un nombre, et celle du PGCD et du PPCM de deux nombres. Ces résultats sont aussi valables pour les *entiers relatifs* dont il est question ci-après p. 27.

Les nombres premiers.

Définition.

Un nombre entier naturel différent de 0 et de 1 est dit *premier* lorsqu'il n'admet d'autre diviseur que lui-même et l'unité. Par exemple :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

sont des nombres premiers. On précise parfois « premier absolu » pour les distinguer des *nombres premiers entre eux*, c'est-à-dire de nombres qui n'ont pas de diviseur commun autre que l'unité.

Ce sont les Grecs qui, les premiers, ont constaté que certains nombres n'avaient pas de diviseur autre qu'eux-mêmes et l'unité, et ils ont cherché à en étudier les propriétés. Euclide a montré que l'ensemble des nombres premiers était infini et le géographe et mathématicien Ératosthène, correspondant d'Archimède, a inventé une méthode pour écrire la suite des nombres premiers : le *crible d'Ératosthène* (voir ci-après).

Nous verrons ci-après (p. 28 et p. 32), que la notion de nombre premier peut être généralisée à d'autres nombres que les entiers naturels, et en particulier aux entiers relatifs et aux nombres complexes.

Théorème fondamental de l'arithmétique.

Tout nombre entier naturel peut être mis sous la forme d'un produit de facteurs premiers, d'une façon et d'une seule :

$$a = p_1\, p_2\, p_3 \dots p_n. \quad (1)$$

Quand on dit que la décomposition est *unique*, on entend « à l'ordre des facteurs près ».

Pour établir l'égalité (1), il suffit de diviser le nombre a donné par les nombres premiers successifs 2, 3, 5, ... jusqu'à ce qu'on aboutisse à un quotient égal à l'unité. Par exemple, soit $a = 6\,600$. Effectuons toutes les



Voici un petit problème amusant en rapport avec la théorie des nombres premiers. L'illustration ci-dessus représente une bataille sur laquelle on donne les renseignements suivants : si l'on multiplie entre eux, 1° : l'année de la bataille divisée par 25, 2° : le numéro du mois où cette bataille a eu lieu (janvier = 1, février = 2, etc.), 3° : le nombre de lettres de la ville assiégée, objet de cette bataille, 4° : l'âge de l'un des trois grands capitaines français qui périrent au cours de cette bataille, 5° : la longueur, en centimètres, d'une pertuisane utilisée dans cette bataille, on obtient comme produit 5 665 070. De quelle bataille s'agit-il et quel était le nom du capitaine dont il vient d'être question, sachant que les cinq nombres dont on a fait le produit sont tous des nombres premiers ?

La décomposition de 5 665 070 en facteurs premiers est unique ; elle donne : 5 665 070 = 2 × 5 × 37 × 61 × 251. Le facteur correspondant à l'année de la bataille est 37 ou 61 (27 × 25 = 925 ; 61 × 25 = 1525) ; or la pertuisane est une arme qui n'a été d'un usage courant qu'à partir de Louis XI : donc l'année 925 est à rejeter, et la bataille a eu lieu en 1525. Une chronologie historique nous apprend que la bataille de Pavie (5 lettres) a eu lieu le 24 février (mois n° 2) 1525, c'estdonc la bataille cherchée. Le facteur 251 est la longueur de la pertuisane, car 37 ne pourrait convenir. Quant au facteur 37, c'est l'âge d'un des trois capitaines morts devant Pavie, à savoir l'amiral de France Bonnivet, né en 1488, mort à 37 ans ; les deux autres capitaines morts à Pavie, La Trémoille et La Palice, avaient 65 et 55 ans. Peinture sur bois de Jan Cornelisz Vermeyen, 1525 (détail).

divisions possibles par 2, par 3, etc., en appelant q_1, q_2, ... les quotients successifs :

$$\frac{6\,600}{2} \Rightarrow q_1 = 3\,300\,; \qquad (2)$$

$$\frac{3\,300}{2} \Rightarrow q_2 = 1\,650 \qquad (3)$$

$$\frac{1\,650}{2} \Rightarrow q_3 = 825\,. \qquad (4)$$

Le nombre 825 n'est pas divisible par 2 ; on essaye la division par 3 et l'on trouve :

$$\frac{825}{3} \Rightarrow q_4 = 275\,. \qquad (5)$$

Le nombre 275 n'est pas divisible par 3, la division par 5 donne les quotients $q_5 = 55$ et $q_6 = 11$. Le nombre 11 lui-même est premier. On dispose les opérations comme suit, en écrivant en colonne les quotients successifs :

6 600	2
3 300	2
1 650	2
825	3
275	5
55	5
11	11
1	

Le nombre 6 600 s'écrit donc :

$$6\,600 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 11\,, \qquad (6)$$

ou, en utilisant la notation exponentielle :

$$6\,600 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 11\,. \qquad (7)$$

La décomposition d'un nombre en facteurs premiers est indispensable pour résoudre certains problèmes classiques d'arithmétique (recherche du PPCM ou du PGCD de deux nombres, etc. ; voir p. 137).

Crible d'Ératosthène.

● *Pour vérifier si un nombre est premier,* on peut évidemment essayer de le diviser par tous les nombres entiers inférieurs à lui : si aucune division n'est possible, le nombre est premier. Mais cette méthode est très peu commode, même si on se sert de calculatrices électroniques. Ératosthène a inventé une méthode plus simple, appelée crible d'Ératosthène.

Supposons que nous recherchions les nombres premiers inférieurs à 100. Inscrivons d'abord la suite des entiers, de 1 à 100, en supprimant les nombres pairs qui ne sont évidemment pas premiers (à l'exception de 2). On obtient le tableau suivant :

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
41	43	45	47	49	51	53	55	57	59
61	63	65	67	69	71	73	75	77	79
81	83	85	87	89	91	93	95	97	99

1 - On barre sur ce tableau les multiples de 3, de 5 et de 7 ; on obtient le tableau réduit suivant (en conservant les nombres 3, 5 et 7) :

1	3	5	7	~~9~~	11	13	~~15~~	17	19
~~21~~	23	~~25~~	~~27~~	29	31	~~33~~	~~35~~	37	~~39~~
41	43	~~45~~	47	~~49~~	~~51~~	53	~~55~~	~~57~~	59
61	~~63~~	~~65~~	67	~~69~~	71	73	~~75~~	~~77~~	79
~~81~~	83	~~85~~	~~87~~	89	~~91~~	~~93~~	~~95~~	97	~~99~~

2 - 11, qui n'est divisible par aucun nombre que par lui-même ou l'unité, est premier. Barrons les multiples de 11 : nous remarquons immédiatement que 2 × 11, 3 × 11, 4 × 11, 5 × 11, 6 × 11, 7 × 11, 8 × 11, et 9 × 11 ont déjà été barrés, au cours de l'opération précédente. Le premier multiple de 11 qui reste à éliminer est 11 × 11 = 121 : il n'est pas compris dans le tableau. Il n'y a donc aucun multiple de 11 à barrer ; de même les multiples de 13 inférieurs à 100, les multiples de 17 inférieurs à 100, etc., ont été barrés dans le tableau. En conséquence les nombres non barrés restants, à l'exception de l'unité, sont des nombres premiers. Pour avoir l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 100, il suffit d'ajouter 2 à cet ensemble restant, d'où :

nombres premiers < 100

$$= \left\{ \begin{matrix} 2, & 3, & 5, & 7, & 11, & 13, & 17, & 19, & 23, & 29, & 31, & 37, & 41, \\ 43, & 47, & 53, & 59, & 61, & 67, & 71, & 73, & 79, & 83, & 89, & 97 \end{matrix} \right\}$$

● *L'ensemble des nombres premiers est infini.* On peut démontrer très simplement que, quel que soit le nombre entier n, il y a au moins un entier supérieur à n. Pour cela, considérons le nombre défini par :

$$A = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n+1)\,. \qquad (8)$$

1 - Ou bien A est premier : alors la proposition est démontrée, puisque A est supérieur à n.

2 - Ou bien A n'est pas premier : alors il admet au moins un diviseur premier p (d'après le théorème fondamental de l'arithmétique). Or la division de A par un nombre inférieur à n donne pour reste 1 en vertu de la formule (8) ; donc le diviseur premier p de A est

obligatoirement supérieur à n : il existe donc un nombre premier supérieur à n.

Répartition des nombres premiers.

Il y a quelque chose d'irritant pour l'esprit dans la notion de nombre premier : on ne connaît pas la loi qui régit leur répartition. Le problème a été abordé notamment par Dirichlet et par Riemann, au XIXe siècle ; il a été repris, sur des bases statistiques, dans les années 1950, grâce à l'apparition des calculatrices électroniques.

● *Théorème de Dirichlet.* Toute progression arithmétique (voir p. 119) dont le premier terme et la raison sont des entiers premiers entre eux contient une infinité de nombres premiers.

Appelons a le premier terme d'une progression arithmétique et r sa raison ; la progression s'écrit :

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ \ldots,\ a+(n-1)r,\ \ldots \qquad (9)$$

Une progression arithmétique est une fonction de la variable entière n ; le terme de rang n a pour valeur :

$$f(n) = a+(n-1)r. \qquad (10)$$

Le théorème de Dirichlet s'énonce alors ainsi : parmi l'ensemble des valeurs $f(n)$ de la fonction définie par l'équation (10), il y a une infinité de nombres premiers.

On peut démontrer une proposition analogue à propos d'autres fonctions $f(n)$, par exemple pour la *fonction de Mersenne* :

$$f(n) = 2^n - 1, \qquad (11)$$

ou la *fonction de Fermat* :

$$f(n) = 2^{2^n} + 1. \qquad (12)$$

A l'aide de calculatrices électroniques, on peut calculer des valeurs $f(n)$ qui sont des nombres premiers. Le plus grand nombre premier connu à l'heure actuel semble être le nombre :

$$f(n) = 2^{4423} - 1 \qquad (13)$$

(c'est un nombre d'environ 1 200 chiffres !).

● *Raréfaction des nombres premiers.*

— En s'appuyant sur les recherches de Riemann relatives à la *fonction zēta* (*zēta* est le nom de la lettre grecque ζ) :

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots, \qquad (14)$$

J. Hadamard et La Vallée-Poussin ont montré que le nombre N de nombres premiers inférieurs à un entier x tend asymptotiquement vers :

$$N \simeq \frac{x}{\ln x} \qquad (15)$$

($\ln x$ désigne le *logarithme népérien* de x, voir sa définition p. 112). On en conclut que le nombre premier de rang N a *approximativement* la valeur suivante :

$$x \simeq N \ln x. \qquad (16)$$

L'équation (16) s'écrit encore, en tenant compte de la propriété fondamentale des logarithmes (le logarithme d'un produit égale la somme des logarithmes) :

$$\ln x \simeq \ln N + \ln(\ln x). \qquad (17)$$

Comme $\ln(\ln x)$ est très petit par rapport à $\ln x$, on peut écrire :

$$\ln x \simeq \ln N. \qquad (18)$$

De sorte que l'équation (16) s'écrit :

$$x \simeq N \ln N. \qquad (19)$$

● *Remarques* :

1 - La formule (15) est assez éloignée de la vérité pour x petit ; par exemple, pour $x = 100$, on a $\ln 100 = 4{,}605\,17$ et $N \simeq 21{,}7$. Le calcul direct montre, en fait, que $N = 25$ (voir ci-dessus le crible d'Ératosthène).

2 - Quand x croît, $\ln x$ croît, donc $1/\ln x$ décroît. De sorte que la proportion $N/x = 1/\ln x$ de nombres premiers inférieurs à x décroît aussi. Il y a *raréfaction* des nombres premiers quand x augmente. On exprime encore cette propriété en disant que la répartition des nombres premiers est *asymptotique* (pour la notion d'asymptote, voir la théorie des fonctions, p. 112).

3 - On peut préciser la formule (15) en faisant appel à des méthodes de haute analyse mathématique qui ne seront pas exposées ici.

Propriétés remarquables des nombres premiers.

● *Théorème de Fermat.* Fermat a énoncé le théorème suivant, qui fut démontré par ses successeurs :

« soit p un nombre premier quelconque et a un entier non divisible par p. La différence $a^{p-1} - 1$ est divisible par p. »

Prenons par exemple $a = 10$ et $p = 11$; on a :

$$a^{p-1} - 1 = 10^{10} - 1 = 9\,999\,999\,999, \qquad (20)$$

et le lecteur constatera aisément que ce nombre est divisible par 11.

● *Somme de carrés.*

— Si un nombre premier divise la somme de deux carrés premiers entre eux, il est lui-même la somme de deux carrés.

— Tout nombre premier de la forme $4n+1$ est la somme de deux carrés.

— Tout nombre premier impair qui divise une somme de quatre carrés est lui-même une somme de quatre carrés.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs et la théorie des congruences.

Le but de ce paragraphe n'est pas d'énumérer quelques propriétés spectaculaires des nombres entiers, bien qu'un tel exposé ne manque pas d'intérêt : il suffit de voir la place prise dans les revues scientifiques contemporaines par les « récréations mathématiques ». Certaines de ces récréations ont d'ailleurs joué un rôle de premier plan dans l'élaboration de la théorie des nombres (les premières en date et les plus célèbres sont sans doute le problème posé par Archimède dans L'*arénaire*, sur la représentation du nombre de grains de sable qu'il y a sur la Terre, et le *problème des bœufs*, posé par le même auteur). Ce que nous nous proposons ici c'est d'aborder certaines propriétés des entiers dont l'étude a permis la généralisation de l'arithmétique et débouche sur les branches les plus abstraites des mathématiques.

Les propositions de Fermat.

● *Le dernier « théorème » de Fermat.* Nous y avons fait allusion à plusieurs reprises : il s'agit de trouver trois nombres entiers x, y, z vérifiant la relation :

$$x^n + y^n = z^n. \qquad (1)$$

Fermat a affirmé (sans démonstration : c'est une « conjecture » et non un « théorème ») que l'équation (1) est impossible lorsque n est un entier supérieur à 2.

— Pour $n = 0$, l'équation (1) s'écrit :

$$x^0 + y^0 = z^0, \qquad (2)$$

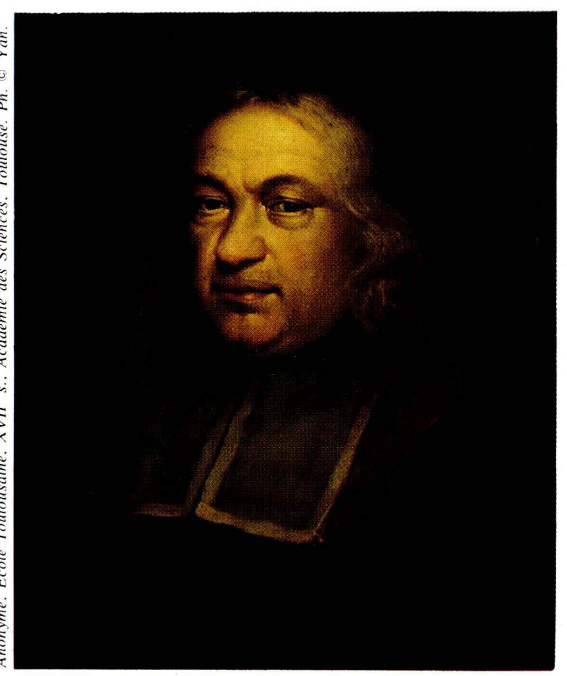
soit, avec la convention $x^0 = 1$ (sur le calcul des exposants, voir p. 139) :

$$1 + 1 = 1, \qquad (3)$$

relation qui est manifestement fausse. Ainsi donc nous devons écarter le cas $n = 0$.

— Pour $n = 1$, l'équation (1) s'écrit :

$$x + y = z \qquad (4)$$



Pierre Fermat (1601-1665), mathématicien français dont les travaux sont à l'origine de la théorie des nombres et du calcul infinitésimal.

Anonyme. Ecole Toulousaine. XVIIe s. Académie des Sciences. Toulouse. Ph. © Yan.

et le problème revient à trouver trois entiers dont l'un soit la somme des deux autres, ce qui est toujours possible.

— Pour $n = 2$, l'équation (1) s'écrit :

$$x^2 + y^2 = z^2. \qquad (5)$$

La géométrie nous enseigne (théorème de Pythagore) que c'est là la relation qui existe entre les côtés x et y et l'hypoténuse z d'un triangle rectangle. Pour résoudre (5), il faut donc trouver un triangle rectangle dont les côtés soient mesurés par des nombres entiers. Un triplet (x, y, z) vérifiant l'équation (5) est appelé *pythagoricien*. Les Anciens savaient que tout triangle dont les côtés étaient proportionnels à 3, 4, 5 était un triangle rectangle ; on a en effet :

$$3^2 + 4^2 = 5^2. \qquad (6)$$

La construction d'autres triplets pythagoriciens, c'est-à-dire la solution générale de l'équation (1) pour $n = 2$, se fait selon la règle suivante : on se donne deux entiers premiers entre eux (c'est-à-dire n'ayant pas de diviseur commun) p et q, tels que $p > q$ et que leur parité soit opposée (si p est pair, q est impair et réciproquement). On a alors les solutions de (1) :

$$x = 2pq; \quad y = p^2 - q^2; \quad z = p^2 + q^2. \qquad (7)$$

D'autre part tout triplet proportionnel au triplet (x, y, z) trouvé est aussi pythagoricien : ainsi les triplets (6, 8, 10), (9, 12, 15) qui sont proportionnels à (3, 4, 5) sont pythagoriciens. Voici le début d'une table de nombres pythagoriciens qui peut être évidemment prolongée à l'infini.

p	q	$x = 2pq$	$y = p^2 - q^2$	$z = p^2 + q^2$
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	3	24	7	25
5	2	20	21	29
5	4	40	9	41
6	1	12	35	37
6	5	60	11	61
etc.				

Nombres pythagoriciens

— Pour $n > 2$, l'équation (1) n'a pas de solution entière. Cette propriété a été démontrée dans un certain nombre de cas particuliers :

1 - La démonstration pour $n = 4$ se fait à l'aide d'une méthode mise au point par Fermat et appelée *méthode de descente infinie*. Une fois établi que le théorème de Fermat est vrai pour $n = 4$, on montre que la démonstration générale du théorème revient à démontrer que la proposition de Fermat est vraie pour n premier et différent de 2.

2 - La démonstration du théorème de Fermat pour $n = 3$ utilise une méthode définie par Euler ; Le Gendre et Dirichlet l'ont montré pour $n = 5$, Lamé, pour $n = 7$ et Dirichlet pour $n = 14$; Sophie Germain a en outre établi un théorème divisant le théorème de Fermat en deux cas : 1° le cas où x, y, z sont divisibles par l'exposant n ; 2° tous les autres cas. L'ensemble de ces travaux se sont déroulés dans la première moitié du XIXe siècle, parallèlement au développement de la théorie des nombres par Lagrange (1774), Le Gendre (*Théorie des nombres*, 1830) et Gauss, dont les découvertes dominent toute l'histoire des mathématiques au XIXe siècle.

3 - Kummer ouvrit une nouvelle voie à partir de 1844 en introduisant une généralisation de la notion de nombre (Théorie des *nombres idéaux*).

● *Autres propositions dues à Fermat.*

— Tout nombre entier est, au plus, la somme de quatre carrés.

— Tout nombre de la forme $4n+1$ est la somme de deux carrés.

— Si p est un nombre premier, alors le reste de la division de a^p par p est a.

— L'équation :

$$Ax^2 + 1 = y^2, \qquad (8)$$

dans laquelle A est donné admet toujours un couple de solutions entières (x, y). L'équation (8) a été nommée « équation de Pell » par Euler, qui, en l'occurrence, avait confondu ce mathématicien avec son compatriote et contemporain Wallis, qui avait aussi étudié la question.

Généralisation de la notion de nombre entier : l'ensemble $\mathbb{Z}$.

● *L'ensemble $\mathbb{Z}$* est appelé ensemble des *entiers relatifs* (ou, plus brièvement, ensemble des *entiers*),

par opposition à l'ensemble $\mathbb{N}$ des *entiers naturels* complété par le 0. Il comprend, outre le 0, les *entiers positifs* 1, 2, 3, ... (c'est-à-dire les nombres naturels) et les *entiers négatifs* -1, -2, -3, ... (c'est-à-dire les entiers naturels précédés du signe « $-$ »). Historiquement, l'ensemble $\mathbb{Z}$ a été introduit pour donner un sens à une expression telle que $x+1=0$, qui entraîne, on le sait, $x=-1$. Les règles de calcul sur les nombres négatifs ont été établies au XVe/XVIe siècle, sans démonstration. Mais la notion de nombre négatif, ainsi présentée, semble quelque peu arbitraire, malgré la justification *a posteriori* qu'on en a souvent donnée. Nous allons introduire l'ensemble $\mathbb{Z}$ d'une manière plus abstraite et plus générale, qui nous permettra de comprendre les règles du calcul sur les nombres relatifs.

● *Construction de l'ensemble* $\mathbb{Z}$. Partons de l'ensemble produit $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, composé de tous les couples (a, b) de nombres naturels. On peut le représenter graphiquement en marquant par des points sur une ligne horizontale les entiers naturels 1, 2, 3, ... et en faisant de même sur une ligne verticale. Un couple (a, b) de l'ensemble $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est un point du plan de coordonnées a et b (voir figure ci-dessous).

Définissons dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ une relation d'équivalence $\mathscr{E}$ en écrivant que

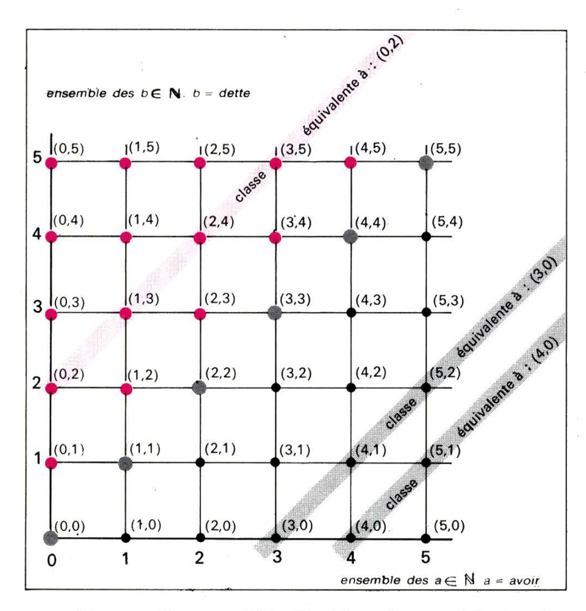
$$(a, b)\mathscr{E}(a', b') \qquad (9)$$

si, et seulement si :

$$a+b'=b+a'. \qquad (10)$$

Tous les couples tels que (a', b') équivalents à (a, b) selon $\mathscr{E}$ *forment une classe d'équivalence*, que nous désignerons par $\overline{(a, b)}=x$. Sur la figure ci-dessous, on constate que les couples équivalant à une classe $\overline{(a, b)}$ donnée sont alignés sur une bande diagonale (on en a figuré trois sur le graphique).

L'ensemble des classes d'équivalence, c'est-à-dire l'ensemble des bandes diagonales du graphique, est appelé *ensemble* $\mathbb{Z}$. Une classe d'équivalence particulière est appelée un *entier relatif* ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté, un *entier*.



L'ensemble produit $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et les classes d'équivalence pour la relation $\mathscr{E}$: $a+b'=b+a'$ dans cet ensemble. Chaque élément (a, b) de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est représenté par un point rouge ou noir (rouge si $a<b$; noir si $a>b$) ; les couples (a, a) sont représentés par un point gris. On a tracé sur le graphique les classes d'équivalence (4, 0), (3, 0) et (0, 2), matérialisées par des bandes grises ou rose. L'ensemble de ces classes est l'ensemble $\mathbb{Z}$.

● *L'addition dans* $\mathbb{Z}$. La somme de deux entiers relatifs $x=\overline{(a, b)}$ et $y=\overline{(c, d)}$ est un entier relatif ainsi défini :

$$\overline{(a, b)}+\overline{(c, d)}=\overline{(a+c,\ b+d)} \qquad (11)$$

Bien noter, que dans le membre de gauche, le signe « + » est celui de l'addition dans $\mathbb{Z}$, tandis que, dans le membre de droite, il désigne l'addition des entiers naturels a et c, b et d.

A partir de cette définition, et en tenant compte des lois de l'addition dans $\mathbb{N}$, on tire les propriétés suivantes de l'addition dans $\mathbb{Z}$:

1 - La classe $\overline{(0, 0)}$ est un élément neutre pour l'addition ; on a en effet :

$$\overline{(0, 0)}+\overline{(a, b)}=\overline{(a, b)}+\overline{(0, 0)}=\overline{(a, b)}. \qquad (12)$$

Nous conviendrons donc de poser :

$$\overline{(0, 0)}=0. \qquad (13)$$

Ici aussi, dans le membre de gauche « 0 » est le zéro de l'ensemble $\mathbb{N}$; à droite, « 0 » est le zéro de l'ensemble $\mathbb{Z}$. Si l'on craint une ambiguïté, on peut le désigner par $\overline{0}$.

2 - L'addition dans $\mathbb{Z}$ est commutative et associative.

3 - La somme des deux entiers relatifs $\overline{(a, b)}$ et $\overline{(b, a)}$ est nulle ; en effet :

$$\overline{(a, b)}+\overline{(b, a)}=\overline{(a+b,\ a+b)} \qquad (14)$$

et la classe $\overline{(a+b,\ a+b)}$ est équivalente à $\overline{(0, 0)}=0$. Les entiers $\overline{(a, b)}$ et $\overline{(b, a)}$ dont l'addition donne comme résultat l'élément neutre 0 sont dits *opposés* : tout entier relatif possède donc un opposé. Cette propriété est remarquable : elle n'existait pas dans l'ensemble $\mathbb{N}$.

● *Multiplication dans* $\mathbb{Z}$. On définit cette deuxième opération dans $\mathbb{Z}$ de la manière suivante :

$$\overline{(a, b)}\times\overline{(c, d)}=\overline{(ac+bd,\ ad+bc)}. \qquad (15)$$

On montre aisément qu'il s'agit d'une opération commutative et associative et qu'elle est distributive par rapport à l'addition. Le nombre $\overline{(1, 0)}$ est l'élément neutre pour la multiplication puisqu'on a :

$$\overline{(1, 0)}\times\overline{(a, b)}=\overline{(a, b)}\times\overline{(1, 0)}=\overline{(a+0,\ 0+b)}=\overline{(a, b)}. \qquad (16)$$

● *Conventions d'écriture.*

1 - Chaque nombre relatif (= chaque classe d'équivalence) de la forme $\overline{(a, b)}$ peut être représenté par l'élément $(m, 0)$ ou $(0, m)$ de la classe qui contient le nombre 0. Cet élément est appelé *élément canonique.* Ainsi la classe :

$$\overline{(a, b)}=\{(4, 0), (5, 1), (6, 2), (7, 3), ...\} \qquad (17)$$

sera représentée par l'élément (4, 0). De même la classe :

$$\overline{(c, d)}=\{(0, 2), (1, 3), (2, 4), ...\} \qquad (18)$$

sera notée (0, 2).

2 - On peut convenir en outre de poser :

$$\begin{cases}(m, 0)=+m\ ;\\ (0, m)=-m\ ;\\ (0, 0)=0.\end{cases} \qquad (19)$$

Le symbole « $+m$ » est celui de la classe d'équivalence dont l'élément canonique est $(m, 0)$; de même « $-m$ » est le symbole de la classe d'équivalence dont l'élément canonique est $(0, m)$. Un entier relatif est donc décrit par un entier naturel m, qu'on appelle sa *valeur absolue* et par un signe (+ ou $-$) ; il est dit *positif* si le signe est « + » et *négatif* dans le cas contraire. Le nombre 0 n'est ni positif ni négatif.

3 - On montre que l'ensemble $\mathbb{Z}$ est ordonné pour la relation : « $\leqslant$ » ; en particulier, tout entier négatif est inférieur à 0 et inférieur à tout entier positif ; 0 est supérieur à tout entier négatif et inférieur à tout entier positif. Enfin, de deux entiers relatifs de même signe, le plus grand est celui qui a la plus grande valeur absolue s'ils sont positifs, et celui qui a la plus petite valeur absolue s'ils sont négatifs.

4 - Avec les conventions d'écriture précédentes, le calcul sur les entiers relatifs obéit à des règles des signes simples, justifiées par la définition de l'addition et de la multiplication. L'application de ces règles permet la pratique de ce qu'on nomme le « calcul algébrique », c'est-à-dire le calcul sur les éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}$, et dont les principales règles sont rappelées p. 138.

5 - *Isomorphisme.* L'ensemble $\mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire les entiers naturels sans le zéro) et l'ensemble $\mathbb{Z}^*$ (c'est-à-dire l'ensemble des entiers positifs) sont *isomorphes* (voir p. 38, la définition de l'isomorphisme). On peut donc identifier ces deux ensembles, et identifier aussi $(+m)$ avec m. D'où une simplification de l'écriture.

● *Quelques propriétés arithmétiques fondamentales dans* $\mathbb{Z}$. Dans ce qui suit, nous désignerons un entier relatif par une lettre a, b, c, ..., et nous écrirons par exemple :

$$a=-2\ ;\quad b=+5=5\ ;\quad c=-37\ ;\quad \text{etc.}$$

— Comme dans $\mathbb{N}$, nous dirons que b est un *diviseur* ou un *facteur* de a, s'il existe un entier $c\in\mathbb{Z}$ tel que $a=bc$; a est aussi appelé *multiple* de b, et la relation « b divise a » se note : $b\,|\,a$.

— Un entier relatif p est dit *premier* s'il est différent de 0 et de ± 1 (lire « plus ou moins 1 ») et s'il n'admet comme diviseur que les nombres ± 1 et $\pm$ p. Si p est premier, il en est de même de son opposé $-p$. On démontre (théorème fondamental de l'arithmétique) que tout entier positif différent de 1 peut être écrit sous la forme d'un produit de facteurs premiers, et cela d'une seule manière (l'ordre des facteurs étant indifférent).

— On définit, comme dans $\mathbb{N}$, le PPCM et le PGCD de deux entiers relatifs.

— Diviser un entier a (*dividende*) par un entier b (*diviseur*), c'est trouver deux nombres q (*quotient*) et r (*reste*) appartenant à $\mathbb{Z}$ tels que :

$$a=bq+r,\quad \text{avec}\quad r<b. \qquad (20)$$

Par exemple, si $a=33$ et $b=-5$, on a $q=-6$ et $r=+3$, puisque :

$$33=(-5)\times(-6)+3. \qquad (21)$$

Théorie des congruences.

● *Remarque historique.* Dans ce qui précède, nous avons donné des entiers relatifs une définition abstraite en les considérant comme des symboles décrivant des classes d'équivalence dans l'ensemble $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Cette construction de l'ensemble $\mathbb{Z}$ justifie après coup les règles opératoires relatives aux nombres positifs et négatifs dont les mathématiciens se servaient, en Europe occidentale, depuis la Renaissance (voir p. 9), et elle repose sur l'importante notion de classe d'équivalence, qui s'est dégagée notamment des travaux arithmétiques de Gauss (*Disquisitiones Arithmeticae,* 1801 ; traduction française en 1806 sous le titre *Recherches arithmétiques*), faisant suite à ceux de Lagrange sur les *Résidus quadratiques* (voir ci-après, p. 30). Gauss a montré qu'il existait une analogie entre le calcul sur les classes d'équivalence et le calcul sur les nombres entiers. De ce point de vue, l'examen d'une relation d'équivalence fondamentale, baptisée *congruence,* est extrêmement féconde.

● *Définition.* Voici d'abord la définition donnée par Gauss dans les *Disquisitiones Arithmeticae* :

> « *Si un nombre a divise la différence des nombres b et c, b et c sont dits* congrus *suivant a, sinon* incongrus *; a s'appellera le* module *; chacun des nombres b et c,* résidu *de l'autre dans le premier cas et* non-résidu *dans le second.* »

Cette définition appelle un certain nombre de commentaires.

1 - Par « nombre » Gauss entend ici un entier positif, négatif ou nul, c'est-à-dire un élément de l'ensemble $\mathbb{Z}$.

2 - Il revient au même de dire :

« $b-c$ est divisible par a »

et :

« b et c divisés par a donnent le même reste ».

Diviser b, c ou $b-c$ par le nombre a, cela revient à le *mesurer* à l'aide de l'unité de mesure a. D'où le terme de *module*, du latin *modulus* = « mesure » pour désigner a.

3 - La notation (introduite par Gauss) utilise le signe « $\equiv$ » qui se lit « est congru à ». On écrira donc :

$$b\equiv c\ (\text{mod } a) \qquad (22)$$

et on lira : « b congru à c *modulo* a » (*modulo* est une forme du mot latin *modulus* pour désigner le complément de moyen ; « *modulo a* » signifie donc « par rapport à la mesure a »).

Dans la relation (22), et conformément à la définition de Gauss, c est le résidu de b par rapport au module a ; la congruence elle-même traduit le fait que $b-c$ est divisible par a. Mais, si $b-c$ est divisible par a, alors $c-b$ est aussi divisible par a et l'on peut écrire :

$$c\equiv b\ (\text{mod } a). \qquad (23)$$

Cette fois-ci, b est le résidu de c par rapport au module a.

4 - Exemples.

— La congruence :

$$22\equiv 7\ (\text{mod } 5) \qquad (24)$$

signifie : que $22-7$ est divisible par 5 et que 22 et 7 divisés par 5 donnent le même reste (ici : 2).

— La congruence :

$$22\equiv x\ (\text{mod } 5) \qquad (25)$$

n'est vérifiée que pour les valeurs de x qui, divisées par 5, donnent 2 comme reste, par exemple $x=7$, $x=12$, $x=17$,... Les valeurs de x qui satisfont à la congruence (25) sont les *racines* de la congruence considérée.

— La congruence :

$$x\equiv 0\ (\text{mod } 2) \qquad (26)$$

signifie que $x-0=x$ est divisible par 2, c'est-à-dire que x est un entier pair. Un entier impair y satisfait à la congruence.

$$y\equiv 1\ (\text{mod } 2). \qquad (27)$$

5 - Soit a un entier, appartenant à $\mathbb{Z}$; le reste r de la division de a par $p \in \mathbb{Z}$ est tel que :

$$a \equiv r \,(\mathrm{mod}\ p)\,. \qquad (28)$$

Cette congruence est liée à la définition de la division dans $\mathbb{Z}$. Appelons q le quotient de la division de a par p, on a, d'après la formule (20) du paragraphe b :

$$a = pq + r\,, \quad r < p\,; \qquad (29)$$

d'où :

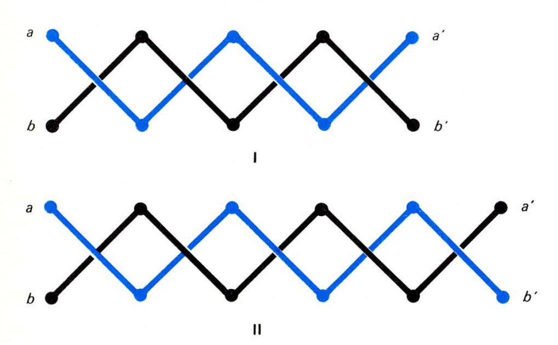
$$a - r = pq\,, \qquad (30)$$

ce qui montre que $a - r$ est divisible par p, propriété que traduit la congruence (28), dans laquelle le résidu r, c'est-à-dire le reste de la division de a par b, peut prendre les p valeurs : 0, 1, 2, ..., $p-1$.

6 - Les congruences peuvent donc nous servir à noter symboliquement des relations de divisibilité. Voici un exemple concret connu sous le nom de « problème du tisserand ». Il s'agit d'un artisan qui tresse des rubans circulaires (par exemple, des rubans pour chapeaux) avec des fils de couleurs différentes et qui désire fabriquer un ruban sans couture voyante. Si, par exemple, il emploie deux fils, on peut aboutir aux deux situations de la figure ci-dessous. Dans le premier cas (I), lorsqu'il « fermera » son ruban, en cousant a/a' et b/b', il obtiendra un ruban sans couture (a et a' sont bleus, b et b' sont noirs) ; dans le second cas (II), la couture sera apparente, puisque a, point bleu, viendra sur a', point noir, et que b, point noir, viendra sur b', point bleu. Après un certain nombre de tâtonnements, le tisserand, même s'il n'est pas mathématicien, constatera qu'il obtient un ruban sans couture dans le cas où le *nombre de croisements* de ses fils est un nombre pair, et qu'il obtient un ruban avec couture lorsque le nombre de croisements de ses fils est un nombre impair. Il pourra donc, en appelant C le nombre de croisements de fil noir sur fil bleu, écrire de la façon suivante la condition nécessaire pour que son ruban soit sans couture :

$$C \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2)\,. \qquad (31)$$

Bien entendu, les congruences n'ont pas été inventées à l'usage des tisserands ; ce sont des relations qui permettent non seulement d'exprimer des faits numériques simples, mais aussi de traiter de nombreux problèmes concernant les nombres entiers.



Le problème du tisserand.

• *Propriétés des congruences.*

— Il est facile de montrer que la relation de congruence est réflexive, symétrique et transitive, c'est-à-dire que l'on a, en appelant a, b, c et p des éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}$:

$$a \equiv a \,(\mathrm{mod}\ p)\,; \qquad (32)$$

$$a \equiv b \,(\mathrm{mod}\ p) \Leftrightarrow b \equiv a \,(\mathrm{mod}\ p)\,; \qquad (33)$$

$$\text{« } a \equiv b \,(\mathrm{mod}\ p) \text{ et } b \equiv c \,(\mathrm{mod}\ p) \text{ »} \Leftrightarrow a \equiv c \,(\mathrm{mod}\ p)\,. \qquad (34)$$

La relation de congruence, étant réflexive, symétrique et transitive, est une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$.

— La relation de congruence est conservée pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}$. C'est-à-dire que si $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\ p)$, on a aussi, pour tout $c \in \mathbb{Z}$:

$$a + c \equiv b + c \,(\mathrm{mod}\ p) \qquad (35)$$

et

$$ac \equiv bc \,(\mathrm{mod}\ p)\,. \qquad (36)$$

• *Classes d'équivalence dans* $\mathbb{Z}$. Tous les entiers x qui vérifient une congruence déterminée forment une *classe d'équivalence dans* $\mathbb{Z}$. Par exemple tous les entiers tels que :

$$x \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2) \qquad (37)$$

constituent la classe des nombres pairs (c'est-à-dire des nombres dont la division par 2 donne $\overline{0}$ comme reste). Convenons de désigner cette classe par $\overline{0}$ (zéro surligné) ; nous pourrons dire : « x est un $\overline{0}$ » ou « $x = \overline{0}$ ». De même, un nombre y tel que

$$y \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 2) \qquad (38)$$

est un nombre impair ; tous les nombres y qui vérifient la congruence (38) forment la classe des nombres impairs que nous désignerons conventionnellement par le symbole $\overline{1}$.

Plus généralement, considérons les entiers x qui donnent un même reste r lorsqu'on les divise par l'entier p, c'est-à-dire les entiers tels que :

$$x \equiv r \,(\mathrm{mod}\ p)\,. \qquad (39)$$

La division d'un nombre par p peut donner comme reste les nombres : 0, 1, 2, 3, ..., $p-1$; il y aura donc p classes de nombres dont le reste de la division par p est le même :

— la classe des nombres qui, divisés par p, donnent pour reste 0 ; nous la noterons : $\overline{0}$;

— la classe des nombres qui, divisés par p, donnent pour reste 1 ; nous la noterons : $\overline{1}$;

— la classe des nombres qui, divisés par p, donnent pour reste 2 ; nous la noterons : $\overline{2}$; etc.

Ces p classes sont appelées *classes résiduelles (mod p)*, ce qui est une autre manière de dire : « les classes de nombres qui, divisés par p, donnent un même reste ». L'ensemble de ces p classes résiduelles, noté $\mathbb{Z}/p$, est :

$$\mathbb{Z}/p = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{p-1}\}\,. \qquad (40)$$

Considérons, par exemple, le cas $p = 6$. L'ensemble $\mathbb{Z}/6$ est l'ensemble des classes résiduelles (mod 6), à savoir les classes $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$. Un nombre x appartenant à la classe $\overline{3}$ est un nombre dont la division par 6 donne comme reste 3 (par exemple : $x = 15$, $x = 21$, $x = 27$, etc.).

• *Calcul sur les classes d'équivalence.* Nous commencerons par examiner deux exemples simples.

— L'ensemble $\mathbb{Z}/2$ des classes résiduelles (mod 2) contient la classe des nombres pairs et la classe des nombres impairs, que nous avons notées respectivement $\overline{0}$ et $\overline{1}$. Nous pouvons définir dans l'ensemble $\mathbb{Z}/2$, deux opérations : l'addition et la multiplication. Il est facile de vérifier, en effet, que :

$$\text{nombre pair} + \text{nombre pair} = \text{nombre pair}\,, \qquad (41)$$

ce qui s'écrit, avec nos conventions :

$$\overline{0} + \overline{0} = \overline{0}\,. \qquad (42)$$

On vérifierait de même que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair et que la somme de deux nombres de parité différente est un nombre impair, ce qui s'écrit :

$$\overline{1} + \overline{1} = \overline{0}\,; \qquad (43)$$

$$\overline{0} + \overline{1} = \overline{1} + \overline{0} = \overline{1}\,. \qquad (44)$$

Ces résultats peuvent être résumés dans une *table d'addition* des classes de l'ensemble $\mathbb{Z}/2$:

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

Table d'addition des classes $\overline{0}$ et $\overline{1}$.

De même, on peut établir une table de multiplication pour les classes de nombres pairs et de nombres impairs (nombre pair × nombre pair = nombre pair, nombre impair × nombre impair = nombre impair ; etc.) ce qui donne :

×	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

Table de multiplication des classes $\overline{0}$ et $\overline{1}$.

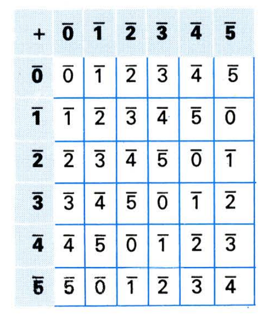
— Considérons maintenant l'ensemble $\mathbb{Z}/6$ des classes résiduelles (mod 6) : il comprend 6 éléments $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$, que l'on peut aussi combiner selon les lois de l'addition et de la multiplication en construisant les tables de ces deux opérations. Voici comment on procède sur un exemple particulier. Soit les nombres 21 et 17 ; divisés par 6, ils donnent respectivement comme restes 3 et 5. Ils appartiennent donc aux classes $\overline{3}$ et $\overline{5}$ (mod 6). Leur somme $21 + 17 = 38$, divisée par 6, donne comme reste 2, c'est-à-dire appartient à la classe $\overline{2}$. On peut montrer que ce résultat est général, c'est-à-dire que l'on a :

(entier appartenant à la classe $\overline{3}$) +
+ (entier appartenant à la classe $\overline{5}$)
= (entier appartenant à la classe $\overline{2}$). (45)

Ce qui s'écrit, avec nos conventions :

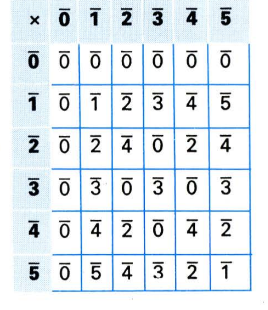
$$\overline{3} + \overline{5} = \overline{2} \qquad (46)$$

En procédant systématiquement pour toutes les combinaisons des éléments de $\mathbb{Z}/6$, nous établirons la table d'addition des classes résiduelles (mod 6), puis la table de multiplication des classes résiduelles (mod 6). Nous donnons ces deux tables ci-après, sans justification, mais le lecteur peut s'amuser à les reconstituer.



+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$

Table d'addition des classes résiduelles modulo 6.



×	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Table de multiplication des classes résiduelles modulo 6.

— Voici un exemple simple de l'utilisation de la table de multiplication. Soit un nombre a qui, divisé par 6, donne pour reste 4 et un nombre b qui, divisé par 6, donne pour reste 5. On considère le produit ab de ces deux nombres : quel sera le reste de la division de ab par 6 ? On peut répondre à cette question sans connaître a et b : le nombre a appartient à la classe $\overline{4}$, le nombre b à la classe $\overline{5}$, par conséquent leur produit appartient à la classe $\overline{2}$, comme on le constate à l'intersection de la ligne $\overline{4}$ et de la colonne $\overline{5}$. Donc le produit ab, divisé par 6, donnera pour reste 2.

— Bien entendu, le but de la théorie des congruences n'est pas uniquement de prévoir des résultats aussi simplistes. Voici une autre exemple « plus utilitaire », la fameuse « preuve par 9 » de la multiplication, bien connue de tous les écoliers. Le mécanisme peut s'en démontrer grâce à l'ensemble des classes résiduelles (mod 9).

1 - Soit un nombre a quelconque composé de chiffres dont la somme est S ; par exemple $a = 546$ et $S = 5 + 4 + 6 = 15$. On démontre (et nous l'admettrons ici) que $a \equiv S \,(\mathrm{mod}\ 9)$, c'est-à-dire que si l'on divise a par 9, on obtiendra le même reste qu'en divisant S par 9. Avec notre exemple, le reste de la division de 15 par 9 est 6, donc le reste de la division de 546 par 9 sera 6 (vérification aisée).

2 - Dans la mesure où une division n'est autre qu'une suite de soustractions, on peut « éliminer les 9 » dans la somme S de la manière suivante :

$S = \underbrace{5 + 4}_{9} + 6$ ↳ reste de la division de S par 9
= reste de la division de a par 9.
(éliminé)

3 - On peut s'exprimer autrement et dire : a appartient à la classe résiduelle $\overline{6}$.

Soit un second nombre $a' = 241$, pour lequel $S' = 2 + 4 + 1 = 7$. La division de 7 par 9 donne comme reste 7, par conséquent S' et a' appartiennent à la classe résiduelle $\overline{7}$. Considérons alors le produit $aa' = p$; soit P la somme des chiffres de p. La classe résiduelle (mod 9) de p et de P est la même ; elle est donnée par une table de multiplication des classes résiduelles (mod 9), à l'intersection de la ligne $\overline{6}$ et de la colonne $\overline{7}$. Voici cette table, qui peut être établie comme on l'a fait dans l'ensemble $\mathbb{Z}/2$ et dans l'ensemble $\mathbb{Z}/6$:

Table de multiplication des classes résiduelles modulo 9.

×	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

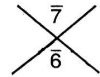
On voit, en lisant cette table, que :

$$\bar{6} \times \bar{7} = \bar{6}\,, \qquad (47)$$

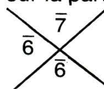
c'est-à-dire que le reste de la division par 9 de P doit être égal à 6 si nous n'avons pas fait d'erreur dans notre multiplication.

4 - Pour vérifier le résultat de l'opération 241×546, on calculera donc P, en faisant la somme des chiffres du produit, en éliminant les 9, et l'on obtient immédiatement le reste en question. Si ce reste est différent de 6, notre opération est sûrement fausse ; s'il est égal à 6, elle a des chances d'être exacte (mais non pas *toutes* les chances).

Avec notre exemple, supposons qu'on ait trouvé $241 \times 546 = 131\,585$. Traçons une grande croix et notons, en haut, la classe résiduelle (mod 9) à laquelle appartient 241, soit $\bar{7}$, et en bas la classe résiduelle (mod 9) à laquelle appartient 546, soit $\bar{6}$:



Faisons ensuite le produit des classes résiduelles $\bar{7} \times \bar{6}$, à l'aide de notre table de multiplication ; on trouve $\bar{6}$. Inscrivons $\bar{6}$ sur la partie gauche de la croix :



Il ne reste plus qu'à calculer P en éliminant les 9 pour avoir la classe résiduelle (mod 9) à laquelle il appartient. On trouve ici $\bar{5}$ qu'on inscrit à la droite de la croix ; on constate que $\bar{6}$ n'est pas égal à $\bar{5}$, ce qui prouve qu'on a fait une *erreur* dans la multiplication. Si l'on avait trouvé $\bar{6}$ on n'aurait pas été certain de l'exactitude de l'opération. Par exemple les nombres suivants appartiennent à la classe $\bar{6}$:

131 586, 131 568, 311 586,

mais il n'y en a qu'un qui représente la réponse exacte, à savoir 131 586.

5 - Si l'on examine la table de multiplication des classes résiduelles (mod 9), on constate que le produit de deux classes est obtenu en prenant le reste de la division par 9 de la somme des chiffres de ce produit. Par exemple : $\bar{7} \times \bar{8}$ donne $7 \times 8 = 56$, avec $5 + 6 = 11$; 11 divisé par 9 donne 2, donc :

$$\bar{7} \times \bar{8} = \bar{2}\,. \qquad (48)$$

C'est ce procédé qu'on applique systématiquement quand on fait la preuve par 9.

— Plus généralement, nous constatons qu'il est possible de définir, dans l'ensemble $\mathbb{Z}/p$, deux opérations sur les classes résiduelles qui les constituent, et que nous avons appelées addition et multiplication. On peut montrer, mais nous ne le ferons pas ici, que ces opérations ont les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication des entiers (commutativité, associativité, distributivité). On peut donc calculer sur des classes d'équivalence comme on calculerait sur des entiers, ce qui nous autorise à appeler « nombres » les classes d'équivalence. Cette remarque est très importante, car elle comporte en puissance la généralisation de la notion de nombre, qui a été une des grandes conquêtes du XIX[e] siècle mathématique.

Les résidus quadratiques.

La théorie des congruences conduit à introduire la notion de *résidu quadratique* (Euler, Le Gendre, Gauss) qui débouche sur d'importantes propriétés de la théorie des nombres.

● *Généralités.* Une congruence telle que

$$a \equiv b \pmod p \qquad (49)$$

énonce simplement une relation entre les entiers connus a et b. Si l'un des membres de la congruence contient des quantités inconnues, que nous noterons x, y, ..., *résoudre* la congruence, c'est trouver les valeurs de ces quantités, ou plus précisément les classes de valeurs à laquelle elles appartiennent. Supposons que l'on pose :

$$3\,x \equiv 1 \pmod 5\,. \qquad (50)$$

Résoudre (50) consiste à trouver un entier α tel que :

$$x \equiv \alpha \pmod 5\,. \qquad (51)$$

Pour résoudre la congruence (50), on peut, dans le cas présent, procéder comme suit, le nombre x peut prendre les valeurs :

$$\begin{cases} x = 5\,k = \text{multiple de } 5\,; \\ x = 5\,k + 1 = \text{multiple de } 5 + 1\,; \\ x = 5\,k + 2 = \text{multiple de } 5 + 2\,; \\ x = 5\,k + 3 = \text{multiple de } 5 + 3\,; \\ x = 5\,k + 4 = \text{multiple de } 5 + 4\,; \end{cases} \qquad (52)$$

le nombre k étant un entier. La famille de valeurs $x = 5\,k$ s'écrit :

$$x \equiv 0 \pmod 5 \qquad (53)$$

(ce qui signifie : « x est divisible par 5 ») ; la famille $x = 5\,k + 1$ s'écrit :

$$x \equiv 1 \pmod 5\,; \qquad (54)$$

etc. Les restes (résidus) de la division de $3\,x$ par 5 sont alors donnés par le tableau suivant :

x	$3\,x$	Reste de la division de $3\,x$ par 5
$5\,k$	$15\,k$	0
$5\,k+1$	$15\,k+3$	3
$5\,k+2$	$15\,k+\ 6 = 15\,k+\ 5+1$	1
$5\,k+3$	$15\,k+\ 9 = 15\,k+\ 5+4$	4
$5\,k+4$	$15\,k+12 = 15\,k+10+2$	2

Reste de la division de 3 x par 5.

La congruence (50) est donc vérifiée pour $x = 5\,k + 2$, c'est-à-dire pour $x \equiv 2 \pmod 5$. Nous dirons que cette relation est la solution de la congruence (50), ou encore que la congruence donnée admet comme *racine* $x \equiv 2$.

Selon le degré auquel figure l'inconnue, la congruence considérée sera dite du premier, du deuxième, ..., du n-ième degré.

● *Congruences du premier degré.* Elles se présentent sous la forme générale :

$$ax \equiv b \pmod p\,. \qquad (55)$$

On démontre que :

1 - si a et b sont différents de 0, elle admet une solution $x \equiv \alpha$;

2 - si b est seul nul, $x \equiv 0$;

3 - si a est seul nul, la congruence n'a pas de solution ;

4 - si a et b sont nuls en même temps, la congruence est vraie quel que soit x.

● *Résidus quadratiques.* Un entier a est dit *résidu quadratique* d'un nombre p, a et p étant premiers entre eux, lorsque la congruence :

$$x^2 \equiv a \pmod p \qquad (56)$$

peut être résolue. Les nombres autres que a, premiers avec p, sont dits *non-résidus quadratiques* (ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté, *non-résidus*).

Le Gendre a introduit le symbolisme suivant (1785) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{a}{p}\right) = 1 \quad \text{signifie : « } a \text{ est un résidu quadratique de } p \text{ » ;} \\ \left(\dfrac{a}{p}\right) = -\,1 \quad \text{signifie : « } a \text{ est un non-résidu quadratique de } p \text{ ».} \end{array} \right. \qquad (57)$$

Si p est un nombre premier différent de 2, il possède $(p-1)/2$ résidus quadratiques.

● *Loi de réciprocité.* Cette propriété a été démontrée partiellement en 1783 par Euler, et reformulée par Le Gendre en 1785 ; la démonstration générale a été donnée par Gauss, en 1795. Soit deux nombres premiers p et q ; s'ils sont tous deux de la forme $4\,n + 3$, alors :

$$\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) \qquad (58)$$

Si l'un au moins des deux nombres est de la forme $4\,n + 1$, alors :

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) \qquad (59)$$

Les deux formules (58) et (59) peuvent être résumées dans la formule unique :

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) \times (-1)^{\frac{p-1}{2} \times \frac{q-1}{2}}\,. \qquad (60)$$

Cette loi peut aussi se formuler ainsi : étant donné les deux congruences :

$$x^2 \equiv p \pmod q \quad \text{et} \quad y^2 \equiv q \pmod p\,, \qquad (61)$$

si $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$, une et une seule de ces congruences est soluble ; sinon elles sont ou toutes deux solubles ou toutes deux insolubles.

● *Les imaginaires de Galois.* Une congruence de degré n, par rapport à un module p premier, a, au plus, n racines lorsque n est inférieur à p. En 1830, Galois eut l'idée d'introduire des nombres analogues à l'imaginaire i de l'algèbre, permettant de conférer à chaque congruence exactement n racines. Ces nombres sont appelés *imaginaires de Galois.* Cette notion, qui fut modifiée ultérieurement par Dedekind, a contribué à l'extension de la notion de nombre et à la généralisation des propriétés des congruences.

Généralisation de la notion de nombre.

Le problème.

Au point où nous en sommes — c'est-à-dire, en gros, au point des connaissances vers 1830-1840 — nous avons atteint les résultats généraux suivants :

— les entiers naturels (l'ensemble $\mathbb{N}$) possèdent des propriétés très nombreuses, parmi lesquelles on doit citer : la divisibilité, l'existence et la répartition asymptotique des nombres premiers, le théorème fondamental de l'arithmétique ;

— les entiers relatifs (l'ensemble $\mathbb{Z}$) possèdent les mêmes propriétés, plus une, qui est importante : le fait que tout entier relatif est doté d'un opposé (ce qui n'impose aucune limite à l'opération « soustraction ») ;

— la théorie des congruences a montré qu'on pouvait opérer sur des classes d'équivalence dans $\mathbb{Z}$ (ou dans $\mathbb{N}$) de la même façon que sur des entiers; et la notion de résidu quadratique, jointe à la loi de réciprocité, permet de découvrir de nombreuses et nouvelles propriétés des entiers et surtout d'aborder avec fruit un certain nombre de généralisations.

DISQVISITIONES

ARITHMETICAE

AVCTORE

D. CAROLO FRIDERICO GAVSS

LIPSIAE

IN COMMISSIS APVD GERH. FLEISCHER, Jun.

1801.

Frontispice des Disquisitiones Arithmeticae de Gauss (1801), œuvre fondamentale en ce qui concerne la théorie des nombres au XIX[e] siècle.

L'idée naïve qu'un entier est un symbole permettant de *compter* des objets passe alors au second plan et se trouve remplacée par l'idée plus abstraite qu'un entier est un être mathématique, noté par un symbole, sur lequel on peut faire deux opérations (addition et multiplication) donnant un entier de même nature et possédant des propriétés de divisibilité, primarité, etc. De sorte que les mathématiciens qui vont s'intéresser à la théorie des nombres (Gauss, Galois, Kummer, Riemann, Hamilton, Jacobi) vont chercher à définir des *systèmes de nombres* (nous dirions maintenant des ensembles) caractérisés par les propriétés de deux opérations nommées « addition » et « multiplication » et dans lesquelles les opérations complémentaires de celles-ci (soustraction et division) sont toujours possibles. Ainsi parviendra-t-on à découvrir la structure de ces ensembles qu'on nomme des *corps* dans le langage de l'algèbre moderne (voir p. 43).

— Il faut noter que parallèlement et indépendamment, l'analyse progresse et que les notions de *nombres réels* et de *nombres complexes* — très différentes de celle d'entiers — font l'objet d'une étude tout aussi exigeante et tout aussi généralisatrice. Bien que ces chapitres ne fassent pas partie, directement, de la théorie des nombres, nous en dirons quelques mots dans ce qui suit pour traiter du problème de la généralisation de la notion de nombre dans son ensemble, sans nous limiter à la simple généralisation de la notion de nombre entier.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

● *Difficulté de la division dans $\mathbb{Z}$.* Si nous considérons l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, dont les éléments seront notés *a, b, c*, ..., l'équation :

$$a = bx \quad (b \neq 0) \tag{1}$$

n'est possible que si *b* est un diviseur de *a*. Dans ce cas, on aura la solution $x = a/b$, le reste de la division *a* par *b* étant nul. Dans tous les autres cas, il n'existe aucun entier relatif *x* vérifiant la relation (1). Par exemple il n'existe aucun $x \in \mathbb{Z}$ tel que $3x = 5$, car 5 n'est pas divisible par 3, mais l'équation $3x = 6$ admet la racine $x = 2$, puisque 6 divisé par 3 donne 2. Nous représenterons symboliquement la racine de l'équation (1) — quand elle existe — par le couple (a, b), que nous écrirons a/b ou ab^{-1}. Ce couple n'a un sens dans $\mathbb{Z}$ que si *b* est un diviseur de *a*. Cette limitation est due aux propriétés de l'ensemble $\mathbb{Z}$ et, pour l'éliminer, il faut construire un autre ensemble de nombres, tout comme en construisant $\mathbb{Z}$ nous avions éliminé les limitations à la soustraction.

● *L'ensemble* $\mathbb{Q}$. Considérons maintenant l'ensemble produit $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, c'est-à-dire l'ensemble de tous les couples d'entiers relatifs (a, b), avec $b \neq 0$, *a* et *b* étant pris dans cet ordre. Définissons sur cet ensemble la relation d'équivalence suivante :

$$(a, b)\,\mathscr{E}(a', b') \text{ si, et seulement si, } ab' = ba'. \tag{2}$$

Par exemple, les couples $(6, 2)$ et $(-12, -4)$ sont équivalents selon cette relation, car :

$$6 \times (-4) = 2 \times (-12) = (-24). \tag{3}$$

De même, $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$, $(-1, -2)$, $(-5, -10)$, ... sont des couples équivalents. Et ainsi de suite.

Comme nous l'avons fait pour construire l'ensemble $\mathbb{Z}$, représentons l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par un graphique, en notant bien que l'entier 0 ne fait pas partie de l'ensemble $\mathbb{Z}^*$. Chaque couple (a, b) de l'ensemble produit $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ est représenté sur le graphique par un point noir ; notons en bleu les couples équivalents par exemple à $(1, 2)$: ils forment une série de points alignés de part et d'autre de 0. Cet ensemble de points est l'image d'une classe d'équivalence qu'on désignera par $(1, 2)$. On voit qu'on obtient un autre couple de cette classe en multipliant 1 et 2 par un même entier relatif ; par exemple, si l'on prend le relatif $x = -7$, le couple $(-7, -14)$ est équivalent à $(1, 2)$.

D'une manière générale, tout élément de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, c'est-à-dire tout couple ordonné (a, b), avec $b \neq 0$, est appelé une *fraction algébrique* ; on l'écrira : a/b. Le premier terme du couple s'appelle le *numérateur* de la fraction, le second terme son *dénominateur*. L'ensemble $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ s'appelle l'*ensemble des rationnels*. Outre les fractions telles que $1/2$, $3/4$, etc., l'ensemble $\mathbb{Q}$ comprend aussi tous les entiers (positifs ou négatifs), puisqu'un entier quelconque *x* peut être mis sous la forme d'une fraction (par exemple, $+4 = 4/1$ ou $8/2$, ou $16/4$, etc.). On démontre aisément que l'on peut définir sur l'ensemble $\mathbb{Q}$ les opérations d'addition et de multiplication, et que ces opérations possèdent les mêmes propriétés (commutativité, associativité, distributivité) que dans l'ensemble $\mathbb{Z}$. L'élément neutre pour l'addition est le rationnel 0 (ou, si l'on veut, toute fraction dont le numérateur est nul) ; l'élément neutre pour la multiplication est le rationnel 1 (ou toute fraction dont le numérateur est égal au dénominateur).

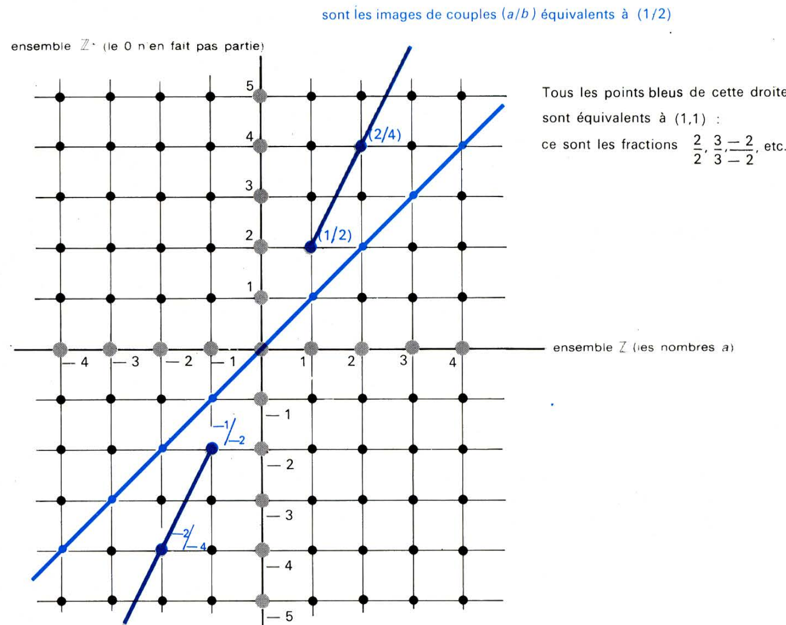
● *Intérêt algébrique du corps* $\mathbb{Q}$. Considérons à nouveau l'équation (1) ci-dessus, mais supposons cette fois-ci que *a* et *b* soient des rationnels appartenant à l'ensemble $\mathbb{Q}$. On peut toujours écrire :

$$x = \frac{a}{b} = ab^{-1}. \tag{4}$$

L'impossibilité rencontrée dans $\mathbb{Z}$ n'existe plus ici. Ainsi, la division de 3 par 4 est impossible dans $\mathbb{Z}$, car 4 n'est pas un diviseur de 3 ; dans $\mathbb{Q}$ elle fournit comme quotient le rationnel $q = 3/4$.

● *Notion d'inverse.* A tout nombre entier $a \in \mathbb{Z}$, différent de 0, correspond une fraction $(1, a) = a^{-1}$, qu'on appelle l'inverse de *a*.

Voir p. 138 les règles de calcul sur les fractions.



***Construction du corps** $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.*
Les points noirs représentent les éléments (couple a/b) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Les points gris sur l'axe vertical représentent les éléments équivalents à (0, 1), (0, 2), etc., qui sont des éléments nuls (la fraction a/b est nulle si, et seulement si, a = 0). Les points bleu foncé représentent des éléments (couple a/b) équivalents à la fraction (1/2) ; les points bleu clair représentent les couples équivalents à la fraction (1/1), qui est l'unité (élément neutre pour la multiplication). Il n'y a pas de couple (a, b) représenté sur l'axe horizontal, car les points de cet axe sont les images de (a, 0) et l'on a supposé b ≠ 0 en posant b ∈ $\mathbb{Z}^*$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.

La définition des nombres réels relève de l'analyse (voir p. 52). Nous ferons toutefois à leur sujet quelques remarques indispensables à ce stade de notre exposé.

● *Les nombres irrationnels.* En généralisant la notion d'entier de l'ensemble $\mathbb{N}$ à l'ensemble $\mathbb{Z}$, nous avons rendu possible la soustraction $x - y$ quels que soient les entiers *x* et *y* concernés. En passant de l'ensemble $\mathbb{Z}$ à l'ensemble $\mathbb{Q}$, nous avons rendu possible la division x/y quels que soient les entiers concernés (à condition que $y \neq 0$). Les nombres constituant l'ensemble $\mathbb{Q}$ — entiers ou fractionnaires — sont dits *rationnels* et permettent de résoudre toutes les équations du premier degré dont la forme générale est $ax + b = 0$, qui, si l'on se place dans l'ensemble $\mathbb{Q}$, admet toujours une racine $x = -b/a$ (si $a \neq 0$). En revanche, dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, l'existence de la racine *x* est liée à la condition : *a* est un diviseur de *b*.

Toutefois, l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels possède lui aussi ses frontières. Ainsi il est impossible de trouver, dans cet ensemble, une réponse à la question suivante : « Quel est le nombre *x* qui mesure la diagonale d'un carré de côté égal à l'unité ? ». En effet ce problème impose d'écrire (théorème de Pythagore) $x^2 = 2$, et il n'existe aucun $x \in \mathbb{Q}$ — c'est-à-dire aucune fraction rationnelle — qui, multiplié par lui-même, donne 2. Pour passer outre, il nous faut encore élargir l'ensemble $\mathbb{Q}$.

Si nous convenons d'appeler « racine de 2 » l'être mathématique qui, multiplié par lui-même donne 2, et si nous le notons, sans référence à son signe, $\sqrt{2}$, on aura, en vertu de cette convention et en respectant la règle des signes :

$$(-\sqrt{2}) \times (-\sqrt{2}) = 2 ; \qquad (+\sqrt{2}) \times (+\sqrt{2}) = 2. \tag{5}$$

Les nombres tels que $\sqrt{2}$ sont dits *irrationnels* : on entend par là qu'ils n'appartiennent pas à l'ensemble $\mathbb{Q}$. Nous étudierons plus loin leur définition (voir p. 53). Dès maintenant nous pouvons préciser que l'on calcule sur les irrationnels selon des lois analogues à celles qui régissent le calcul sur les rationnels. On aura, par exemple : $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{b} + \sqrt{a}$; etc. Retenons, au passage, les règles suivantes (connues depuis l'Antiquité) :

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab} ; \tag{6}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}. \tag{7}$$

(Ces règles sont des cas particuliers du calcul exponentiel, résumé p. 139.)

● *L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels* est constitué par l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels et par l'ensemble des irrationnels (qui ne comporte pas de symbole particulier). Sa définition a soulevé de nombreux problèmes techniques évoqués p. 52. Nous noterons que les nombres réels peuvent être répartis en *nombres algébriques* et *nombres transcendants*.

— La théorie des équations est du ressort de l'algèbre ; mais il nous faut y faire allusion ici pour comprendre la répartition des réels. Un type particulièrement important d'équation est représenté par les équations dites *polynômiales*, de la forme :

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0, \tag{8}$$

les *coefficients* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant des réels rationnels.

On montre en algèbre qu'une telle équation possède toujours *n* racines, c'est-à-dire qu'il y a *n* valeurs de *x* qui vérifient l'équation (8). Comme nous le verrons p. 70, toutes ces racines ne sont pas obligatoirement réelles. Tous les nombres — réels ou non réels, c'est-à-dire appartenant à $\mathbb{R}$ ou à un autre ensemble que $\mathbb{R}$ — qui peuvent être racines d'une équation du *n*-ième degré à coefficients rationnels sont dits *algébriques*.

— Vers 1844, J. Liouville a montré qu'il existait des nombres qui ne pouvaient pas être racine d'une équation entière à coefficients rationnels telle que (8), et il les a baptisés *nombres transcendants*. Par exemple le nombre π, introduit par Archimède dans l'étude du cercle et des corps ronds, est un nombre transcendant : *jamais* une équation telle que (8) n'admettra une solution $x = \pi$. L'ensemble des nombres transcendants est infini, mais nous en retiendrons deux, qui jouent un rôle de premier plan en mathématiques : le nombre π, déjà cité, dont la valeur approchée est :

$$\pi = 3{,}141\,592\,654\ldots, \tag{9}$$

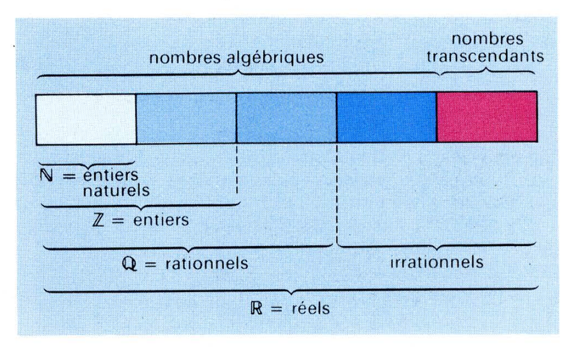
et le nombre *e* qui sert notamment à définir les *logarithmes népériens* et dont la valeur approchée est :

$$e = 2{,}718\,281\,828\ldots \tag{10}$$

La transcendance de π a été démontrée en 1882 par Lindemann et celle du nombre *e* par Hermite, en 1872.

Nous pouvons résumer la répartition des réels à l'aide du schéma ci-dessous.

L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.
Bien noter que tous les nombres transcendants sont irrationnels, mais que les irrationnels contiennent d'autres nombres que les nombres transcendants.



L'ensemble ℂ des complexes et les nombres hypercomplexes.

● *Le nombre* i. Une équation telle que $x^2 - 1 = 0$ admet deux racines réelles $x' = -1$ et $x'' = +1$: elle est en effet équivalente à $x^2 = 1$, et le réel 1 (*unité*) a deux racines carrées, qui sont ± 1. Mais que dire, par ailleurs, de l'équation :

$$x^2 + 1 = 0\,? \qquad (11)$$

Elle est équivalente à $x^2 = -1$, et il n'existe aucun nombre réel dont le carré soit négatif : l'équation (11) *n'a pas de racine dans* ℝ.

Pour construire un ensemble dans lequel l'équation (11) aurait une racine, introduisons le symbole i, avec la convention :

$$i^2 = -1\,. \qquad (12)$$

Dès lors, l'équation (11) s'écrit aussi $x^2 = i^2$, et admet les deux racines $+i$ et $-i$, qu'on appelle des *unités imaginaires*. Un réel tel que -9 s'écrit alors $9\,i^2$, et possède deux racines imaginaires $+3\,i$ et $-3\,i$ (on écrit : $\pm 3\,i$, qui se lit « plus ou moins 3 i »).

● *Les nombres complexes*, dont la théorie a été faite par Gauss, sont des nombres de la forme :

$$z = a + bi\,, \qquad (13)$$

a et b étant des réels. Leur ensemble, dans lequel on définit l'addition et la multiplication, est désigné par le symbole ℂ. Si $b = 0$, on a $z = a$, et le nombre est réel ; si $a = 0$, on a $z = bi$, et le nombre est dit *imaginaire pur*. Les nombres réels sont donc des nombres complexes particuliers (cas $a = 0$). La construction de l'ensemble des complexes et les propriétés de cet ensemble sont étudiées p. 55.

● *Généralisation.* La généralisation de la notion de nombre peut se poursuivre au-delà de l'ensemble des complexes. Nous verrons, en algèbre, qu'on peut construire des ensembles d'êtres mathématiques appelés *nombres hypercomplexes* et sur lesquels on peut *calculer*. L'étude des nombres hypercomplexes est une branche très importante de l'algèbre, l'*algèbre linéaire* (voir p. 58).

Généralisation de la notion d'entier.

Nous connaissons déjà les entiers naturels (l'ensemble ℕ) et les entiers relatifs (l'ensemble ℤ), qui appartiennent tous deux à l'ensemble des réels. Nous allons voir qu'il est possible de définir d'autres catégories d'entiers, qui ont en commun avec les entiers « ordinaires » les propriétés de divisibilité, primarité, etc. L'intérêt de cette généralisation est double : 1° elle élargit le champ des réflexions mathématiques ; 2° elle permet de vérifier la généralité des théorèmes de l'arithmétique.

● *Les entiers complexes* ont été étudiés par Gauss. Ce sont des complexes de la forme $a + bi$, dans lesquels a et b sont des entiers relatifs (et non des réels quelconques, comme dans le cas des nombres complexes).

— On appelle *norme* d'un nombre complexe $a + bi$ le nombre réel $a^2 + b^2$; quand a et b sont des entiers, la norme $a^2 + b^2$ est elle-même un entier appartenant à ℤ. Tout entier complexe tel que $a^2 + b^2 = 1$ est appelé *unité* complexe. C'est le cas pour les nombres ± 1 et $\pm i$. Démontrons-le pour le nombre -1 par exemple : on peut écrire $-1 = a + bi$, avec $a = -1$ et $b = 0$; d'où $a^2 + b^2 = 1$.

— Un entier complexe $a + bi$ est divisible par un autre entier complexe $c + di$ si, et seulement si, les nombres $ac + bd$ et $bc - ad$ sont divisibles par la norme $c^2 + d^2$ du diviseur. Cette importante propriété se démontre aisément de la manière suivante.

Si $a + bi$ est divisible par $c + di$, il existe un entier complexe $x + iy$ tel que :

$$(a + bi) = (x + iy)\,(c + di)\,. \qquad (14)$$

En effectuant les calculs, on trouve :

$$a + bi = (cx - dy) + (dx + cy)\,i\,. \qquad (15)$$

D'où le système :

$$\begin{cases} cx - dy = a\,; \\ dx + cy = b\,. \end{cases} \qquad (16)$$

Ce système admet pour solution :

$$\begin{cases} x = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2}\,; \\ y = \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,. \end{cases} \qquad (17)$$

Pour que le nombre $x + iy$ soit un entier complexe, il faut et il suffit que x et y soient des entiers, donc que $ac + bd$ et $bc - ad$ soient divisibles par $c^2 + d^2$, ce qui démontre la proposition.

— Tout entier complexe qui n'admet pas d'autre diviseur que lui-même ou les unités complexes $\pm i$ est un *nombre premier complexe*. On montre en outre que les quatre nombres $1 + i$, $1 - i$, $i - 1$ et $-1 - i$ sont premiers complexes.

● *Entiers algébriques.* Un nombre θ — réel ou complexe — est appelé *entier algébrique* s'il est racine de l'équation :

$$x^n + a_1\,x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\,x + a_n = 0\,, \qquad (18)$$

dans laquelle les coefficients a_1, a_2, ..., a_n *sont des entiers* : l'équation (18) est donc une forme particulière de l'équation (8) ci-dessus, dans le cas où $a_0 = 1$ et où les coefficients sont des entiers et non des rationnels quelconques. D'une manière générale, l'ensemble des entiers algébriques est composé de tous les nombres de la forme :

$$b_0 + b_1\,\theta + b_2\,\theta^2 + \cdots + b_r\,\theta^r\,, \qquad (19)$$

b_0, b_1, ..., b_r étant des coefficients rationnels et θ une racine de l'équation (18). On peut démontrer que la somme, la différence et le produit de deux entiers algébriques sont des entiers algébriques ; on peut définir sur l'ensemble des entiers algébriques les caractères de divisibilité, la notion de nombre premier algébrique, etc.

● *Idéaux de Kummer.* Kummer a montré (1847) que le théorème fondamental de l'arithmétique (unicité de la décomposition en facteurs premiers) ne s'appliquait pas à l'ensemble des entiers algébriques. Toutefois, la propriété peut être établie si l'on adjoint à cet ensemble un autre ensemble dont les éléments sont appelés des *idéaux*. Voici brièvement l'essentiel de la théorie.

Soit $\{a, b, ..., s, t\}$ l'ensemble des entiers algébriques. Si $a = bc$, c'est-à-dire si a est divisible par b, alors l'ensemble des multiples sa de a est inclus dans l'ensemble des multiples sb de b : à la notion de divisibilité, on peut donc substituer la notion d'inclusion d'un ensemble dans un autre. Cela dit, l'ensemble des multiples sa de a est appelé *idéal* ou *idéal principal* et peut être noté α. Les êtres mathématiques tels que α peuvent faire l'objet de calculs, à l'instar des entiers en général. En particulier on peut définir la *divisibilité* d'un idéal par un autre et la notion d'*idéal premier*. Enfin on démontre, à propos des idéaux de Kummer, le théorème fondamental de l'arithmétique : tout idéal non premier peut être représenté par un produit de facteurs idéaux premiers et cette décomposition est unique.

● *Résumé.* Dans ce qui précède, nous avons rencontré des ensembles dont les éléments sont appelés des *nombres*, et qui peuvent être construits de proche en proche à partir de l'ensemble ℕ* des entiers naturels. Les règles de calcul dans ces ensembles sont analogues aux règles de l'arithmétique élémentaire et concernent deux opérations fondamentales : l'addition et la multiplication, auxquelles on associe les opérations « inverses », la soustraction et la division. L'élargissement de la notion de nombre rend possible toutes les opérations. Voici la liste de ces ensembles.

ℕ*	:	entiers naturels.
ℕ	:	entiers naturels + 0.
ℤ	:	entiers relatifs.
ℚ	:	nombres rationnels.
ℝ	:	nombres réels.
ℂ	:	nombres complexes.
ℤ/n	:	classes résiduelles modulo *n*.

L'introduction, avec ℤ, des nombres négatifs, peut conduire à distinguer les entiers positifs $\mathbb{Z}^+$ et les entiers négatifs $\mathbb{Z}^-$; de même on distingue les rationnels positifs $\mathbb{Q}^+$ des rationnels négatifs $\mathbb{Q}^-$ et les réels positifs $\mathbb{R}^+$ des réels négatifs $\mathbb{R}^-$.

● *De l'arithmétique à l'algèbre.* Les propriétés des ensembles ℕ, ℤ, etc. proviennent de ce qu'on nomme leur *structure*, c'est-à-dire de caractéristiques très générales qui peuvent être exprimées par un petit nombre d'*axiomes*. A partir des travaux de Lagrange, Gauss et Galois, les mathématiciens du XIXe siècle ont élaboré une *algèbre des structures* qui se trouve au confluent de la théorie des nombres, de l'algèbre classique, de la géométrie, de la topologie et de l'analyse. C'est sur cette algèbre des structures que repose une bonne partie — sinon la totalité — des mathématiques dites « modernes ».

Problèmes classiques de la théorie des nombres.

La représentation d'un nombre par une forme quadratique.

On appelle *forme quadratique* un polynôme (voir la définition p. 66), dont les termes sont tous du deuxième degré. Ainsi $x^2 - y^2$ est une forme quadratique à deux indéterminées, x et y ; $3\,x^2 - 5\,xy + z^2$ est une forme quadratique à trois indéterminées x, y et z (le terme en xy est du deuxième degré : c'est le produit de deux termes du premier degré). Nous allons nous intéresser ici aux *formes quadratiques binaires*, c'est-à-dire à deux indéterminées, de la forme :

$$f = ax^2 + bxy + cy^2\,. \qquad (1)$$

La forme quadratique f est dite réelle ou complexe selon que les coefficients a, b, c sont eux-mêmes réels ou complexes.

S'il existe deux entiers, u et v non tous deux nuls, tels que l'entier m soit égal à :

$$m = au^2 + buv + cv^2\,, \qquad (2)$$

on dit que l'entier m est représenté par la forme quadratique f ; si, de plus, u et v sont premiers entre eux, la représentation est dite primitive.

L'étude d'une forme quadratique conduit à calculer deux grandeurs fonction des coefficients et qu'on nomme le *déterminant D* et le *discriminant* Δ, définis par :

$$D = \frac{ac - b^2}{4}\,; \quad \Delta = -4\,D = b^2 - 4\,ac\,. \qquad (3)$$

(Tous les collégiens reconnaissent dans Δ le fameux discriminant de l'équation du second degré.) Nous supposerons dans ce qui suit que a, b et c sont réels.

1 - Si $\Delta < 0$ et $a \neq 0$, f représente un entier du signe de a ; la forme quadratique est dite *définie* et si a est positif, elle est dite *définie positive.*

2 - Si $\Delta > 0$, f représente à la fois les nombres positifs ou négatifs ; la forme quadratique est dite *indéfinie.*

On montre qu'une forme quadratique f est équivalente à toute forme f' obtenue en remplaçant x et y par des indéterminées x' et y' telles que :

$$x = \alpha x' + \beta y'\,; \quad y = \gamma x' + \delta y'\,. \qquad (4)$$

Les nouvelles grandeurs indéterminées sont reliées aux anciennes par des relations linéaires, c'est-à-dire, du premier degré : on dit qu'on a appliqué à f une *transformation linéaire.* Les formes quadratiques équivalentes à une forme donnée constitue une *classe*, caractérisée par une forme F :

$$F = Ax^2 + Bxy + Cy^2\,, \qquad (5)$$

appelée *forme réduite* de la classe considérée. Les coefficients A, B, C de la forme F vérifient les relations :

$$-A < B \leqslant A \leqslant C\,, \quad \text{avec} \quad B \geqslant 0\,, \quad \text{si} \quad C = A\,. \qquad (6)$$

Le problème de la représentation d'un entier par une forme quadratique a été étudié par Gauss (1801), Eisenstein (1847), H. Minkowski (1884), H. D. Kloosterman et V. Tartakovskij (1924), C. L. Siegel (1936), B. W. Jones et G. Pall (1944), L. E. Dickson, Hasse, etc.

Le problème de Waring (1770).

E. Waring a énoncé la conjecture suivante : tout entier positif est la somme au plus de neuf cubes (entiers, positifs) ou de dix-neuf puissances quatrièmes ou de trente-cinq puissances cinquièmes, et, plus généralement, d'au plus g puissances k-ièmes, g étant une fonction de k. Ce problème a été étudié notamment par Hardy, Littlewood, et Ramanujan (1917), puis par I. M. Vinogradov, L. E. Dickson et de nombreux mathématiciens. La conjecture de Waring a été démontrée dans un très grand nombre de cas, et les différentes recherches qu'elle a engendrées ont donné naissance à diverses méthodes d'analyse des nombres.

Le problème de Goldbach (1742).

C. Goldbach a énoncé la conjecture suivante : tout entier est la somme de trois nombres premiers, tout entier pair est la somme de deux nombres premiers.

Cette conjecture est restée sans démonstration jusqu'en 1930. A partir de cette époque, on a montré que tout entier positif suffisamment grand était la somme d'au plus 800 000 nombres premiers (L. Šnirel'man, 1930), puis d'au plus 2 808 nombres premiers (N. P. Romanov, 1935), d'au plus 71 nombres premiers (Heilbronn et Landau, 1936), d'au plus 67 nombres premiers (Ricci, 1937). C'est Vinogradov qui a donné, en 1937, la démonstration de la conjecture de Goldbach.

ANALYSE COMBINATOIRE.

Avant d'aborder la théorie des structures algébriques et l'algèbre en général, il nous faut consacrer quelques lignes à une branche des mathématiques reliée à la théorie des nombres, mais aussi à d'autres domaines importants des mathématiques, comme le calcul des probabilités, la théorie des groupes, la topologie, etc., et qu'on nomme l'*analyse combinatoire.*

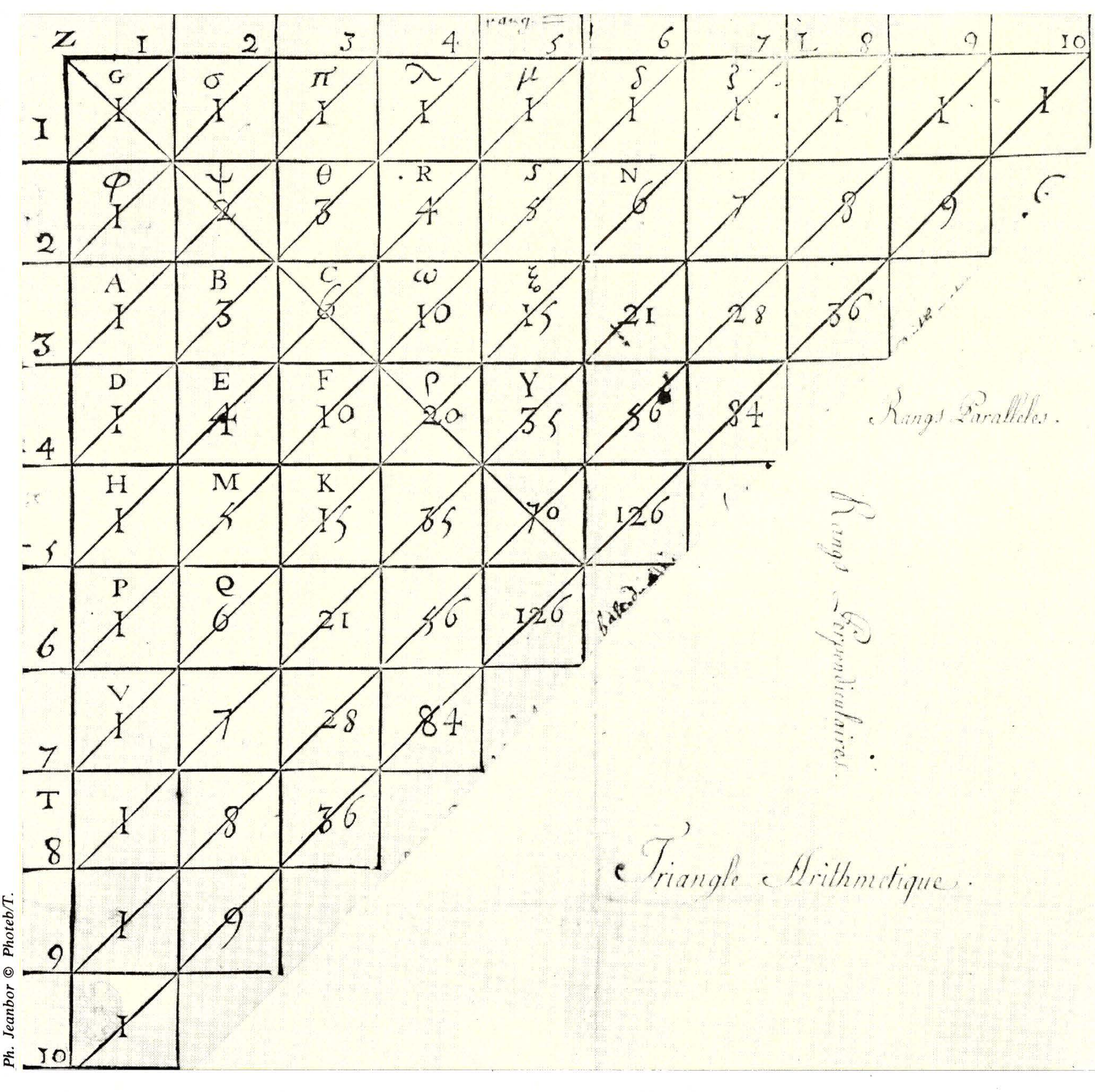
Coup d'œil historique.

Les premières recherches d'analyse combinatoire concernent les *nombres figurés* : elles ont été le fait des Pythagoriciens et de Diophante d'Alexandrie. Dans les temps modernes, la question a été reprise, en liaison avec l'étude des combinaisons p à p de n objets, la théorie des nombres et l'analyse par Fermat (1621), Lagrange, Euler et Gauss.

A la fin du XVIIe siècle, les exigences du calcul différentiel naissant ont mis en valeur le problème du *binôme de Newton* (voir ci-dessous), dont la formule était connue des mathématiciens chinois du XIVe siècle, et qui a été énoncée par Stifel (1543), Pascal (1665), Leibniz (1676), Newton (1676). La *série* constituée par le binôme a été étudiée par J. Wallis et Jacques Bernoulli (1713).

Au début du XVIIIe siècle, J. Bernoulli — créateur avec Pascal du calcul des probabilités — étudie les permutations, les arrangements et les combinaisons. Puis la théorie des équations conduit les mathématiciens à examiner les *fonctions symétriques des racines*, question timidement abordée par A. Girard en 1629 et développée par A. de Moivre (1698), Newton (1707), Waring (1762), Lagrange (1770) ; elle sera reprise par Galois au XIXe siècle. La *théorie des déterminants* remonte à Leibniz (1690), mais elle a été principalement développée par Cramer (1750), Lagrange, Gauss et Cauchy (1815).

Enfin, au XIXe siècle, sont apparus les problèmes de partition des nombres (Ferrers, 1853 ; Sylvester, 1882).



Ph. Jeanbor © Photeb/T.

Le « triangle de Pascal » devrait être appelé, en fait, le « triangle de Stifel », car c'est dans l'Arithmetica integra, publiée en 1543 par ce savant allemand, que se trouvent étudiées les propriétés de cette figure, identique à celle que Pascal a tracée dans son Traité du triangle arithmétique, un siècle plus tard (vers 1654), pour résoudre certains problèmes en rapport avec le calcul des probabilités.

Le triangle arithmétique de Pascal (1654).

En étudiant l'algèbre élémentaire les formules donnant le développement de $(a+b)^2$ et $(a+b)^3$:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2 . \quad (1)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,ab^2 + b^3 . \quad (2)$$

L'examen de ces deux formules montre que les termes littéraux du développement de $(a+b)^2$ sont tous du second degré (a^2, ab, b^2), et ceux du développement de $(a+b)^3$ du troisième degré (a^3, $a^2\,b$, ab^2, b^3). Les coefficients numériques sont :

1 2 1 pour $(a+b)^2$, (3)

1 3 3 1 pour $(a+b)^3$. (4)

On peut montrer que le développement de $(a+b)^n$ ne comprend que des termes littéraux du n-ième degré (a^n, $a^{n-1}\,b$, $a^{n-2}\,b^2$, ..., ab^{n-1}, b^n), et que les coefficients de ce développement sont donnés par une construction appelée *triangle de Pascal* et découverte, en fait, par l'Allemand Stifel en 1543. On peut en effet ranger les coefficients de $(a+b)^n$ triangulairement, comme on l'a fait ci-après :

```
                1
              1   1              ← 1ère ligne
            1   2   1            ← 2e ligne
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    1   6  15  20  15   6   1    ← 6e ligne
 1 ...     etc.      etc.   ... 1 ← n-ième ligne
```

La construction est simple. Le sommet du triangle porte le nombre 1, qui est répété au début et à la fin de chaque ligne de nombres. La première ligne contient les deux nombres 1 et 1 ; chaque nombre autre que 1 est la somme des deux nombres sous lesquels et entre lesquels il est placé. Ainsi le 2 de la 2e ligne est égal à $1+1$; le premier 3 de la 3e ligne est la somme $1+2$; etc. Nous avons arrêté le triangle à la 6e ligne, mais on peut évidemment le continuer indéfiniment. La 7e ligne commencée par 1, qui serait suivie de $1+6=7$, $6+15=21$, etc., jusqu'au 1 final. On aurait donc :

7e ligne : 1 7 21 35 35 21 7 1.

On constate que la 2e ligne (1, 2, 1) donne les coefficients du développement de $(a+b)^2$; la troisième ligne (1, 3, 3, 1) donne le développement de $(a+b)^3$; il en est de même pour les lignes suivantes. Ainsi $(a+b)^6$ a pour coefficients (1, 6, 15, 20, 15, 6, 1). Comme tous les termes littéraux de ce développement doivent être du 6e degré, on aura donc :

$$(a+b)^6 = a^6 + 6\,a^5\,b + 15\,a^4\,b^2 + 20\,a^3\,b^3 + 15\,a^2\,b^4 + 6\,ab^5 + b^6 . \quad (5)$$

Fonction factorielle n et formule du binôme.

Fonction factorielle *n*(*n* !).

Si n est un entier naturel, $n > 1$, la fonction factorielle n, notée $n\,!$, est le produit des n premiers entiers naturels.

$$n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1) \times n . \quad (1)$$

Le point d'exclamation utilisé pour noter cette fonction exprime (sans doute) sa croissance rapide. On a en effet :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\,! = 1 \times 2 = 2 \;; \\ 3\,! = 1 \times 2 \times 3 = 6 \;; \\ 4\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 \;; \\ 5\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 \;; \\ \text{etc.} \\ 10\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \\ \qquad = 3\,628\,800 . \end{array}\right. \quad (2)$$

On notera, à propos de cette fonction, les points suivants.

1 - Pour tout $n > 1$, on a la relation de récurrence :

$$(n+1)\,! = (n+1)\,(n\,!) . \quad (3)$$

2 - En conséquence on doit poser $1\,! = 1$ et $0\,! = 1$.

3 - Quand n est très grand, on peut donner une approximation de $n\,!$ en utilisant la *formule de Stirling* (1730) :

$$n\,! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\,\pi n}\,(1+\varepsilon) , \quad (4)$$

ε désignant une quantité aussi petite que l'on veut. On en tire :

$$n\,! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\,\pi n} , \quad (5)$$

e étant la base des logarithmes népériens (voir p. 31). Par exemple, pour $n = 50$, en prenant $e = 2{,}718\,281\,828$, on a $n/e = 18{,}393\,972\,06$, et $(n/e)^n \simeq 1{,}713\,1 \times 10^{63}$, d'où :

$$50\,! \simeq 1{,}713\,1 \times 10^{63} \times 17{,}724\,54 = 30{,}364 \times 10^{63} , \quad (6)$$

soit un nombre de 65 chiffres !

Le binôme de Newton.

Considérons une expression algébrique de la forme $x+a$, dans laquelle x et a sont des nombres réels ; a est un coefficient, x est une indéterminée. Une telle expression est appelée un *binôme du premier degré*. Nous allons nous poser la question suivante : développer la puissance n-ième du binôme, à savoir $(x+a)^n$.

Ce développement peut se faire en utilisant le triangle arithmétique de Pascal. Si le binôme est de la forme $(x-a)$, le développement de $(x-a)^n$ se fait de la même façon, à la condition de remplacer le signe « + » par le signe « − » devant les termes où a est à une puissance impaire.

On peut aussi montrer que le coefficient de rang p a pour valeur le nombre de combinaisons de n objets pris p à p comme on l'explique ci-après (p. 34) ; ce nombre s'écrit symboliquement C_n^p ou $\binom{n}{p}$. La for-

mule du binôme s'écrit alors :

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1} a x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{p} a^p x^{n-p} + \cdots a^n, \quad (7)$$

en utilisant la formule donnant $\binom{n}{p}$ (voir ci-dessous, **D**, *c*), le développement du binôme s'écrit donc :

$$(x+a)^n = x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} a^2 x^{n-2} + \cdots + \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} a^p x^{n-p} + \cdots + a^n \quad (8)$$

Dans le cas où $n = 6$, par exemple, on aura :

$$(x+a)^6 = x^6 + 6ax^5 + \frac{6\times5}{2!} a^2 x^4 + \frac{6\times5\times4}{3!} a^3 x^3 + \frac{6\times5\times4\times3}{4!} a^4 x^2 + \frac{6\times5\times4\times3\times2}{5!} a^5 x + a^6 \quad (9)$$

On constatera que les coefficients 1, 6, $6\times5/2!$, ... sont respectivement égaux à (1, 6, 15, 20, 15, 6, 1), c'est-à-dire aux nombres de la sixième ligne du triangle de Pascal.

Permutations, arrangements, combinaisons.

Permutations.

Considérons l'ensemble $\{a, b, c\}$. Si nous tenons compte de l'*ordre* dans lequel les éléments sont rangés, l'ensemble $\{a, b, c\}$ est différent de l'ensemble $\{a, c, b\}$ par exemple. Tous les joueurs de « tiercé » connaissent la différence qui existe entre un tiercé « dans l'ordre » et un tiercé « dans le désordre ». L'opération par laquelle on intervertit les éléments d'un ensemble s'appelle une substitution ; son résultat, à savoir $\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$, etc. est une *permutation*. La question que nous posons est la suivante : combien y-a-t-il de permutations possibles dans un ensemble de n éléments ?

Appelons P_n ce nombre et prenons d'abord le cas où $n = 2$. Alors il n'est pas besoin d'être grand clerc pour trouver que

$$P_2 = 2. \quad (1)$$

Le cas $n = 3$ est connu, comme nous le disions, de tous les joueurs de tiercé. Il y a six ordres différents possibles pour 3 éléments (3 chevaux par exemple). Appelons a, b, et c les trois éléments, on a les six permutations suivantes :

abc *bca* *cab*
acb *bac* *cba*.

Nous écrirons donc

$$P_3 = 6. \quad (2)$$

Nous allons établir la formule donnant P_n, en utilisant la notion d'application bijective d'un ensemble dans un autre.

Appelons $E = \{a, b, c, \dots k\}$ l'ensemble de n éléments permutables et considérons l'ensemble fini d'entiers naturels $F = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Une permutation particulière de E est définie en donnant un « numéro d'ordre » à chaque objet $\{a, b, c \dots k\}$, ce numéro d'ordre étant compris entre 1 et n. Par exemple on donne le numéro 1 à l'élément c, le numéro 2 à l'élément a, le numéro 3 à l'élément k, et ainsi de suite jusqu'à ce que les n objets aient tous un numéro distinct, chaque numéro étant un élément de l'ensemble F. Cela revient à dire qu'on a réalisé *une application bijective de E dans F.*

Il y a évidemment n façons de choisir l'élément de E qui s'applique sur 1. Ce choix fait, il reste $(n-1)$ éléments que l'on peut appliquer sur 2, donc $(n-1)$ choix possibles. Ce choix fait, il y a $(n-2)$ façons de choisir l'élément appliqué sur 3 ; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul élément de E non pourvu d'un numéro d'ordre, et qu'on applique sur n, dernier nombre de l'ensemble F. Le nombre total d'applications bijectives, c'est-à-dire de permutations est donc :

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots\times3\times2\times1 = n! \quad (3)$$

Comme on l'a dit précédemment, la fonction $n!$ croît très rapidement. Le nombre de permutations de n objets est donc rapidement très grand. Donnons un exemple concret pour illustrer ce fait. Imaginons qu'un joueur invétéré, que nous nommerons pour faciliter notre récit « Champion », participe à un concours publicitaire dans lequel on lui demande de classer par ordre de préférence 10 vedettes de l'actualité. Champion, pour être certain de gagner, décide de dresser autant de listes qu'il y a de rangements possibles de ces 10 vedettes, et il se met — avec une grande imprévoyance — au travail. En effet, il s'engage dans une affaire dont il ignore l'ampleur : il existe $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$ permutations possibles des dix noms de vedettes et, en supposant qu'il mette une demi-minute pour dresser une liste, Champion devra écrire sans s'arrêter un seul instant pendant 1 263 jours 11 heures 20 minutes avant d'arriver au bout de sa tâche. Il sera mort de faim et d'épuisement avant d'en avoir terminé.

Arrangements.

Rendons-nous sur un terrain de courses hippiques, un jour de Grand Prix. Au départ : 20 chevaux, que nous désignerons, comme les turfistes, par des numéros. Ils constituent $E = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$. Champion, notre joueur de tout à l'heure, vient nous consulter pour nous demander combien il peut jouer, *en tout*, de tiercés pour être certain de gagner « dans l'ordre ». Cette notion d'ordre impose de considérer, par exemple, le tiercé $\{1, 2, 3\}$ comme différent du tiercé $\{2, 1, 3\}$. Traduisons dans le langage des mathématiciens : il s'agit de déterminer de combien de façons on peut ranger 20 objets trois à trois, en considérant que deux rangements comportant les mêmes éléments, mais dans un ordre différent, sont des rangements distincts : on dit aussi, quand on tient compte de l'ordre, qu'il s'agit d'*arrangements*. Nous désignerons le nombre d'arrangements par A_n^p (lire : « *A*, *p* dans *n* »), avec, ici, $n = 20$ et $p = 3$.

Raisonnons comme pour les permutations. Se donner un arrangement de trois objets dans l'ensemble E (on dit aussi : un *arrangement d'ordre 3*), c'est faire correspondre à chacun des nombres de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ un élément de E (remarquons, au passage, qu'il ne s'agit pas d'une bijection, comme dans le cas des permutations, mais d'une injection). L'image de 1 peut être choisie parmi les vingt chevaux ; ce choix fait, l'image de 2 peut être choisie parmi les dix-neuf chevaux restants ; ce choix fait, l'image de 3 peut être choisie parmi les dix-huit chevaux restants. On a donc :

$$A_{20}^3 = 20\times19\times18 = 6\,840. \quad (4)$$

Champion, s'il veut être certain de gagner, devra donc jouer 6 840 tiercés s'il y a vingt chevaux partants.

Plus généralement, dans un ensemble de n éléments, il y a A_n^p arrangements d'ordre p :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1). \quad (5)$$

• *Exemples.* La formule précédente s'applique toutes les fois qu'on désire ranger p à p un ensemble d'objets en tenant compte de leur ordre. Voici quelques exemples d'utilisation de cette formule.

1 - Combien de drapeaux à trois couleurs juxtaposées (comme dans le drapeau français) peut-on composer avec les sept couleurs de l'arc-en-ciel ? Un drapeau est un arrangement d'ordre 3 dans l'ensemble des sept couleurs, on a donc :

$$A_7^3 = 7\times6\times5 = 210 \text{ drapeaux possibles}. \quad (6)$$

2 - Dans un sondage commercial, on demande aux personnes interrogées de classer dans l'ordre de leur préférence les quatre qualités, choisies dans un ensemble de dix qualités, qu'elles exigent d'une automobile. Combien peut-on obtenir de réponses différentes ? Il s'agit d'un arrangement d'ordre 4 dans un ensemble de dix éléments ; le nombre de réponses différentes est :

$$A_{10}^4 = 10\times9\times8\times7 = 5\,040 \text{ réponses possibles}. \quad (7)$$

Combinaisons.

• *Définition.* Si l'on ne tient pas compte de l'ordre, tout sous-ensemble de E contenant p éléments s'appelle une combinaison. Reprenons l'exemple du parieur qui joue des tiercés choisis dans un ensemble de vingt chevaux. S'il trouve que jouer 6 840 tiercés est trop onéreux pour sa bourse, il peut renoncer à « couvrir » toutes les possibilités d'arrivées et se contenter d'un gain « dans le désordre ». Dès lors, pour lui, un tiercé tel que $\{3, 4, 5\}$ est identique à $\{4, 5, 3\}$, ou à $\{5, 4, 3\}$, etc. Au lieu de jouer les six permutations possibles d'un sous-ensemble quelconque $\{x, y, z\}$, il n'en jouera qu'une seule. Le nombre de *combinaisons* est alors six fois moins élevé que celui des arrangements :

$$C_{20}^3 = \frac{A_{20}^3}{6} = 1\,140. \quad (8)$$

D'une manière générale, puisqu'à chaque combinaison de p éléments de E correspondent $p!$ arrangements obtenus en permutant les éléments de ce sous-ensemble, le nombre total de combinaisons de p éléments pour un ensemble E de n éléments est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{P_p} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!}. \quad (9)$$

Le nombre C_n^p, qui se lit : « *C*, *p* dans *n* », s'écrit souvent $\binom{n}{p}$, notation que nous utiliserons dorénavant.

• *Exemples.*

1 - Un atelier comporte 50 employés dont 10 « anciens », qui travaillent dans cet atelier depuis plus de 5 ans. On forme un Comité d'Entreprise de 5 employés dont le Président doit être obligatoirement un « ancien » ; combien de comités peut-on constituer ?

Choisissons un président parmi les dix anciens ; il reste 49 employés devant être groupés 4 par 4 (le Président étant le cinquième membre du Comité). On a donc $\binom{49}{4}$ combinaisons possibles avec un président déterminé ; comme il y a 10 présidents possibles, on obtient $10\times\binom{49}{4}$ comités possibles, soit :

$$10\times\frac{49\times48\times47\times46}{4!} = 2\,118\,760. \quad (10)$$

2 - Le bridge est un jeu qui se joue avec 52 cartes, entièrement distribuées entre quatre joueurs, dont chacun possède donc 13 cartes ; un ensemble de 13 cartes s'appelle une *main de bridge*. Combien y a-t-il de mains possibles ? Chaque main est une combinaison d'ordre 13 dans l'ensemble de 52 cartes ; il y a donc : $\binom{52}{13}$ mains possibles, soit :

$$\binom{52}{13} = \frac{52\times51\times50\times49\times48\times47\times46\times45\times44\times43\times42\times41\times40}{13!} = 635\,013\,559\,600. \quad (11)$$

Répétitions.

Si l'on admet que certains objets peuvent être répétés, on parlera de permutations, d'arrangements et de combinaisons avec *répétitions*.

• *Permutations avec répétitions.* Soit n objets comprenant a' exemplaires de l'objet a, b' exemplaires de l'objet b, ..., l' exemplaires de l'objet l ; on a évidemment :

$$n = a' + b' + \cdots + l'. \quad (12)$$

Convenons d'appeler a_1, a_2, ... les a' exemplaires de l'objet a, b_1, b_2, ... ceux de l'objet b, etc. On constitue un ensemble E de n éléments distincts qui admet $l!$ permutations. Soit par exemple un ensemble de 7 gâteaux, ainsi dénommés :

une meringue : a ;
deux babas : b_1 et b_2 ;
trois éclairs : c_1, c_2 et c_3 ;
une tarte : d.

L'ensemble de ces sept gâteaux est donc :

$$E = \{a, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, d\}. \quad (13)$$

Arrangeons ces gâteaux selon trois ordres d'assortiments, comme sur le tableau ci-dessous :

Rang	Assortiment I	Assortiment II	Assortiment III
1	a	c_3	c_2
2	b_1	b_1	b_2
3	b_2	b_2	b_1
4	c_1	c_2	c_1
5	c_2	c_1	c_3
6	d	a	a
7	c_3	d	d

L'assortiment II est une permutation de l'assortiment I ; de même pour l'assortiment III. Par contre les



1. Permutations de trois pièces de monnaie : il existe $P_3 = 3\,! = 6$ permutations possibles de trois éléments, d'où les six séries verticales de pièces de monnaie représentées sur cette photographie.



2. Arrangements de trois pièces prises deux à deux (on a groupé les arrangements qui ne diffèrent que par l'ordre des pièces). Le nombre total des arrangements possibles est :

$$A_3^2 = \frac{3\,!}{(3-2)\,!} = 6.$$



3. Combinaisons de trois pièces deux à deux. Le nombre total des combinaisons possibles est :

$$C_3^2 = \frac{3\,(3-1)\,(3-2)}{2\,!} = 3.$$

assortiments II et III ne diffèrent que par les *exemplaires* choisis : les rangs 1, 4 et 5, par exemple, sont occupés par un même type de gâteaux (éclairs), mais on a, dans III, c_2 au lieu de c_3, c_1 au lieu de c_2, c_3 au lieu de c_1, etc. On convient que deux assortiments de ce genre, tels que, à tout rang, les éléments soient de même type, sont des *permutations équivalentes*. Comme il s'agit d'une relation d'équivalence sur l'ensemble des permutations de E, on peut parler de *classes d'équivalence*. On démontre que ce nombre de classes a pour valeur :

$$\frac{n\,!}{a'\,!\,b'\,!\,...\,l'\,!}. \qquad (14)$$

● *Arrangements avec répétitions*. Prenons l'ensemble des $n = 26$ lettres de l'alphabet, et tous les mots de $p = 5$ lettres qu'on peut écrire, avec éventuellement répétition d'une ou plusieurs lettres : *homme* est un de ces mots (une répétition, celle de la lettre m), mais aussi hhhhh (5 répétitions) ou hiooo (3 répétitions), etc. On montre qu'on peut former 26^5 arrangements de cette sorte ; d'une façon générale, pour n éléments pris p à p, on aurait n^p arrangements possibles avec répétitions.

● *Combinaisons avec répétitions*. Si l'on ne tient pas compte de l'ordre et si l'on admet les répétitions, le nombre K_n^p de combinaisons avec répétitions est :

$$K_n^p = \binom{n+p-1}{p}. \qquad (15)$$

Le symbole (dans le deuxième membre) étant pris avec le sens que nous lui avons donné p. 34.

SUBSTITUTIONS DE DEGRÉ n

Notions sur les substitutions

Définition.

Soit E un ensemble fini composé de n éléments : $E = \{a, b, c, ..., n\}$. Il existe, on l'a vu, $n\,!$ permutations possibles des n éléments de E. L'opération par laquelle on passe d'une permutation à une autre est une application de E dans lui-même. Soit par exemple un ensemble E contenant trois éléments, a, b, c et considérons l'application $E \to E$ qui applique a sur b, b sur c et c sur a.

Nous pouvons décrire cette application de la manière suivante :

$$a \to b$$
$$b \to c$$
$$c \to a$$

ou, plus simplement, en écrivant les deux ensembles dans leur ordre respectif :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

(l'ensemble de départ est en haut, l'ensemble d'arrivée est en bas). L'application bijective ainsi notée est appelée une *substitution de degré n* (n étant le nombre d'éléments de l'ensemble E). Nous la désignerons par le symbole s, ce qui nous fait écrire : $E \xrightarrow{s} E$.

Il ne faut pas confondre *permutation* et *substitution* : une permutation est le résultat d'une substitution, et non cette opération elle-même.

Caractères d'une substitution.

● *Une substitution identique*, ou *substitution neutre*, est une substitution qui conserve tous les éléments de l'ensemble E dans le même ordre. Voici quelques exemples de substitutions neutres dans un ensemble à trois éléments :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & c & b \\ a & c & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & a & c \\ b & a & c \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

● *Transposition*. Une substitution qui n'échange que deux éléments d'un ensemble s'appelle une *transposition* ; on peut la noter par la lettre t et l'écrire sous la forme :

$$E \xrightarrow{t} E.$$

Par exemple les deux permutations :

$$\{a\ b\ c\ d\ e\ f\} \quad \text{et} \quad \{a\ b\ e\ d\ c\ f\}$$

se correspondent dans une transposition, car seuls sont échangés les éléments c et e, tous les autres restant à leur place. Si l'on note E le premier ensemble, le second sera dit *transposé de E* et noté ^tE. Il est facile de montrer que si l'on fait subir à l'ensemble ^tE la transposition t, on retrouve l'ensemble initial :

$$^t(^tE) = E. \qquad (1)$$

● *Parité d'une substitution*. On démontre que toute substitution peut être réalisée en procédant à plusieurs transpositions successives. La substitution est dite *paire* ou *impaire* selon que le nombre de transpositions qui lui correspond est lui-même pair ou impair.

● *Produit de deux substitutions*. Si l'on fait subir à l'ensemble E deux substitutions successives, s_i et s_j, on obtient une permutation qui pourrait être aussi atteinte par une substitution unique s_k appelée *produit* des substitutions s_i et s_j. Désignons ce produit par le symbole « × », on écrira :

$$s_i \times s_j = s_k. \qquad (2)$$

Le produit de deux substitutions a des propriétés remarquables, que nous exploiterons p. 40, en étudiant les groupes. Énumérons-les rapidement.

1 - Le produit de deux substitutions est une substitution.

2 - Le produit de deux substitutions n'est pas commutatif en général : la succession s_i *puis* s_j donne un résultat différent de celui obtenu par la succession s_j puis s_i. On peut vérifier ce fait sur un ensemble $E\{a, b, c\}$ en définissant les substitutions :

$$s_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Partons de l'ensemble $\{a, b, c\}$. La substitution s_2 le transforme en $\{b, c, a\}$; la substitution s_3 appliquée à l'ensemble $\{b, c, a\}$ donne $\{a, c, b\}$ (puisque s_3

change a en b, b en a et c en c). L'ensemble d'arrivée est donc $\{a, c, b\}$, obtenu à partir de l'ensemble $\{a, b, c\}$ par la substitution :

$$s_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Nous écrirons donc :

$$s_2 \times s_3 = s_4 . \tag{5}$$

Procédons maintenant dans l'ordre inverse. En appliquant s_3 à l'ensemble $\{a, b, c\}$ on obtient $\{b, a, c\}$; en appliquant ensuite s_2 à l'ensemble $\{b, a, c\}$ on obtient l'ensemble $\{c, b, a\}$, qui est l'ensemble d'arrivée du produit $s_3 \times s_2$. On constate que le résultat de ce produit est différent du résultat du produit $s_2 \times s_3$, on a donc, en posant :

$$s_5 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$s_3 \times s_2 = s_5 . \tag{7}$$

3 - Le produit de plusieurs substitutions est associatif, ce qui s'écrit :

$$s_1 \times (s_2 \times s_3) = (s_1 \times s_2) \times s_3 = s_1 \times s_2 \times s_3 . \tag{8}$$

4 - La substitution identique s_1 est telle que :

$$s_1 \times s_i = s_i \times s_1 = s_i , \tag{9}$$

s_i désignant une substitution quelconque. C'est-à-dire que si l'on fait le produit d'une substitution identique s_1 et d'une substitution quelconque s_i, tout se passe comme si on faisait seulement la substitution s_i.

5 - Deux substitutions sont dites *inverses* (ou *symétriques*) si leur produit donne la substitution identique. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}. \tag{10}$$

En effet, $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ transforme l'ensemble $\{a, b, c\}$ en l'ensemble $\{b, c, a\}$ et la substitution $\begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix}$ transforme l'ensemble $\{b, c, a\}$ en l'ensemble $\{a, b, c\}$.

La substitution inverse d'une substitution s quelconque se note habituellement s^{-1}.

Autres problèmes d'analyse combinatoire.

Partition d'un ensemble fini.

Soit E un ensemble fini contenant n éléments : combien de sous-ensembles peut-on construire dans cet ensemble, en comptant l'ensemble vide $\varnothing$ et l'ensemble E lui-même ? (Voir p. 15, où est défini l'ensemble des parties d'un ensemble).

Un sous-ensemble particulier de E contient p éléments de E, avec $p \leqslant n$. Si $p = 0$, le sous-ensemble est vide ; si $p = n$, il se confond avec E. Le nombre de sous-ensembles possédant p éléments est $\binom{n}{p}$, puisque l'ordre des éléments n'intervient pas ; il y aura donc : $\binom{n}{0}$ ensemble vide, $\binom{n}{1}$ ensembles à un élément, $\binom{n}{2}$ ensembles à deux éléments, ..., $\binom{n}{n}$ ensemble E. Le nombre total de sous-ensembles de E est donc :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{p} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n , \tag{1}$$

égalité qui se vérifie aisément, en utilisant la formule des combinaisons.

Problèmes variés.

● *Comment représenter le nombre $m + n$ en tant que somme de n entiers positifs.* Le nombre de représentations possibles $P(n, m)$ a été étudié par Euler, qui a montré que :

$$P(n, m) = \sum_{s=1}^{n} s, m - s . \tag{2}$$

● *Fonctions symétriques d'une équation.* Voir la théorie des équations, p. 70.

● *Matrices et déterminants.* Voir pp. 58-65.



*« Ni vu, ni connu, je t'embrouille » semble dire l'*Escamoteur *de Jérome Bosch à ses spectateurs : l'algébriste apparait, lui aussi, comme un magicien quand, devant un public de profanes, il résout des problèmes en apparence saugrenus, que l'arithmétique classique est impuissante à résoudre.*

ALGÈBRE DES STRUCTURES.

Remarque historique.

Nous reprenons ici l'histoire de l'algèbre au point où nous l'avions laissée p. 12. Nous avons vu qu'au début du XIX[e] siècle les travaux de Gauss, de Galois conduisent les mathématiciens à laisser au second plan le problème de la résolution des équations et à se tourner vers l'étude des *structures algébriques*.

La notion de loi de composition et la théorie des groupes.

● *Gauss et la théorie des formes quadratiques.* Nous avons vu, en arithmétique, qu'il était possible de représenter un nombre entier par une *forme quadratique*, c'est-à-dire par une expression algébrique telle que :

$$f = ax^2 + bxy + cy^2 . \tag{1}$$

Gauss a étudié les formes quadratiques, et il a montré qu'on pouvait les ranger en classes d'équivalence, sur lesquelles on pouvait calculer comme on calculerait sur des nombres, en définissant notamment une opération permettant de combiner deux formes quadratiques f_1 et f_2 de telle sorte qu'on obtienne, par cette combinaison, une troisième forme quadratique f_3, et cela d'une manière commutative, la combinaison (f_1, f_2) donnant le même résultat que la combinaison (f_2, f_1). Ainsi se dégage l'importance de la notion de *loi de composition* dans un ensemble : étant donné deux éléments x et y d'un ensemble E, on peut leur faire correspondre un troisième élément $z \in E$ selon une loi générale qu'on appelle *loi de composition*.

Ainsi, dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers, à tout couple (x, y) correspond un troisième entier qu'on nomme leur somme, et qu'on obtient selon des règles opératoires précises. L'addition des nombres entiers est donc une loi de composition particulière, caractérisant l'ensemble $\mathbb{Z}$. Plus généralement, étant donné un ensemble E, fini ou infini, il est possible de le caractériser par les lois de composition dont on peut le munir. Ces lois décrivent ce qu'on appelle la *structure* de l'ensemble considéré. Nous verrons que l'algèbre moderne s'est donnée pour objet l'étude générale des structures, par opposition à l'algèbre classique qui étudiait des structures particulières sans établir de lien entre les catégories d'opérations réalisées dans des ensembles différents.

● *Galois et la théorie des groupes.* Dans un *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux*, présenté le 16 janvier 1831 à l'Académie des Sciences, Galois a établi que, pour étudier une équation algébrique du n-ième degré, il fallait examiner l'ensemble des permutations de ses racines, ensemble qu'il nomme un *groupe de substitutions*. Si $(a, b, c, d, \dots m)$ sont les m racines d'une équation, le groupe de substitutions associé à cette équation est composé de toutes les permutations possibles des racines (nous avons vu p. 34 qu'il y en a $m!$). En elle-même, cette idée n'était pas très nouvelle, car elle avait été développée à partir de 1770 par Lagrange, puis par Vandermonde et par Gauss. Ce qui est absolument nouveau chez Galois, c'est que, d'emblée, il analyse les propriétés générales des groupes (et non pas uniquement celles des groupes qui servent à la résolution d'une équation), et qu'il découvre l'importance capitale de la notion d'*invariance* et de celle de *sous-groupe*.

Les groupes de substitutions étudiés par Galois sont des *groupes finis* (le nombre de leurs éléments est fini). L'étude plus systématique de leurs propriétés a été faite par Camille Jordan (1870), Felix Klein (1874), R. Lipschitz (1877), Kronecker (1882), Dedekind (1884) et O. Hölder (1893).

Par la suite, on s'aperçut du rôle primordial joué par la structure de groupes dans de nombreux domaines des mathématiques et, à la théorie des groupes finis, s'est adjointe celle des *groupes continus* (Sophus Lie, 1870), devenue l'une des théories à la base de l'étude des fonctions continues. La théorie de Lie a été généralisée, au début du XX[e] siècle, par Elie Cartan (1917), H. Weyl (1925) ; elle joue un rôle important dans une branche des mathématiques qu'on appelle maintenant la *topologie algébrique* (Chevalley, Koszul, Henri Cartan, A. Borel, Serre, R. Bott, etc.).

Développement de l'algèbre des structures.

● *A la fin du XIX[e] et au début du XX[e] siècle*, des ensembles obéissant à d'autres lois générales que les groupes ont fait l'objet d'analyses approfondies. Dedekind introduit la notion de *corps* (qui existait en puissance dans les travaux de Gauss sur la théorie des

nombres), pour décrire notamment l'ensemble des nombres réels, celui des nombres complexes et celui des fonctions de variables réelles ou complexes ; ces ensembles sont classiquement appelés « concrets ». Kronecker est à l'origine (1887) de la considération de corps dits « abstraits », tels les *corps finis*, les *corps p-adiques* (Hensel, vers 1900), les *corps des séries formelles* (G. Veronese, 1891).

L'aboutissement de ces recherches particulières est la synthèse de E. Steinitz, sous la forme d'un article paru dans le *Journal de Crelle*, en 1910, sur la *Théorie algébrique des corps*. Ce travail est considéré comme le point de départ conscient et organisé de l'algèbre moderne.

● *L'algèbre linéaire*, c'est-à-dire l'algèbre qui repose sur des combinaisons du premier degré, s'est développée à partir du milieu du XIX[e] siècle, avec les travaux de W. R. Hamilton sur les *quaternions* (1853) et les *vecteurs*, et ceux de Cayley (à partir de 1846) et Sylvester (1850) sur les *matrices* et les *déterminants* (dont l'introduction remonte à Cramer, en 1750 ; le mot « déterminant » a été utilisé en son sens moderne par Cauchy). Les travaux de Grassmann sur le calcul algébrique appartiennent au même mouvement de pensée.

● *Vers 1900-1910*, il semble donc acquis qu'il existe non pas *une* algèbre portant sur l'ensemble des nombres complexes (les réels étant un cas particulier des complexes), mais *des* algèbres décrivant des ensembles dont la structure peut être extrêmement variée. A la suite de Benjamin Peirce, auteur de travaux sur l'algèbre linéaire associative (1861), les algébristes ont entrepris de classer les différentes algèbres (Study, C. S. Peirce, fils de Benjamin Peirce, Scheffers, Schur, Molien, Elie Cartan). Ces préoccupations rejoignent celles de Steinitz, déjà cité, tandis que E. Noether (entre 1920 et 1930) et W. Krull développent la théorie des *anneaux commutatifs*, en rapport avec les préoccupations de la *géométrie algébrique*, à l'origine de laquelle se trouvent les travaux de Riemann (1851).

Conclusion.

Ce panorama historique se termine aux environs de 1930, époque à laquelle paraît le livre célèbre de E. L. Van der Waarden intitulé *Algèbre moderne*, et qui récapitule tout ce qui vient d'être dit. Vers 1930 on pouvait donner de l'« algèbre » en général la définition suivante : l'« algèbre » traite des ensembles dont la structure est définie par une ou plusieurs lois de composition (de deux éléments pris dans deux ensembles différents). Il y a donc autant d'algèbres que de structures possibles, c'est-à-dire, théoriquement, une infinité. Tout le monde est cependant bien d'accord sur le fait que seules les algèbres créées en rapport avec des problèmes en suspens dans un domaine mathématique ont une certaine fécondité.

Lorsqu'on cherche à classer les divers domaines étudiés par les mathématiques contemporaines, on est très vite dépassé par la variété des spécialisations, par l'enchevêtrement des théories, par la confluence des résultats. Il est impossible, de nos jours, d'écrire une histoire des mathématiques dont les chapitres seraient : théorie des ensembles, théorie des nombres (arithmétique), algèbres, géométrie, analyse, topologie. Tous ces domaines s'interpénètrent. Il serait donc vain et inutile — dans la mesure où ce livre s'adresse non pas à des spécialistes mais à des lecteurs qui désirent compléter leur culture générale — de continuer la liste chronologique des travaux en rapport avec l'algèbre moderne depuis un demi-siècle. Nous donnerons à propos de chaque sujet important, des informations historiques adéquates.

Généralités.

Lois de composition.

La *structure* d'un ensemble E, finie ou infinie, est caractérisée par la ou les lois de composition qu'on peut appliquer aux éléments de cet ensemble.

● *Notation.* Une loi de composition est notée par un signe conventionnel ; on emploie souvent le symbole « $\perp$ » (appelé couramment « antitruc » en langage familier) et le symbole « $\top$ » (« truc »). Les lois de composition peuvent être aussi notées à l'aide du signe « + » (notation additive) ou du signe « $\times$ » (notation multiplicative), ou encore sans aucun signe (notation multiplicative). On rencontre aussi l'*étoile* « $*$ » ou le rond « $\circ$ » (ces deux derniers symboles sont déconseillés).

● *Loi de composition interne.* Soit $E = \{x, y, z, ...\}$ un ensemble et $E \times E = E^2$ le carré cartésien de cet ensemble (voir la définition p. 22). L'ensemble E^2 est composé de tous les couples (x, y) et on appelle *loi de composition interne* toute opération qui fait correspondre à un élément (x, y) de E^2 un élément et un seul $z \in E$, c'est-à-dire l'application de E^2 dans E (voir la définition d'une application p. 20). On écrira :

$$x \perp y = z. \tag{1}$$

L'élément $x \perp y = z$ est le *composé* de x et de y.

● *Loi de composition externe.* Soit $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$ un ensemble et $E = \{x, y, z, ...\}$ un autre ensemble. On appelle *loi de composition externe* toute loi qui fait correspondre à un couple (α, x) dont les membres sont pris l'un dans l'ensemble Ω et l'autre dans l'ensemble E, un élément y de l'ensemble E. Les couples (α, x) constituent le produit cartésien $\Omega \times E$: la loi de composition externe est une application de l'ensemble $\Omega \times E$ dans E. L'ensemble Ω est appelé *domaine d'opérateurs* de la loi.

● *Exemples de lois de composition interne.*

— *Exemple arithmétique.* Soit l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers. L'addition, qui fait correspondre à deux entiers x et y leur *somme* z est une loi de composition interne ; il en est de même de la multiplication (la somme ou le produit de deux entiers est un entier). On notera ces deux lois de composition avec un symbole différent, par exemple :

$$x \perp y = z \tag{2}$$

pour l'addition et :

$$x \top y = z \tag{3}$$

pour la multiplication. On peut aussi noter l'addition à l'aide du symbole « + » et la multiplication à l'aide du symbole « $\times$ » ou sans aucun signe (c'est d'ailleurs ainsi que l'on procède habituellement).

— *Exemple géométrique.* Considérons l'ensemble $E = \{d_1, d_2, d_3, ...\}$ des déplacements, c'est-à-dire des transformations qui permettent de passer d'une figure F à une figure F' qui lui est directement égale. Définissons la loi de composition appelée « produit de deux déplacements » et notée $d_1 \perp d_2$ de la manière suivante : faire subir à une figure F le produit de deux déplacements d_1 et d_2, c'est : 1° passer de F à F' par le déplacement d_1 ; 2° passer de F' à F'' par le déplacement d_2. On démontre, en géométrie, qu'il est alors toujours possible de passer de F à F'' par un troisième déplacement distinct d_3. On peut donc écrire : pour tout d_1, d_2, d_3 appartenant à E, on a :

$$d_1 \perp d_2 = d_3. \tag{4}$$

Le produit de deux déplacements est une loi de composition interne dans l'ensemble des déplacements.

Propriétés d'une loi de composition.

● *Loi commutative.* Une loi de composition interne définie sur un ensemble E est dite *commutative* si, pour tout couple (x, y) d'éléments de E, on a :

$$x \perp y = y \perp x. \tag{5}$$

(C'est le cas pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}$ par exemple.)

● *Loi associative.* Une loi de composition interne définie sur un ensemble E est dite associative si, pour tout triplet (x, y, z) d'éléments appartenant à E, on a :

$$(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z) = x \perp y \perp z. \tag{6}$$

L'addition dans $\mathbb{Z}$ est un exemple de loi associative. Pour faire la somme $3 + 5 - 2$, par exemple, on peut indifféremment additionner d'abord 3 et 5, ce qui fait 8, et ôter 2 du résultat, d'où $3 + 5 - 2 = 6$, ou bien ajouter 3 au résultat de l'opération $5 - 2$, ce qui donne également 6. Un ensemble muni d'une loi de composition interne associative est appelé un *monoïde*.

● *Loi distributive par rapport à une autre loi.* Considérons un ensemble E muni de deux lois de composition interne, notées $\perp$ et $\top$. Si, pour tout triplet (x, y, z) d'éléments appartenant à E, on a :

$$x \top (y \perp z) = (x \top y) \perp (x \top z),$$
$$(y \perp z) \top x = (y \top x) \perp (z \top x), \tag{7}$$

chacune des deux lois est dite *distributive* par rapport à l'autre.

Considérons par exemple l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}$. On a, pour tout triplet d'entiers (x, y, z) :

$$x(y + z) = xy + xz ;$$
$$(y + z)x = xy + xz. \tag{8}$$

La multiplication est donc distributive par rapport à l'addition, et réciproquement.

● *Distributivité d'une loi de composition externe.* Appelons $\perp$ une loi de composition interne définie dans un ensemble E, et $\top$ une loi de composition externe faisant intervenir l'ensemble $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$, comme on l'a expliqué ci-dessus. La loi de composition externe est dite distributive par rapport à la loi interne si, pour tout élément $\lambda \in \Omega$ et pour tout couple (x, y) d'éléments appartenant à E on a :

$$\lambda \perp (x \top y) = (\lambda \perp x) \top (\lambda \perp y). \tag{9}$$

Éléments caractéristiques.

Considérons un ensemble E muni d'une loi de composition interne. Il peut se trouver que certains éléments, composés à des éléments quelconques de E, aient des propriétés particulières. Nous allons définir ces éléments.

— Un élément $e \in E$ est dit *neutre* pour la loi $\perp$ si, pour tout $x \in E$ on a :

$$e \perp x = x \perp e = x. \tag{10}$$

Par exemple, dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, l'élément 0 est neutre pour l'addition ; on a en effet $0 + x = x + 0 = x$. De même 1 est l'élément neutre pour la multiplication, puisqu'on a $1 \times x = x \times 1 = x$.

— Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $\perp$ et possédant un élément neutre e pour cette loi de composition. Si, pour un couple (x, y) d'éléments appartenant à E on a :

$$y \perp x = e, \tag{11}$$

on dit que l'élément y est un *symétrique à gauche* de x ; x lui-même est dit *symétrisable à gauche*.

Dans les mêmes conditions, s'il existe un élément z de E tel que :

$$x \perp z = 0, \tag{12}$$

on dit que l'élément z est un *symétrique à droite* de x, et x est dit *symétrisable à droite*.

— Toujours dans les mêmes conditions, s'il existe un couple d'éléments (x, y) appartenant à E tel que :

$$x \perp y = y \perp x = e \tag{13}$$

les deux éléments sont dits *symétriques*. Lorsque la loi de composition interne est associative, l'élément y, s'il existe, est unique : on l'appelle le symétrique de x, et on le note $-x$ ou x^{-1}. On dit encore que x et $-x$ (ou x^{-1}) sont des *éléments opposés*.

Nous avons vu p. 25, qu'il n'existait aucun entier naturel tel que $a + b = b + a = 0$: les entiers naturels ne sont donc pas symétrisables pour l'addition. Par contre, dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, on peut toujours associer à un entier x son opposé $-x$, de sorte que $x - x = 0$:

Sophüs Lie (1842-1899), mathématicien norvégien qui a notamment reconnu l'importance de l'idée de groupe continu de transformation (« groupe de Lie »).



les éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}$ possèdent tous un symétrique pour l'addition, à l'exception de 0 qui est à lui-même son symétrique.

— Tout élément x d'un ensemble E muni d'une loi de composition interne $\perp$ et vérifiant la relation :

$$x \perp x = x \qquad (14)$$

est appelé élément *idempotent*. Par exemple, dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, 0 est idempotent pour l'addition, puisque $0 + 0 = 0$; de même 1 est idempotent pour la multiplication, puisque $1 \times 1 = 1$.

— E étant muni d'une loi de composition interne $\perp$, un élément de $a \in E$, tel que pour tout couple (x, y) d'éléments de E on ait :

$$a \perp x = a \perp y \Rightarrow x = y \qquad (15)$$

est dit *élément régulier à gauche* (on dit aussi élément *simplifiable* à gauche). De même, pour tout élément b de E tel que :

$$x \perp b = y \perp b \Rightarrow x = y \qquad (16)$$

est dit *élément régulier ou simplifiable à droite*. Un élément régulier à gauche et à droite est dit, simplement, *élément régulier* ou encore *élément simplifiable*. C'est ainsi que tout nombre réel est régulier pour l'addition et la multiplication, puisqu'on a, par exemple, a, x et y appartenant à l'ensemble $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} a + x = a + y \Rightarrow x = y, \\ ax = ay \quad \Rightarrow x = y. \end{cases} \qquad (17)$$

Cette *régularité* des éléments de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels permet les simplifications classiques du calcul algébrique élémentaire : ajouter ou retrancher un même nombre aux deux membres d'une égalité sans changer cette égalité, ou encore multiplier ou diviser les deux membres d'une égalité par un même nombre réel sans changer cette égalité.

— E étant un ensemble muni d'une loi de composition interne $\perp$, un élément x de E est dit *absorbant à gauche* si, pour tout élément $y \in E$, on a :

$$x \perp y = x. \qquad (18)$$

De même, il est dit *absorbant à droite* si, pour tout $y \in E$, on a :

$$y \perp x = x. \qquad (19)$$

Un élément absorbant à gauche et à droite est dit *élément absorbant*.

Ainsi, dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, 0 est un élément absorbant à gauche et à droite pour la multiplication, puisqu'on a, quel que soit le réel x :

$$0 \times x = x \times 0 = 0. \qquad (20)$$

Remarques.

1 - On utilise le signe « + » pour noter une loi de composition interne sur un ensemble E, lorsque celle-ci est commutative et associative ; dans ce cas, l'élément nul est noté « 0 », et le composé $x + y$ est appelé *somme* de x et de y. Lorsque l'ensemble considéré est un ensemble de nombres (entiers, fractionnaires, réels, complexes, etc.), ces symboles ont la signification qui leur est donnée en arithmétique élémentaire. Mais il ne faut pas perdre de vue le fait qu'on peut noter à l'aide de ces symboles des lois de composition concernant des éléments qui ne sont pas numériques. Par exemple l'ensemble des vecteurs géométriques est muni d'une loi de composition interne appelée *addition vectorielle*, et qui fait correspondre à deux vecteurs $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{V'}$ un troisième vecteur $\boldsymbol{W}$ appelé leur somme. On écrit alors :

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{V'}. \qquad (21)$$

Le signe « + » indique que le vecteur $\boldsymbol{W}$ s'obtient en prenant la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{V'}$ (voir p. 48).

2 - La notation multiplicative, qui utilise le signe « × » placé entre deux éléments d'un ensemble E, ou la simple juxtaposition xy des deux éléments de cet ensemble est utilisée pour noter une loi de composition interne associative (et non nécessairement commutative). Dans ce cas, l'élément neutre est appelé *élément unité*, et noté 1 ; le composé de la multiplication de deux éléments x et y de E est appelé *produit*.

3 - L'élément symétrique d'un élément symétrisable x d'un ensemble E, pour une loi de composition interne est noté $-x$, s'il s'agit d'une loi de composition interne associative et commutative, c'est-à-dire notée additivement ; on le note x^{-1} ou $1/x$, s'il s'agit d'une loi de composition interne associative (et non nécessairement commutative), possédant un élément neutre 1 et notée multiplicativement.

4 - Pour décrire la structure algébrique d'un ensemble, on définit les lois de composition internes ou externes concernant cet ensemble, ces lois pouvant présenter entre elles certaines relations (par exemple la distributivité), et on énonce sous forme d'axiomes leurs propriétés (associativité, commutativité, distributivité), ainsi que l'existence éventuelle d'éléments neutres, symétrisables, absorbants, etc. On désigne parfois la structure algébrique d'un ensemble par le symbole (S).

5 - (S) étant une structure algébrique définie sur un ensemble E par plusieurs lois de composition (internes ou externes), on appelle *structure sous-jacente* à la structure F la structure algébrique obtenue en ne considérant sur E qu'une partie des lois qui définissent F.

6 - E étant un ensemble dans lequel est définie une loi de composition interne, une partie P de E pour laquelle le composé de tout couple d'éléments appartenant à P est encore un élément de P est dite *partie stable* pour la loi en question. On peut définir de même une *partie stable* pour une loi de composition externe, si le composé de tout couple (α, x), $\alpha \in \Omega$, $x \in P$, est lui-même un élément de P. Enfin, E étant un ensemble muni d'une structure algébrique, s'il existe une partie P de E stable pour chacune des lois définissant cette structure, cette partie P est dite stable pour la structure (S).

Morphismes.

● *Généralités.* Lorsqu'on applique un ensemble E, muni d'une structure (S), dans un ensemble F, chaque élément $x \in E$ est mis en correspondance avec un élément $f(x)$ de F, élément qui est dit image de x dans F (voir p. 20). On peut évidemment définir une structure (T) pour F et faire correspondre chaque loi de composition dans E à une loi de composition dans F.

Pour fixer les idées, appelons $\perp$ les lois de composition interne sur E et $\perp'$ les lois de composition externe dans cet ensemble, et soit $\top$ et $\top'$ les lois de composition interne et externe correspondantes dans F. Alors nous associons d'une manière biunivoque :

$$\perp_1 \text{ à } \top_1 ;$$
$$\perp_2 \text{ à } \top_2 ;$$
$$\text{etc.}$$
$$\perp'_1 \text{ à } \top'_1 ;$$
$$\perp'_2 \text{ à } \top'_2 ;$$
$$\text{etc.}$$

Si la structure (T) est telle que les correspondances biunivoques $\perp \leftrightarrow \top$, $\perp' \leftrightarrow \top'$ respectent certaines conditions que nous allons définir, l'application f de E dans F est appelée un *morphisme*. L'intérêt d'un morphisme se comprend par la remarque suivante. Supposons que la loi $\perp_1$ appliquée aux éléments x et y de E, donne $z \in E$, tel que :

$$z = x \perp_1 y. \qquad (23)$$

Dans l'application f, x devient $f(x)$, y devient $f(y)$ et z devient $f(z)$; s'il se trouve que :

$$f(z) = f(x) \top_1 f(y), \qquad (24)$$

$\top_1$ étant la loi de composition interne mise en correspondance avec $\perp_1$, et s'il en est de même pour toutes les lois de composition des deux ensembles E et F, l'application peut être un *morphisme* (voir définition rigoureuse ci-après). Supposons que l'opération $\top_1$ soit « facile » et l'opération $\perp_1$ « difficile ». Au lieu de calculer sur les éléments (x, y), à l'aide de $\perp_1$, on calculera sur leur image dans F, à l'aide de $\top_1$, et l'on reviendra dans l'ensemble E pour exprimer le résultat.

● *Un exemple : les logarithmes décimaux.* Considérons les deux suites de nombres :

$$E = \{1 \; 10 \; 10^2 \; 10^3 \; 10^4 \; 10^5 \; 10^6 \; 10^7 \; 10^8 \ldots\}$$
$$F = \{0 \; 1 \; 2 \; 3 \; 4 \; 5 \; 6 \; 7 \; 8 \ldots\}$$

et établissons l'application $E \xrightarrow{f} F$ qui fait correspondre 0 à 1, 1 à 10, 2 à 10^2, etc. La multiplication de deux éléments x et y appartenant à E s'écrit, par exemple :

$$10^3 \times 10^4 = 10^7. \qquad (25)$$

L'addition des deux images de x et y dans f s'écrit :

$$f(10^3) + f(10^4) \qquad (26)$$

et, comme $f(10^3) = 3$ et $f(10^4) = 4$, on a $f(10^3) + f(10^4) = 7$. Mais, en considérant les deux suites, on constate que $7 = f(10^7)$, donc :

$$f(10^3) + f(10^4) = f(10^7). \qquad (27)$$

Comparons maintenant les relations (25) et (27) : elles se correspondent pour l'application $E \xrightarrow{f} F$ de la manière suivante :

$$10^3 \xrightarrow{f} f(10^3) = 3 ;$$
$$10^4 \xrightarrow{f} f(10^4) = 4 ;$$
$$10^7 \xrightarrow{f} f(10^7) = 7 ;$$
$$« \times » \xrightarrow{f} « + ».$$

Pour multiplier 10^a par 10^b, on procédera donc ainsi :

1 - remplacer 10^a et 10^b par leurs images a et b dans F ;

2 - calculer, dans F, la somme $c = a + b$;

3 - remplacer c par son antécédent 10^c dans E ;

4 - le résultat de l'opération $10^a \times 10^b$ est $10^c = 10^{a+b}$.

Autrement dit, si nous faisons le détour par l'ensemble F, la multiplication de 10^a par 10^b revient à l'addition $a + b$, qui est une opération beaucoup plus simple. Cette simplification est possible lorsque l'application $E \xrightarrow{f} F$ est un morphisme (en l'occurrence, un morphisme d'un type particulier appelé *isomorphisme*). Dans le langage des mathématiciens, chaque nombre de l'ensemble F est appelé *logarithme décimal* du nombre de l'ensemble E qui lui correspond. Cette notion a été introduite au début du XVII[e] siècle par l'Écossais Neper et par l'Anglais Briggs (voir à ce sujet p. 116 pour la définition de la fonction logarithme.)

● *Définition d'un morphisme.* On appelle *morphisme* une application f d'un ensemble E, muni d'une structure algébrique (S), dans un ensemble F, muni d'une structure algébrique (T), telle que :

— pour chaque loi de composition interne $\perp$ dans E, associée à une loi de composition interne $\top$ dans F par une correspondance biunivoque appliquant l'ensemble des lois de composition internes sur E sur l'ensemble des lois de composition internes sur F, on a :

$$f(x \perp y) = f(x) \top f(y), \qquad (28)$$

et cela pour tout couple (x, y) d'éléments de E ;

— pour chaque loi de composition externe $\perp'$ définie dans E et ayant pour domaine d'opérateurs Ω, les lois $\perp'$ étant mises en correspondance biunivoque avec les lois de composition externe $\top'$ dans F, avec le même domaine d'opérateurs, on a :

$$f(\alpha \perp' x) = \alpha \top' f(x), \qquad (29)$$

pour tout $\alpha \in \Omega$ et pour tout $x \in E$.

● *Différentes sortes de morphismes.*

— On appelle *endomorphisme* un morphisme qui applique l'ensemble E, muni d'une structure (S) dans le même ensemble, muni de la même structure.

— L'*isomorphisme* est un morphisme particulièrement important, qui peut se définir comme suit ; étant donné deux ensembles $E = \{x, y, z, \ldots\}$ et $F = \{f(x), f(y), f(z), \ldots\}$, s'il existe une loi de composition interne $\perp$ dans E et une loi correspondante $\top$ dans F, et si l'égalité :

$$x \perp y = z \text{ vérifiée sur } E \qquad (30)$$

Loi de composition interne (exemple naïf) : le mélange de deux couleurs est une loi de composition interne dans l'ensemble des couleurs pris au sens large (ce mélange fournit une troisième couleur qui appartient à l'ensemble des couleurs).



Ph. Jeanbor © Photeb/T.

entraîne :

$$f(x) \perp' f(y) = f(z) \text{ vérifiée sur } F \quad (31)$$

l'application $E \xrightarrow{f} F$ est un isomorphisme. Nous aurons l'occasion de préciser cette définition par la suite, et de rencontrer d'autres morphismes, qui seront définis en temps utile, tel l'automorphisme, qui est l'isomorphisme d'un ensemble muni d'une structure algébrique sur lui-même, cet isomorphisme étant lui-même muni de la même structure.

Si ces notions vous semblent trop abstraites pour l'instant, contentez-vous de retenir ceci : si l'on peut établir une correspondance entre les éléments de deux ensembles et entre les lois de composition qui définissent les structures de ces deux ensembles, l'application de l'un de ces ensembles sur l'autre, désigné par $E \xrightarrow{f} F$ est un morphisme.

Plan.

Il est dans notre intention de décrire les algèbres en partant des théories les plus générales pour aboutir aux théories particulières. Cet exposé n'est pas d'un accès très aisé, du moins à première vue. En effet, quand on s'adresse à des néophytes ou à des profanes, on risque de les effrayer en leur présentant, de but en blanc, la théorie générale des groupes finis ou les algèbres universelles. L'impression la plus fâcheuse que l'on risque de provoquer est que les algèbres sont des sortes de jeux gratuits de l'esprit, nantis d'un symbolisme plus ou moins spectaculaire.

Pour éviter cette vision fausse des théories algébriques, il faut donner un grand nombre d'exemples montrant leur intérêt « concret » ; dès lors tout ce qui semblait gratuit ou compliqué prend toute sa raison d'être. Il est certain qu'un lecteur ignorant les mathématiques supérieures ne peut s'intéresser à la théorie des groupes en tant que telle, à moins qu'il n'ait l'esprit perverti par quelques manies. En revanche, dans la mesure où il a conscience de l'importance pratique de la résolution générale des équations du *n*-ième degré, et si on lui explique que la théorie des groupes est un outil puissant permettant de les étudier ; et si, d'autre part, on lui a souligné combien les théories géométriques ont été transformées et unifiées grâce à la théorie des groupes, ladite théorie prend à ses yeux une grande valeur.

Or, en raison même du plan adopté ici, l'appel à des exemples n'est théoriquement pas possible, puisque ces exemples seront présentés ultérieurement comme des conséquences particulières des théories générales exposées en premier lieu. Il nous faut donc demander au lecteur d'avoir le courage d'utiliser la voie aride de l'abstraction. Voici les détails du plan de notre exposé.

1 - Dans ce chapitre, nous donnons quelques indications sur les structures algébriques les plus générales, à savoir, par ordre de généralité décroissante :

— les *monoïdes* et les *groupes* ;
— les *anneaux* ;
— les *corps* ;
— les *espaces vectoriels.*

Nous définirons ces structures, qui ont été baptisées ainsi à la fin du XIXe siècle, et nous étudierons leurs propriétés. Nous constaterons au passage — et ce n'est pas sans intérêt — que l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs a une structure d'anneau, et que les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ des nombres réels et des nombres complexes ont une structure de corps ; quant à la théorie des espaces vectoriels, nous verrons qu'elle débouche sur une branche très féconde de l'algèbre moderne : l'algèbre linéaire (entendez : l'algèbre du premier degré).

2 - La définition de deux corps très importants : ceux des *nombres réels* et des *nombres complexes* est étudiée aux pages 52 à 57.

3 - L'exposé des principaux résultats de l'algèbre linéaire (théorie des matrices et des déterminants, théorie des formes, théorie des invariants, tenseurs), outils indispensables de l'algèbre moderne est énoncé aux pages 58 à 66.

4 - Aux pages 66 à 73, nous définirons les problèmes particuliers dont l'ensemble constitue classiquement l'*algèbre supérieure*. La résolution de ces problèmes fait appel aux théories évoquées pp. 37 et 38. Nous aborderons ainsi :

— la théorie des équations, qui fait appel à la théorie des groupes ;
— l'algèbre des polynômes à une indéterminée, qui fait appel à la théorie des anneaux ;
— l'algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées, la théorie des formes quadratiques et quelques autres questions en rapport avec la théorie des corps.

Monoïdes et groupes.

Une structure qui comprend au moins une loi de composition interne est appelée *structure algébrique.* Une structure algébrique qui possède au moins deux lois de composition interne est appelée une *algèbre* (terme qui prend donc un sens différent du sens technique usuel). Nous commencerons notre exposé de la description des structures par la structure de monoïde et par celle de groupe, qui sont des structures à une seule opération. Signalons en outre que la structure de groupe fut, chronologiquement, la première structure mise en évidence (par Galois en 1830). Nous dirons d'abord quelques mots des *monoïdes*, dont la structure est plus générale que celle de groupe.

Monoïdes.

● *Définition.* Considérons un ensemble E non vide, sur lequel on définit une loi de composition interne binaire (c'est-à-dire portant sur deux éléments x et y de l'ensemble E), associative, et notée $\perp$. Nous supposerons en outre qu'il existe dans l'ensemble E un élément noté e qui est neutre pour cette loi. Cet ensemble est dit muni d'une *structure de monoïde.* En abrégé, on écrira que $(E, \perp, e)$ définit un monoïde.

● *Remarques :*

1 - L'opération $\perp$ peut être, selon les cas, commutative ou non commutative. On parle alors, respectivement, d'un *monoïde commutatif* ou d'un *monoïde non commutatif.*

2 - Si E est un monoïde, un sous-ensemble A de E est un *sous-monoïde* s'il contient l'élément neutre e et s'il est fermé pour la loi $\perp$ dans E (c'est-à-dire que le composé $a \perp b$ de deux éléments de A appartient lui-même à A ; voir p. 38, remarque 6).

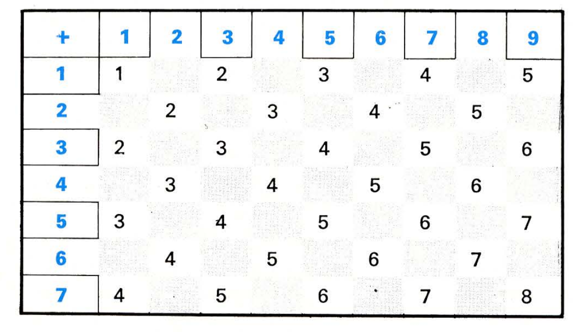
3 - On pourrait imaginer une structure encore plus simple : celle d'un ensemble E doté d'une loi de composition interne associative, sans faire d'hypothèse sur l'existence de l'élément neutre. Une telle structure serait notée $(E, \perp)$; on l'appelle un *semi-groupe.*

4 - Enfin, on peut aussi imaginer un ensemble dans lequel la loi de composition interne ne serait pas associative. Le triplet $(E, \perp, e)$ désignerait alors non pas une structure de monoïde mais une structure de *monade.* Nous n'en parlerons pas ici.

● *Exemples.* Pour montrer qu'un ensemble, doté d'une loi de composition interne, est un monoïde, il faut démontrer : 1° qu'il n'est pas vide ; 2° que la loi de composition interne définie sur cet ensemble est associative ; 3° qu'il existe dans l'ensemble un élément e neutre pour la loi considérée.

— Le triplet $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde. Dans ce triplet, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels augmenté du zéro, le signe « + » est celui de l'addition usuelle, et 0 est le nombre zéro. En effet : 1° $\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble vide ; 2° l'addition (+) des entiers naturels est une opération associative (cette propriété découle des axiomes définissant les entiers naturels) ; 3° le nombre zéro est neutre pour l'addition dans $\mathbb{N}$, puisque, quel que soit l'entier naturel x, on a toujours $x + 0 = 0 + x = 0$.

Loi de composition interne sur $\mathbb{N}$ (addition). Le produit cartésien $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ est composé de tous les couples (a, b) d'entiers naturels (le zéro n'a pas été indiqué, puisqu'il n'appartient pas à $\mathbb{N}^*$, mais à $\mathbb{N}$). Les nombres écrits en noir sont les éléments de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$: chacun de ces éléments, à l'intersection d'une ligne et d'une colonne, est la somme de deux entiers non nuls. L'opération qui permet de trouver cette somme est l'addition. Si l'on ajoute à $\mathbb{N}^*$ le nombre zéro, noté 0, tel que pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ $0 + a = a + 0 = 0$, alors on construit le monoïde $(\mathbb{N}, +, 0)$.



+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1		2		3		4		5
2		2		3		4		5	
3	2		3		4		5		6
4		3		4		5		6	
5	3		4		5		6		7
6		4		5		6		7	
7	4		5		6		7		8



Hermann Grassmann (1809-1877), mathématicien allemand, auteur de travaux fondamentaux sur la géométrie à *n* dimensions et sur ce qu'il a nommé l'« algèbre extérieure » (*Ausdehnungslehre*, 1862).

— Le triplet $(\mathbb{N}, \times, 1)$ est un monoïde. En effet : 1° $\mathbb{N}$ est un ensemble non vide ; 2° la loi de composition interne notée « × » est la multiplication usuelle : elle est associative en vertu des propriétés des entiers naturels ; 3° 1 est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{N}$, puisque $1 \times a = a \times 1 = a$. Notons au passage que, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, la loi de composition interne $a \times b$ peut se noter ab ou $a \,.\, b$.

— Les triplets $(\mathbb{Z}, +, 0)$ et $(\mathbb{Z}, \times, 1)$ sont aussi des monoïdes : 1° $\mathbb{Z}$ est un ensemble non vide ; 2° les lois de composition interne « + » et « × » (addition et multiplication) sont associatives en vertu des propriétés des entiers ; 0 est neutre pour l'addition dans $\mathbb{Z}$ et 1 est neutre pour la multiplication dans $\mathbb{Z}$.

● *Monoïde des substitutions.* Les substitutions ont été définies p. 35. Par exemple si $E = \{a, b\}$, il y a quatre substitutions possibles, que nous noterons s_1, s_2, s_3 et s_4 et qui sont les suivantes :

— la substitution identique qui change $\{a, b\}$ en $\{a, b\}$, c'est-à-dire qui applique a sur a et b sur b ; on l'écrit :

$$s_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, \quad (1)$$

en inscrivant en haut l'ensemble de départ et en bas l'ensemble d'arrivée.

— Les autres substitutions possibles sont :

$$s_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}; \quad (2)$$

$$s_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ a & a \end{pmatrix}; \quad (3)$$

$$s_4 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix}; \quad (4)$$

1 - L'ensemble :

$$S(E) = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \quad (5)$$

est l'*ensemble des substitutions* associé à l'ensemble E ; c'est un ensemble non vide.

2 - L'opération *produit* définie p. 35, est une opération associative, qui admet comme élément neutre la substitution identique s_1. Nous l'indiquerons par le symbole « × ». La *table de multiplication* des substitutions dans E s'établit en examinant tous les produits $s_i \times s_j$ possibles. On obtient :

×	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1	s_1	s_2	s_3	s_4
s_2	s_2	s_1	s_4	s_3
s_3	s_3	s_3	s_3	s_3
s_4	s_4	s_4	s_4	s_4

donc l'ensemble $S(E)$ est un monoïde : on l'appelle *monoïde des substitutions de E.*

3 - Si E contient n éléments, on démontre aisément que l'ensemble* des substitutions est aussi un monoïde.

● *Ordre d'un monoïde.* On appelle ordre d'un monoïde le nombre d'éléments qu'il contient (son cardinal). Le monoïde est dit *fini* quand il contient un nombre fini d'éléments (ce qui n'est pas le cas pour les exemples donnés à partir de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ci-dessus).

Structure de groupe.

● *Définition.* Un groupe est un monoïde dont tous les éléments sont symétrisables pour l'opération définissant le monoïde. Explicitons cette définition.

— Puisqu'un groupe est un monoïde, il peut être défini par le triplet $(G, \perp, e)$, introduit au paragraphe *a* : l'ensemble G est non vide, $\perp$ est une opération binaire associative (mais pas nécessairement commutative) et e est l'élément neutre pour cette opération.

— Dire que tous les éléments x d'un groupe G sont symétrisables, cela revient à dire que, pour tout $x \in G$ il existe un élément x' tel que :

$$xx' = x'x = e, \tag{6}$$

comme on l'a expliqué ci-dessus, p. 37.

— Si la loi $\perp$ est commutative, le groupe est dit *commutatif* ou encore *abélien* (en hommage au nom du mathématicien norvégien N. H. Abel).

— Un groupe qui contient un nombre n fini d'éléments est dit *groupe fini d'ordre n*.

● *Notation.* Un groupe se désigne habituellement par la lettre G ou par le triplet $(G, \perp, e)$ qui sert à le définir. La loi $\perp$ peut être notée multiplicativement à l'aide du signe « × », et le groupe est dit *multiplicatif* ; elle peut être aussi notée additivement, à l'aide du signe « + » et le groupe est dit *additif*. Si le groupe est multiplicatif, l'élément neutre est noté 1, et le symétrique d'un élément x quelconque est noté x^{-1}. Si le groupe est additif, l'élément neutre est noté 0, et le symétrique d'un élément x quelconque est noté $-x$. Comme on l'a expliqué p. 38, on dit encore que l'élément x^{-1} est l'inverse de x, et que $-x$ est l'opposé de x.

● *Exemples.*

— $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un groupe additif commutatif : 1° $\mathbb{Z}$ est l'ensemble non vide des entiers relatifs ; 2° l'opération « + » est l'addition des entiers, elle est associative ; 3° zéro est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{Z}$; 4° chaque entier x admet un opposé $-x$ tel que :

$$(x) + (-x) = (-x) + (x) = 0. \tag{7}$$

Donc le monoïde $(\mathbb{Z}, +, 0)$ possède la structure de groupe. Comme l'addition des entiers est commutative (en vertu de la définition axiomatique des entiers), on peut préciser qu'il s'agit d'un groupe abélien.

— Le triplet $(\mathbb{Q}^*, \times, 1)$ définit un groupe multiplicatif : 1° $\mathbb{Q}^*$ est l'ensemble non vide des nombres rationnels différents de zéro ; 2° l'opération « × » est la multiplication usuelle, qui est associative ; 3° le rationnel 1 est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{Q}^*$; 4° à tout $x \in \mathbb{Q}^*$ on peut associer son inverse x^{-1} tel que :

$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1. \tag{8}$$

(L'inverse du nombre a est $1/a$; l'inverse de la fraction a/b est b/a.)

— Le triplet $(\mathbb{R}^*, \times, 1)$ définit un groupe multiplicatif : 1° $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble non vide des réels différents de zéro (voir la définition des réels p. 31 et p. 53) ; 2° la loi de composition interne « × » est la multiplication des réels, c'est une opération associative ; 3° le réel 1 est neutre pour la multiplication dans $\mathbb{R}^*$; 4° tout réel $x \in \mathbb{R}^*$ admet un inverse x^{-1}.

— Le triplet $(\mathbb{R}^3, +, 0)$ définit un groupe additif : 1° $\mathbb{R}^3$ est le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des triplets (x, y, z) de nombres réels ; 2° la loi de composition interne « + » est l'*addition dans* $\mathbb{R}^3$, définie (arbitrairement à l'aide d'axiomes) par :

$$(x, y, z) + (x', y', z') = [(x + x'), (y + y'), (z + z')] ; \tag{9}$$

3° cette opération est associative et commutative ; 4° l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{R}^3$ est l'élément $0 = (0, 0, 0)$; 5° le symétrique de chaque élément (x, y, z) est $(-x, -y, -z)$.

Pour les lecteurs qui ont quelques notions de mathématiques et de physique, le groupe $(\mathbb{R}^3, +, 0)$ est le groupe des vecteurs géométriques à trois dimensions ; (x, y, z) sont les composantes du vecteur ; l'opération « + » est la règle du parallélépipède, utilisée pour construire la résultante de trois vecteurs.

— Voici maintenant un exemple géométrique. Soit O un point fixe du plan, et considérons la rotation d'angle θ autour de ce point qui transforme un point M quelconque en un point M' ; nous appellerons $r(O, \theta)$ cette rotation et nous écrirons, en sous-entendant le point O :

$$M \xrightarrow{(\theta)} M'. \tag{10}$$

Soit E l'ensemble des rotations ainsi défini. Nous appelons *produit* de deux rotations (θ_1) et (θ_2) l'application successive de la rotation (θ_1) au point M et de la rotation (θ_2) au point M' ainsi obtenu. Le produit $(\theta_1) \perp (\theta_2)$ correspond donc à :

$$M \xrightarrow{(\theta_1)} M' \xrightarrow{(\theta_2)} M''. \tag{11}$$

Il est aisé de démontrer qu'on peut passer de M à M'' par la rotation d'angle $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$. Nous écrirons :

$$(\theta_1) \perp (\theta_2) = (\theta_3). \tag{12}$$

Bien noter que (θ_1), écrit avec les parenthèses, désigne une rotation, et que θ_1, sans parenthèses, est l'angle caractérisant cette rotation. L'élément neutre pour le produit $\perp$ est la rotation (0) d'angle $\theta = 0$, et chaque rotation (θ) possède un symétrique $(-\theta)$, puisque :

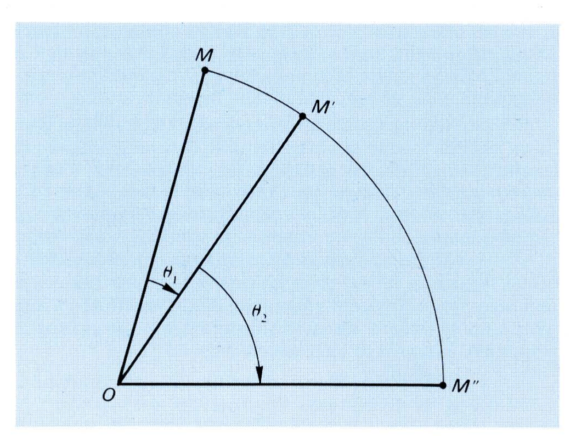
$$(\theta) \perp (-\theta) = (-\theta) \perp (\theta) = (0) ; \tag{13}$$

donc l'ensemble E des rotations est un groupe pour le produit de deux rotations, défini par le triplet $(E, \perp, (0))$.

L'opération (13) nous suggère d'utiliser la notation additive $\perp = +$; on écrira donc le produit de deux rotations sous la forme :

$$(\theta_1) + (\theta_2), \tag{14}$$

sans se laisser leurrer par le mot « produit » : nous dirons donc que l'ensemble des rotations autour d'un point O dans le plan est un groupe additif.



Rotations.
La rotation (O, θ_1) applique M sur M' ; la rotation (O, θ_2) applique M' sur M''. La rotation $(O, \theta_1 + \theta_2)$ qui applique M sur M'' est le produit de ces deux rotations.

● *Sous-groupe d'un monoïde.* Considérons un monoïde M, défini par le triplet $(M, \perp, e)$, et, dans ce monoïde, l'ensemble des éléments symétrisables, que nous désignons par $u_1, u_2, u_3, \ldots$ Cet ensemble est un *sous-monoïde*, puisque c'est une partie de M. Nous le noterons $U(M)$. Si, de plus, le composé $u_1 \perp u_2$ appartient à $U(M)$ quels que soient u_1 et u_2, alors $U(M)$ a une structure de groupe : nous dirons que c'est un *sous-groupe* du monoïde M et nous l'appelons le *groupe des éléments symétrisables de M* ou *groupe des unités de M*.

Par exemple la structure $M = (\mathbb{Z}, \times, 1)$ est un monoïde ; les seuls éléments symétrisables pour l'opération « × », c'est-à-dire les seuls entiers relatifs possédant un inverse entier, sont -1 et $+1$; donc :

$$U(M) = \{1, -1\}. \tag{15}$$

● *Groupe symétrique d'un ensemble.* Soit $M = S(E)$ le monoïde des substitutions d'un ensemble non vide E, que nous avons défini ci-dessus, à la fin du paragraphe **C**, *a*. Les éléments symétrisables qu'il contient constituent un groupe $U(M)$ appelé *groupe symétrique de E* et noté Sym E. En particulier, si $E = \{a, b, c, \ldots, m\}$, on écrit :

$$\text{Sym } E = E_n \tag{16}$$

et on le nomme *groupe de substitution sur n éléments*. Chaque élément de E_n est une permutation de l'ensemble E ; E_n contient donc n ! éléments : c'est un groupe d'ordre n.

Isomorphisme.

Tout ce qui précède est bien abstrait, et il est temps de souligner l'intérêt de la notion de groupe. Les quelques exemples que nous avons donnés montrent que les entiers positifs, les réels positifs, les rotations dans le plan, les substitutions des éléments d'un ensemble ont une structure de groupe pour des lois de composition interne définies. Si donc nous établissons les propriétés générales des groupes, nous les aurons établies par là même pour tous les ensembles qui viennent d'être cités et pour beaucoup d'autres encore : il y a là une économie de démonstration appréciable. Par ailleurs, des groupes d'éléments très dissemblables peuvent être en fait rapprochés grâce à la notion très féconde d'*isomorphisme*, définie d'une manière générale p. 38 et que nous allons maintenant exploiter.

● *Deux monoïdes $(E, \perp, e)$ et $(E', \perp', e')$* sont dits *isomorphes* s'il existe une application f bijective de E sur E' telle que, pour tout $x, y \in E$ on ait :

$$\begin{cases} f(e) = e' ; \\ f(x \perp y) = f(x) \perp' f(y). \end{cases} \tag{17}$$

Bien entendu, cette définition est aussi valable si les monoïdes sont des groupes.

● *Exemple.* Considérons les deux groupes $(\mathbb{R}, +, 0)$ et $(\mathbb{R}^+, \times, 1)$ dont les éléments sont des nombres réels. Le premier est un groupe pour l'addition et le second un groupe pour la multiplication. Considérons l'application $x \xrightarrow{f} e^x$, qui fait correspondre à chaque $x \in \mathbb{R}$ la *fonction exponentielle* $f(x) = e^x \in \mathbb{R}^+$ (e est un nombre transcendant qui sera défini en *Analyse* et dont la valeur approchée est $e = 2{,}718\,281\,8 \ldots$; donc e^x est toujours positif, quel que soit $x \in \mathbb{R}$). On a, d'après les règles du calcul sur les exposants :

$$\begin{cases} f(0) = e^0 = 1 ; \\ f(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x) \times f(y). \end{cases} \tag{18}$$

Autrement dit les conditions (17) sont vérifiées : l'application $x \xrightarrow{f} e^x$ est un isomorphisme.

● *Théorème de Cayley.* Tout monoïde est isomorphe à un monoïde de substitution ; tout groupe est isomorphe à un groupe de substitution. Ce résultat, dû à Cayley, est très important : il permet d'obtenir tous les monoïdes (tous les groupes) de la classe des monoïdes (ou des groupes) de substitutions.

Sous-groupes.

● *Définition.* Une partie A d'un groupe G est dite *sous-groupe* de G si A est un groupe pour l'opération $\perp$ définie sur le groupe G.

● *Exemples.* La notion de sous-groupe est une notion « à tiroirs ». Considérons par exemple le sous-groupe des nombres pairs $(P, +, 0)$ pour l'addition ; c'est un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{Z}, +, 0)$, qui est lui-même un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{Q}, +, 0)$, sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{R}, +, 0)$, sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{C}, +, 0)$, $\mathbb{C}$ désignant l'ensemble des nombres complexes.

● *Remarques* :

1 - Pour que A soit un sous-groupe de G, il faut que l'opération $\perp$ considérée soit la même dans les deux ensembles. Ainsi les réels positifs $\mathbb{R}^+$ sont un sous-ensemble des réels $\mathbb{R}$, mais le groupe $(\mathbb{R}^+, \times, 1)$ n'est pas un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R}, +, 0)$, car les deux groupes sont définis pour deux lois de composition différentes (× et +).

2 - Le sous-ensemble $\{e\}$ composé de l'élément neutre du groupe G est un sous-groupe de G et de tous les sous-groupes de G. On le nomme *sous-groupe unité*.

● *Sous-groupes cycliques.* Considérons un groupe G noté multiplicativement, et un élément a appartenant à G. On note a^2 le composé $a \times a$, a^3 le composé $a \times a \times a$, ..., a^n le composé formé de n facteurs $a \times a \times a \times \cdots \times a$. Nous conviendrons en outre que $a^0 = 1$ (élément neutre pour l'opération « × »). Avec ces définitions, on peut établir les règles de calculs sur les exposants :

$$\begin{cases} a^n a^m = a^m a^n = a^{m+n} ; \\ (a^n)^m = a^{nm}. \end{cases} \tag{19}$$

Soit maintenant l'ensemble des puissances de a, que nous noterons $\langle a \rangle$:

$$\langle a \rangle = \{1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}. \tag{20}$$

On montre que $\langle a \rangle$ est un sous-groupe, qu'on appelle *sous-groupe cyclique de G engendré par l'élément a* (si le groupe G est additif, l'opération est notée +, et les puissances de a sont remplacées par les *multiples* de a : $0, a, 2a, \ldots, ka$; le sous-groupe cyclique contient zéro et les multiples de a).

Enfin, un groupe G est dit lui-même *cyclique* s'il coïncide avec ses sous-groupes $\langle a \rangle$; l'élément a est dit *générateur* du groupe considéré. Tout groupe cyclique est commutatif.

Décomposition d'un groupe suivant son sous-groupe.

• *Produit des sous-ensembles d'un groupe.* Soit A, B, C, ... les sous-ensembles d'un groupe G, dont la loi de composition interne est notée multiplicativement. Pour tout $a \in A$ et pour $b \in B$ il existe un composé $x = ab$ qui appartient au groupe G : l'ensemble de tous les éléments x de G représentables par le composé ab est le *produit AB* des sous-ensembles A et B pour l'opération considérée. Comme la loi de composition interne est associative, on a :

$$(AB)\,C = A(BC)\,. \qquad (21)$$

Si A ne contient que le seul élément a, le produit AB se réduit à aB et le produit BA à Ba (la loi de composition interne n'est pas nécessairement commutative, donc aB n'est pas nécessairement égal à Ba). Le diagramme ci-dessous est une image du produit AB.

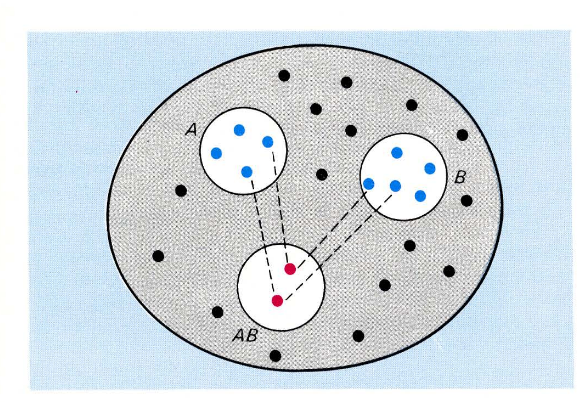


Image du produit AB de deux sous-ensembles d'un groupe. Le groupe G est représenté par la surface à fond gris ; ses éléments sont figurés par des points noirs, bleus ou rouges. Les sous-ensembles A et B sont composés de points bleus distincts. La loi de composition interne définissant le groupe, appliquée à deux points bleus appartenant l'un à A et l'autre à B donne un point rouge (on a représenté deux compositions particulières à l'aide de pointillés partant des deux éléments bleus composés et aboutissant aux composés rouges). L'ensemble AB des points rouges est le produit des sous-ensembles A et B.

• *Classes d'équivalence dans un groupe.* Soit maintenant A un sous-groupe de G (attention : tout sous-ensemble de G n'est pas nécessairement un sous-groupe, mais tout sous-groupe de G est un sous-ensemble de G) et x un élément de G. On appelle *classe d'équivalence à gauche du groupe G modulo A (= selon le sous-groupe A) engendrée par l'élément x* le produit xA, défini comme ci-dessus. On définit de même la classe d'équivalence à droite Ax. Si le groupe est abélien, c'est-à-dire si la loi de composition interne est commutative, les deux classes coïncident :

$$xA = Ax\,. \qquad (22)$$

1 - A étant un sous-groupe de G contient l'élément neutre e (c'est-à-dire l'unité 1 pour un groupe multiplicatif). Comme $xe = x$, l'élément x appartient donc à la classe xA.

2 - Pour tout $y \in xA$, on a $yA = xA$: donc la classe d'équivalence à gauche peut être engendrée par n'importe quel élément de la classe.

3 - Il en résulte que deux classes d'équivalence à gauche selon un sous-groupe A soit coïncident, soit sont disjointes.

4 - Les propositions précédentes sont aussi vraies pour la classe d'équivalence à droite Ax.

On peut donc décomposer un groupe G en classes d'équivalence (à gauche et à droite) modulo A qui sont disjointes deux à deux : on dit que G est décomposé à gauche ou à droite selon son sous-groupe A. Si l'opération définissant le groupe est commutative, c'est-à-dire si le groupe est abélien, les deux décompositions coïncident : on parle de la *décomposition du groupe abélien G selon son sous-groupe A* tout court.

Dans le cas où G est un groupe fini d'ordre n, l'ordre k de tout sous-groupe A de G est un diviseur de n (*théorème de Lagrange*).

• *Homomorphismes.*

— Si les décompositions à gauche et à droite selon un sous-groupe A de G coïncident, A est dit *sous-groupe invariant* (ou *distingué*) de G. C'est le cas, par exemple, de tous les sous-groupes d'un groupe G abélien (mais il peut exister des sous-groupes invariants dans des groupes non commutatifs).

— Soit deux classes d'équivalence modulo A, xA et yA dans un groupe G. Chaque classe d'équivalence peut être interprétée comme un sous-ensemble de G, donc on peut définir le produit $xA \times yA$ comme ci-dessus (produit des deux sous-ensembles d'un groupe). On montre que si A est un sous-groupe invariant, le produit $xA \times yA = xyA$ est encore une classe d'équivalence modulo A. Cette classe est appelée *groupe quotient* G/A du groupe G par A. On montre que si G est abélien, G/A est abélien, et que si G est cyclique, G/A est lui-même cyclique.

— Soit l'application $\varphi : G \xrightarrow{\varphi} G'$ appliquant G sur G' de telle sorte que à tout élément a de G corresponde un élément $a' = a\varphi$ bien défini de G'. Si, pour tout a', il existe un élément de G tel que $a' = a\varphi$ et si, pour tout couple a et b d'éléments dans G on a :

$$(ab)\,\varphi = a\varphi \times b\varphi\,, \qquad (23)$$

l'application φ est un *homomorphisme*. Si, de plus, φ est bijective, c'est un *isomorphisme*. Le développement de l'algèbre linéaire a mis en évidence le rôle important des homomorphismes ; nous retrouverons cette application et nous en préciserons les particularités en temps utile (voir p. 52).

Conclusion.

Le profane qui a parcouru l'exposé qui précède est peut-être déconcerté. Si sa formation mathématique élémentaire, au lycée, au collège, ou à l'école primaire, est antérieure aux années 1950-1960, il se pose sans doute la question suivante : « Je croyais que l'algèbre avait comme but essentiel de résoudre des équations, en utilisant les règles du calcul dit algébrique. A quoi correspondent les abstractions qui précèdent eu égard à ce problème ? »

Nous lui répondrons, comme on l'a expliqué dans l'introduction historique p. 36, que, depuis environ un siècle et demi, l'algèbre (celle des mathématiciens et non pas celle des programmes scolaires d'une période encore récente) a changé de « but ». Elle est devenue l'art de combiner les éléments d'un ensemble quelconque selon des lois de composition interne ou externe elles-mêmes quelconques. Le « calcul algébrique » et son aboutissement, la résolution des équations, sont des cas particuliers de cette combinatoire dont les règles dépendent de la structure de l'ensemble considéré. Et si ces règles semblent plus difficiles à comprendre, plus abstraites que les règles du calcul « ordinaire », elles méritent cependant qu'on fasse l'effort de les assimiler et d'abord de bien saisir les définitions proposées. Car le calcul « ordinaire », si commode et si simple quand il s'agit de résoudre des équations du premier, du deuxième, du troisième ou même du quatrième degré, ou encore quand il s'agit d'étudier, en analyse, les propriétés de quelques fonctions élémentaires, se révèle bien vite un outil insuffisant quand les problèmes se compliquent. C'est alors que l'algèbre des structures, et en particulier la théorie des groupes, prend avantageusement le relais et que bien des problèmes restés sans réponse ou impossibles à traiter jusqu'aux environs de 1850/1860 ont trouvé leur solution grâce aux progrès incessants des algèbres abstraites et de l'algèbre linéaire, étudiées p. 58. Contentons-nous simplement de souligner ici que c'est l'idée du groupe de substitutions des n racines d'une équation du n-ième degré qui a mis Évariste Galois sur la voie royale de la théorie des groupes, théorie qui permet de résoudre des quantités de problèmes touchant à la théorie des nombres, à la géométrie, à la topologie, etc.

Enfin, si les raisonnements abstraits vous effrayent, retenez au moins les points suivants :

1 - la définition d'un groupe $(G, \perp, e)$ donnée p. 40 ;

2 - la notion de sous-groupe A d'un groupe G ;

3 - la théorie des groupes de substitutions, et en particulier le fait que le groupe symétrique de n objets S_n contient $n\,!$ substitutions possibles.

Structure d'anneau.

La structure d'anneau a été introduite par Dedekind, dont les travaux fondamentaux datent de 1872 (sur les irrationnels), de 1888 (*Was sind und was sollen die Zahlen : Ce que sont et ce que doivent être les nombres*), et de 1879-1888 (sur les nombres algébriques). Le mot « anneau » a été introduit par Hilbert (1897) ; Dedekind appelait les anneaux « ordre ». On notera qu'il s'est écoulé environ 50 à 60 ans, soit deux générations de mathématiciens, entre l'introduction de la structure de groupe, par Galois, et la théorie des anneaux.

Définition.

La structure de groupe était définie par une opération seulement, d'où la notation $(G, \perp, e)$: un groupe est une *structure algébrique.* Nous allons maintenant définir une structure à deux opérations $(E, \perp, \top, e, e')$, c'est-à-dire une *algèbre*, au sens non technique défini p. 39.

• *Définition générale.* Le quintette $(E, \perp, \top, e, e')$ est un *anneau* si :

1 - $(E, \perp, e)$ est un groupe abélien ;

2 - $(E, \top, e')$ est un monoïde ;

3 - les opérations $\perp$ et $\top$ sont doublement distributives ; pour tout $x, y, z \in E$, on a :

$$\begin{cases} x \top (y \perp z) = (x \top y) \perp (x \top z)\,; \\ (y \perp z) \top x = (y \top x) \perp (z \top x)\,. \end{cases} \qquad (1)$$

• *Remarques et notation.*

1 - L'opération $\perp$ est associative (elle définit un groupe) et commutative (le groupe doit être abélien). Nous la noterons additivement à l'aide du signe « + » ; l'élément neutre e sera noté 0 et le symétrique de x dans E sera noté $-x$. Si E est un ensemble numérique, $+$ et 0 ont la signification arithmétique usuelle, sinon l'opération $+$ et l'élément 0 doivent être définis axiomatiquement.

2 - L'opération $\top$ est associative (elle définit un monoïde), mais elle n'est pas nécessairement commutative. Cette opération sera notée multiplicativement, à l'aide du signe « $\times$ », l'élément neutre e' sera noté 1. Il n'est pas nécessaire de prévoir une notation pour le symétrique (l'inverse) de x, puisque la loi de composition interne $\top$ ne définit pas un groupe, mais un monoïde.

Le groupe $(E, \perp, e)$ sera donc noté $(E, +, 0)$, et le monoïde $(E, \top, e')$ sera noté $(E, \times, 1)$. Quant à la loi de distributivité (1), elle s'écrira :

$$\begin{cases} x(y+z) = xy + xz\,; \\ (y+z)\,x = yx + zx\,. \end{cases} \qquad (2)$$

3 - La définition de la structure d'anneau donnée ici est celle proposée par l'algébriste américain Nathan Jacobson. Dans de nombreux traités d'algèbre, cette structure est définie sans imposer d'élément neutre e' pour la deuxième loi de composition interne. Dès lors un ensemble E est un anneau : 1° si $(E, \perp, e)$ est un groupe ; 2° si $(E, \top)$ est un ensemble simplement muni d'une opération associative (un tel ensemble est appelé un semi-groupe) ; 3° si $\perp$ et $\top$ sont doublement distributives.

4 - Avec deux opérations associatives au lieu d'une seule, la structure d'anneau est plus riche que celle de groupe. Si l'on veut une comparaison : un groupe est assimilable à un joueur de tennis qui ne saurait exécuter que des *coups droits* ; un anneau correspondrait à un joueur qui saurait, en outre, faire des *revers.* Ce deuxième joueur aurait évidemment un jeu plus varié et plus spectaculaire que le premier.

• *Exemples numériques.*

— L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, muni des opérations $+$ et $\times$ classiques, et comprenant les éléments neutres respectifs 0 et 1 est un anneau. En effet :

1 - $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un groupe ;

2 - $(\mathbb{Z}, \times, 1)$ est un monoïde ;

3 - l'addition et la multiplication des entiers sont des opérations mutuellement distributives.

— Considérons l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels, muni des lois de composition interne $+$ et $\times$ usuelles. $\mathbb{Q}$ est un ensemble non vide qui répond aux caractères suivants :

1 - les opérations $+$ et $\times$ sont définies pour tout couple $x, y \in \mathbb{Q}$;

2 - l'opération $+$ admet 0 comme élément neutre ; l'opération $\times$ admet 1 comme élément neutre ;

3 - les opérations $+$ et $\times$ sont toutes deux associatives, commutatives et réciproquement distributives ;

4 - tout $x \in \mathbb{Q}$ admet un symétrique $-x$ pour la loi de composition interne $+$ et un symétrique $x^{-1} = 1/x$ pour la loi de composition interne $\times$.

Par conséquent : 1° $(\mathbb{Q}, +, 0)$ est un groupe ; 2° $(\mathbb{Q}, \times, 1)$ est aussi un groupe, donc, *a fortiori*, un monoïde ; 3° la loi de double distributivité est vérifiée. Donc l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels a une structure d'anneau. Notons que c'est un anneau très riche,

puisque la deuxième opération possède des propriétés non obligatoires dans la structure d'anneau (nous verrons plus loin que l'anneau $\mathbb{Q}$ est, en fait, un *corps*).

— Considérons l'ensemble E des nombres de la forme $m + n\sqrt{2}$, m et n étant des entiers relatifs, muni des opérations $+$ et $\times$.

1 - Observons d'abord que si l'on fait $m = n = 0$, on a $m + n\sqrt{2} = 0$: donc $0 \in E$. De même, si $m = 1$ et $n = 0$, on a $m + n\sqrt{2} = 1$, donc 1 appartient aussi à E.

2 - Les lois de composition $+$ et $\times$ sont associatives, commutatives et doublement distributives.

3 - La somme de deux éléments de E est un élément de E :

$$(m + n\sqrt{2}) + (m' + n'\sqrt{2}) = (m + m') + (n + n')\sqrt{2} = a + b\sqrt{2}. \quad (3)$$

Comme $a = m + m'$ et $b = n + n'$ sont des entiers, le nombre $a + b\sqrt{2} \in E$.

4 - Le produit de deux éléments appartenant à E est un élément de E :

$$(m + n\sqrt{2})(m' + n'\sqrt{2}) = (mm' + 2nn') + (mn' + nm')\sqrt{2}. \quad (4)$$

5 - 0 et 1 sont respectivement neutres pour l'addition et la multiplication.

6 - Tout élément $(m + n\sqrt{2})$ admet un symétrique pour l'addition : $-m - n\sqrt{2}$.

Donc : 1° $(E, +, 0)$ est un groupe abélien ; 2° $(E, \times, 1)$ est un monoïde ; 3° la loi de double distributivité est vérifiée. L'ensemble E est donc un anneau. On peut préciser un *anneau numérique abélien*, puisque ses éléments sont des nombres et que la deuxième opération est elle aussi commutative.

● *Un exemple ... électrique.* Considérons un circuit électrique comprenant n contacts, qui peuvent être ouverts (le courant ne passe pas) ou fermés (le courant passe). Pour décrire ce circuit, nous devons préciser quels sont les contacts ouverts et quels sont les contacts fermés. Pour cela, convenons de faire correspondre le symbole 0 à un contact ouvert et le symbole 1 à un contact fermé. Appelons a, b, c, ..., n les contacts, et x un contact quelconque ; nous décrirons le circuit à l'aide du tableau suivant, en appelant $f(x)$ la valeur 0 ou 1 attribuée à un contact x quelconque :

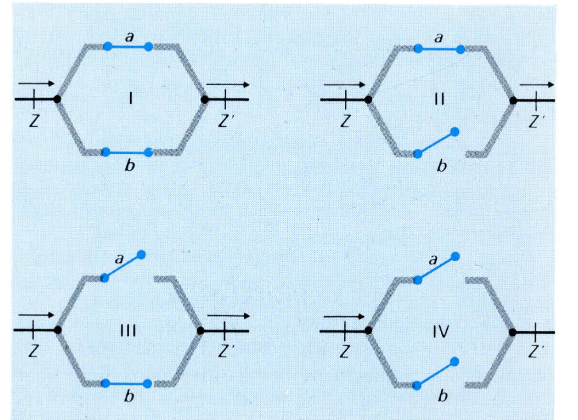
x	a	b	c	d	...	n
$f(x)$	0	1	1	0	...	1

(L'exemple est arbitraire.) Par exemple le nombre :

01101000111010111

décrit un circuit à 17 contacts et signifie : le premier contact est ouvert ; le second est fermé ; le troisième est fermé ; le quatrième est ouvert ; le cinquième est fermé ; le sixième, le septième et le huitième sont ouverts ; le neuvième, le dixième et le onzième sont fermés ; le douzième est ouvert ; le treizième est fermé ; le quatorzième est ouvert ; le quinzième, le seizième et le dix-septième sont fermés. Dans la notation numérique (dite aussi *notation binaire*, car elle n'utilise que deux signes), il nous a fallu 17 caractères d'imprimerie pour décrire l'état du circuit ; avec la notation écrite qui la traduit, nous avons eu besoin de 300 caractères. Voilà qui doit nous encourager à nous familiariser avec la notation binaire. Signalons dès maintenant qu'elle ne permet de transcrire que deux situations : le courant passe ou il ne passe pas, sans

Montage en dérivation.
Les quatre valeurs possibles des contacts *a* **et** *b* **sont :**
I - $a = b = 1$. **II -** $a = 1, b = 0$.
III - $a = 0, b = 1$. **IV -** $a = b = 0$.



qu'il y ait de troisième solution possible. La notation binaire traduit *le tout* (= 1) *ou rien* (= 0).

— Soit x la valeur d'un contact ; s'il est ouvert, $x = 0$. Fermons-le : il prend la valeur $x' = 1$. Ouvrons le contact $x' = 1$: il prend la valeur $(x')' = 0$. Un couple de valeurs (x, x') sera dit *symétrique*. Les deux seuls couples possibles de valeurs symétriques sont (1, 0) et (0, 1).

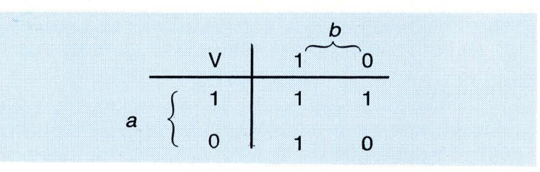
— Montage en dérivation : considérons un circuit comprenant deux contacts disposés en dérivation. La figure précédente indique toutes les dispositions possibles.

Il est clair que la dérivation à deux contacts est équivalente à un contact unique c, qui aurait la valeur 1 dans tous les cas où le courant passe de Z à Z', c'est-à-dire dans les cas I, II et III de la figure, et la valeur 0 dans le cas IV. La combinaison (a, b) est donc une loi de composition interne sur l'ensemble des contacts, opération que nous noterons « V » :

$$a \vee b = c. \quad (5)$$

(V est l'initiale du mot latin *Vel* = « ou » : pour que $c = 1$, il faut et il suffit que l'un *ou* l'autre des contacts a et b soit fermé, c'est-à-dire ait pour valeur 1).

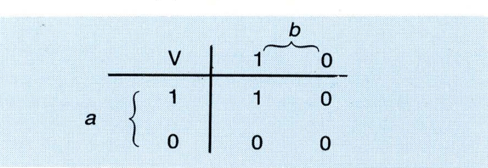
La table de la loi de composition interne V peut donc s'écrire comme suit :



V		b = 1	b = 0
a	1	1	1
	0	1	0

Table pour la loi de composition interne V ***: la valeur du composé*** $a \vee b$ ***est à l'intersection de la ligne*** a ***et de la colonne*** b***. Par exemple :*** $1 \vee 0 = 1$.

— Montage en série : le montage en série de deux contacts a et b est indiqué sur la figure ci-après. Il est équivalent à $c = 1$ si a et b sont fermés ($a = b = 1$), et à 0 dans tous les autres cas (il suffit qu'un des deux contacts soit ouvert pour que le courant ne passe plus). Le montage en série est donc une loi de composition interne que nous noterons « Λ » (c'est un V renversé) ; en voici la table :



V		b = 1	b = 0
a	1	1	0
	0	0	0

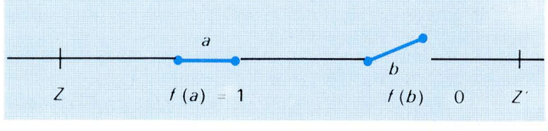
Table pour la loi de composition interne Λ.

— En résumé, nous sommes amenés à considérer l'ensemble $B = \{0, 1\}$ muni des deux opérations V et Λ et de la définition de l'opération « $'$ » : $x = 0$, $x' = 1$; $x = 1$, $x' = 0$.

1 - Il est aisé de constater que l'opération V est associative, commutative ($a \vee b = b \vee a$), et qu'elle admet 1 pour élément neutre. D'autre part, puisque $0' = 1$ et $1' = 0$, on a $1 + 1' = 1 + 0 = 1$ et $0 + 0' = 0 + 1 = 1$: donc tout élément de $B = \{0, 1\}$ possède un inverse pour l'opération V. Le triplet $(B, \vee, 1)$ est un groupe.

2 - On démontrerait de même que $(b, \wedge, 0)$ est un monoïde.

3 - Les opérations V et Λ sont mutuellement distributives.



Montage en série.

Donc l'ensemble B dont la structure est définie par le sextet $(B, \vee, \wedge, 1, 0, ')$ est un anneau. Nous verrons plus loin (p. 50) qu'on peut le qualifier de *booléen* (on dit aussi que c'est une *algèbre de Boole*), en hommage au logicien et mathématicien britannique George Boole.

● *Autres exemples.* Parmi les ensembles dont on se sert usuellement en mathématiques, et que nous étudierons plus loin, certains ont une structure d'anneau, par exemple :

— l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs (anneau abélien), étudié p. 27 ;

— l'ensemble des classes résiduelles modulo n (anneau abélien), étudié p. 29 ;

— l'anneau des matrices carrées d'ordre n, anneau non commutatif très important qui sera étudié p. 62 ;

— l'anneau des polynômes à une indéterminée ;

— etc.

Types d'anneaux.

On obtient différents types d'anneaux en imposant des conditions supplémentaires au monoïde $(E, \top, e')$.

● *Anneau commutatif.* Si l'opération $\top$ est commutative, l'anneau est dit *commutatif* ou *abélien* (c'est le cas pour les enzembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ par exemple). L'anneau des matrices carrées d'ordre n, en revanche, n'est pas commutatif.

● *Domaine d'intégrité.* Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$ impliquent $xy \neq 0$, l'anneau est appelé un *domaine d'intégrité*. Cela signifie que l'ensemble E^*, constitué de tous les éléments de E à l'exclusion de l'élément neutre $e = 0$, est un sous-monoïde du monoïde défini par $(E, \times, 1)$. La définition d'un sous-monoïde est donnée p. 40.

Les ensembles numériques $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des domaines d'intégrité ; cet énoncé traduit, dans ces ensembles, la propriété bien connue des collégiens : pour qu'un produit de facteurs ab soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul.

● *Diviseurs de zéro.* Si, dans un anneau E, on a à la fois $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $ab = 0$, a est appelé un *diviseur de zéro à gauche* (ou *à droite* si $ba = 0$).

Dans un domaine d'intégrité, par exemple dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, le produit ab ($ab \neq 0$) est nul si, et seulement si, a est nul. Donc le seul diviseur de zéro est 0. Tout ensemble qui possède un ou des diviseurs de zéro différents de 0 n'est pas un domaine d'intégrité.

● *Corps.* Si nous imposons à la deuxième loi de composition interne la condition supplémentaire : tout élément $a \neq 0$ de l'anneau E possède un inverse b dans E pour cette deuxième loi, l'anneau est appelé *anneau de division* ou *corps*.

Par exemple : l'anneau $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps, puisque l'égalité $ab = 1$ n'est possible que si $a = b = 1$. En revanche, l'anneau $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est un corps, puisque, à tout $a \neq 0$ il correspond un inverse a^{-1} tel que $aa^{-1} = 1$. L'étude des propriétés des corps est faite p. 43.

● *Algèbres non associatives.* Un ensemble muni des axiomes de la structure d'anneau mais dont la deuxième opération n'est pas associative est une *algèbre non associative* (*algèbre* est pris au sens de « structure définie par au moins deux lois de composition interne », et non en son sens technique usuel), ou encore un *anneau non associatif.* La plus simple des algèbres non associatives est l'ensemble des vecteurs géométriques à trois dimensions, muni des opérations nommées *addition vectorielle* (+) et *produit vectoriel* (×). Cette algèbre est très utile aux physiciens, qui représentent un certain nombre de grandeurs fondamentales par le produit vectoriel de deux vecteurs (ainsi les notions de moment résultant d'un système de forces ou d'un moment cinétique.

Congruences.

Nous avons déjà rencontré la notion de congruence dans $\mathbb{Z}$, écrite sous la forme $b \equiv c \pmod{a}$, relation qui exprime que $b - c$ est divisible par l'entier a. Nous allons généraliser cette notion.

● *Congruence dans un monoïde (ou dans un groupe).* Soit $(E, \perp, e)$ un monoïde (voir la définition p. 39). Deux éléments a et a' de ce monoïde sont dits *congruents*, relation que nous représenterons par le symbole « $\equiv$ », si $a \equiv a'$ et $b \equiv b'$ entraînent $a \perp b \equiv a' \perp b'$. En d'autres termes, une congruence est une relation d'équivalence qui peut être composée selon la loi $\perp$.

L'ensemble de tous les éléments a' congrus à a dans E forme la *classe d'équivalence* $\bar{a}$; de même l'ensemble de tous les éléments b' congrus à b constitue la classe d'équivalence $\bar{b}$; etc. L'ensemble des classes d'équivalence :

$$\bar{E} = \{\bar{a}, \bar{b}, ...\}$$

est appelé *ensemble quotient* pour la relation $\equiv$; on écrit aussi $\bar{E} = E/\equiv$. Si le monoïde possède une structure de groupe, alors chaque classe $\bar{a}$ possède un inverse $\bar{a}^{-1}$, tel que $\bar{a}\bar{a}^{-1} = e$.

Enfin rappelons les définitions suivantes : un

sous-groupe K d'un groupe G est dit *normal* ou *invariant* si, pour tout $g \in G$ et pour tout $k \in K$ on a :

$$g^{-1} \perp k \perp g \in K, \qquad (6)$$

que nous noterons multiplicativement sous la forme :

$$g^{-1}\, kg \in K. \qquad (7)$$

• *Congruence dans un anneau.* Un anneau E possède la structure de groupe $(E, +, 0)$ et la structure de monoïde $(E, \times, 1)$. Une relation qui est à la fois une congruence dans $(E, +, 0)$ et dans $(E, \times, 1)$ est une congruence dans l'anneau E. Autrement dit, si $a \equiv a'$ et $b \equiv b'$, alors $a + b \equiv a' + b'$ et $ab \equiv a'\, b'$. Si $\bar{a}$ et $\bar{b}$ désignent deux classes d'équivalence pour la relation $\equiv$, on aura :

$$\begin{cases} \bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}\,; \\ \bar{a}\bar{b} = \overline{ab} \end{cases} \qquad (8)$$

On montre aisément que les deux lois de composition $+$ et $\times$ sont doublement distributives, donc l'ensemble $\bar{E}$ des classes d'équivalence est un anneau pour la relation $\equiv$; on l'appelle *anneau quotient* de E, et on le note parfois :

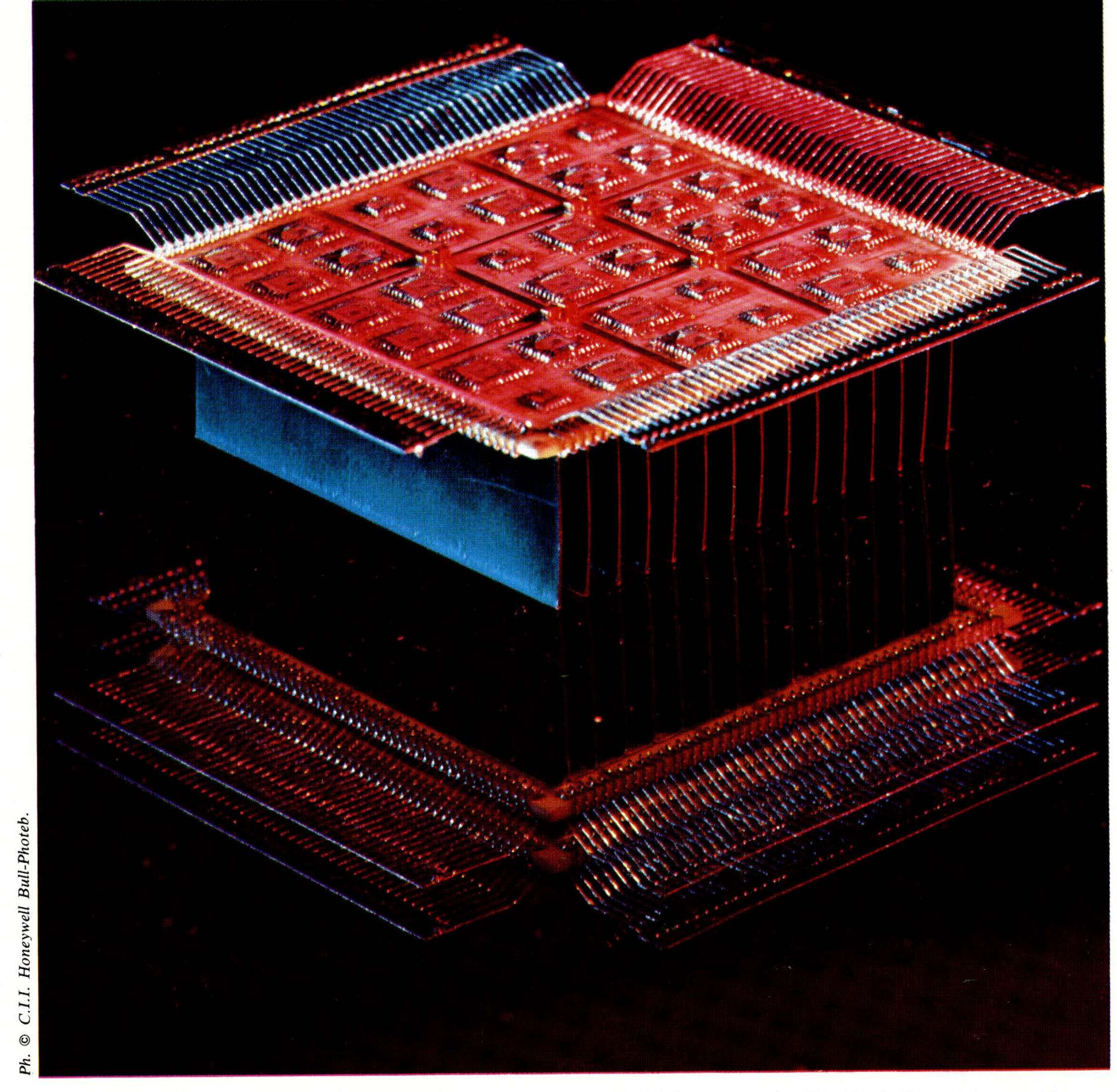
$$\bar{E} = E/\equiv. \qquad (9)$$

• *Notion d'idéal.* Considérons la structure $(E, +, 0)$ de l'anneau E et soit I un sous-groupe de E, tel que, pour tout $a \in E$ et pour tout $b \in I$, on ait ab et $ba \in I$. Le sous-groupe I est alors appelé un *idéal* de l'anneau E (quand on dit que I est un sous-groupe de E, on veut dire que c'est un sous-ensemble de E contenant l'élément neutre zéro et possédant une structure de groupe pour la loi $+$).

Isomorphismes.

Cette application joue un rôle très important dans la théorie des anneaux et dans celle des corps qui y est reliée. Comme on l'a dit p. 38, un isomorphisme est une application $E \xrightarrow{f} E'$, bijective, telle qu'à tout couple (a, b) d'éléments de E corresponde un couple (a', b') dans E' et que les images dans E' de $a \perp b$ et de $a \top b$ soient $a' \perp b'$ et $a' \top b'$, ou, si l'on utilise les notations additive et multiplicative telles que l'image de $a + b$ soit $a' + b'$ et celle de ab, $a'\, b'$.

Alors l'image de 0, élément neutre pour l'opération $+$ dans E, est $0'$, élément neutre pour la même opération dans E' ; et l'image de 1 est $1'$, élément neutre dans E'. En conséquence le symétrique $-a$ de a a pour image $-a'$ dans E' ; l'inverse a^{-1} de a a pour image dans E' : a'^{-1}. Si un anneau E n'a pas de diviseur de 0, alors l'isomorphe E' n'a pas de diviseur de 0. D'une manière générale, deux anneaux isomorphes E et E' peuvent avoir des éléments de nature différente, mais les opérations algébriques (combinatoires) sur leurs éléments sont les mêmes.



Ph. © C.I.I. Honeywell Bull-Photeb.

Les circuits électriques des ordinateurs les plus sophistiqués (ci-dessus un circuit intégré ultrarapide, capable de réaliser 10 000 fonctions logiques élémentaires) sont des applications spectaculaires des algèbres booléennes.

Structure de corps.

Comme la structure d'anneau, la structure de corps a été découverte par les mathématiciens du XIXe siècle dans le cadre des recherches sur la théorie des nombres, à l'origine desquelles se trouve Gauss. Les travaux de Kummer (entre 1850 et 1860), qui aboutissent à la notion de nombre algébrique, ouvrent la voie à ceux de Dedekind, à qui on doit l'introduction générale de la notion de corps ; ils furent complétés par l'œuvre axiomatique de Hilbert (1897). La théorie des corps a été aussi étudiée par G. Frobenius, A. Hurwitz, L. Kronecker et H. Weber.

Définition.

La structure de corps s'obtient en complétant la structure d'anneau par l'axiome suivant : pour tout x appartenant à un anneau, et non neutre pour la première loi de composition interne, il existe un symétrique (= inverse) pour la seconde loi définissant l'anneau.

• *Axiomes de la structure de corps.* Récapitulons donc les axiomes de la structure d'anneau en lui ajoutant l'axiome précédent : nous obtenons les axiomes de la structure de corps.

1 - E est un ensemble non vide.

2 - E est muni d'une loi de composition interne, partout définie, associative et commutative, notée $\perp$ (ou, usuellement, $+$).

3 - Il existe un élément neutre $e \in E$ pour cette loi (ordinairement noté 0).

4 - Tout $x \in E$ est symétrisable pour cette loi (ordinairement, le symétrique de x est noté $-x$ et appelé « opposé de x »).

5 - E est muni d'une deuxième loi de composition interne, partout définie, associative (mais pas nécessairement commutative), notée $\top$ (ou, ordinairement, $\times$).

6 - Il existe un élément neutre $e' \in E$ pour cette loi (ordinairement noté 1).

7 - Pour tout x différent de e et appartenant à E, il existe un symétrique pour la deuxième loi de composition (ordinairement, le symétrique de x est noté x^{-1} et appelé *inverse* de x ; si la deuxième loi est commutative, on le note $1/x$).

8 - Les deux lois de composition sont doublement distributives.

• *Remarques* :

1 - Si l'on impose à la deuxième loi d'être commutative, le corps est dit *commutatif* ; sinon, il s'agit d'un *corps non commutatif*.

2 - Lorsque les éléments d'un ensemble ayant la structure de corps sont des nombres, le corps est dit *numérique* ; bien entendu, il existe des corps non numériques.

3 - Un corps dont le nombre d'éléments est fini est un *corps fini* : nous en donnons un exemple important ci-après.

• *Exemple de corps commutatif.* Pour démontrer qu'un ensemble E possède la structure de corps commutatif pour les deux lois $+$ et $\times$, il suffit de démontrer : 1° qu'il possède la structure d'anneau commutatif ; 2° que tout élément x différent de 0 appartenant à cet ensemble possède un inverse pour l'opération $\times$.

— L'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers n'est pas un corps, car seul $+1$ et -1 ont un inverse pour la multiplication $(1^{-1} = 1\,; -1^{-1} = -1)$, les autres entiers ne possédant pas d'inverses entiers.

— L'anneau $\mathbb{Q}$ des rationnels est un corps, car tout $x \in \mathbb{Q}$ possède un inverse x^{-1} pour la multiplication. L'anneau $\mathbb{Q}$ a été construit au no **512.3, E,** *b*, comme le produit cartésien $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$: si a, b, c, ... désignent des entiers relatifs, un élément $x \in \mathbb{Q}$ est représenté par un couple a/b d'entiers et son inverse $x^{-1} = b/a$ (cet inverse est lui-même un entier dans le cas particulier où a est diviseur de b).

— L'anneau $\mathbb{R}$ des réels est un corps (voir ci-après, p. 54).

— L'anneau $\mathbb{C}$ des complexes, c'est-à-dire des nombres de la forme $a + bi$, a et b étant des éléments de $\mathbb{R}$ et i étant défini par $i^2 = -1$, est un corps (voir ci-après p. 55).

— Si $m, n \in \mathbb{Q}$, les nombres tels que $x = m + n\sqrt{2}$ forment un corps. En effet, au paragraphe **D,** *a*, nous avons démontré que l'ensemble de ces nombres avait une structure d'anneau pour $m, n \in \mathbb{Z}$; le fait que $m, n \in \mathbb{Q}$ permet d'assigner un inverse $x^{-1} = 1/(m + n\sqrt{2})$ à tout $x \in \mathbb{Q}$: donc l'ensemble considéré est un corps.

• *Un exemple de corps non commutatif.* Soit l'ensemble H des nombres q défini par :

$$q = a + bi + cj + dk, \qquad (1)$$

a, b et c étant des réels et i, j, k des symboles définis par :

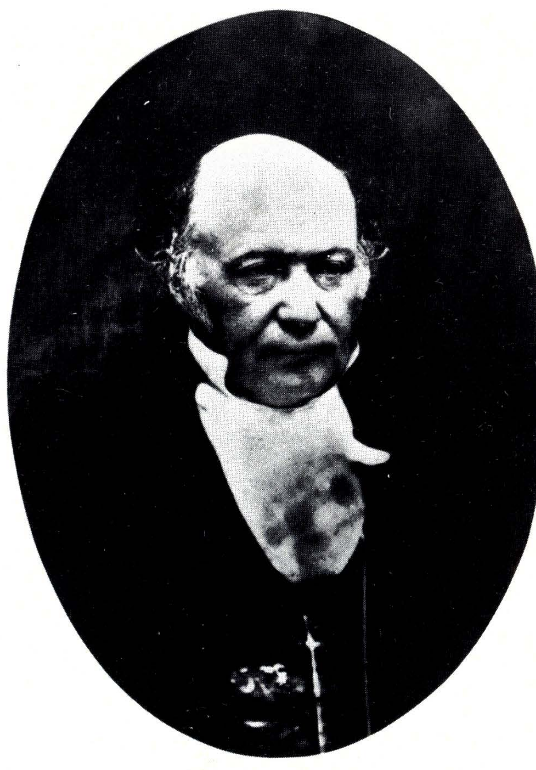
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \qquad (2)$$

Les nombres q ressemblent aux complexes $a + bi$ mais ils sont composés de quatre termes au lieu de deux ; on les nomme pour cette raison des *quaternions* : ils ont été inventés par l'Irlandais W. R. Hamilton, en 1843. Signalons au passage que les quaternions peuvent être appelés « nombres », non pas parce qu'ils servent à mesurer quelque chose (une grandeur géométrique commensurable ou incommensurable, une grandeur physique déterminée, ou toute autre chose), mais parce qu'ils sont susceptibles d'être les objets d'un calcul.

— L'addition dans H est définie par :

$$(a + bi + cj + dk) + (a' + b'i + c'j + d'k) = \\ = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k. \qquad (3)$$

On voit que : 1° la somme de deux quaternions est un quaternion ; 2° l'opération est commutative, puisqu'elle concerne les réels a, b, c, d, a', b', c' et d'.



***William Rowan Hamilton (1805-1865) est le plus grand mathématicien irlandais. Ses travaux sur l'optique et sur la dynamique sont très importants, mais il est surtout connu par sa théorie des* quaternions *et par la création de la* théorie des vecteurs.**

— Le quaternion $q = 0$, obtenu pour $a = b = c = d = 0$, est neutre pour l'addition.

— La multiplication dans H est définie d'une part par les règles de la multiplication des réels pour les coefficients a, a', etc., d'autre part par la *table de multiplication* des nombres i, j, k (il est traditionnel de souligner que Hamilton mit six ans avant de parvenir à l'établissement satisfaisant de cette table !) :

×	i	j	k
i	−1	k	−j
j	−k	−1	i
k	j	−i	−1

Table de multiplication des symboles* i, j, k *dans l'algèbre des quaternions.

D'après cette table, on voit que :

$$\begin{cases} \mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k} ; \\ \mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i} ; \\ \mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j} . \end{cases} \qquad (4)$$

La multiplication ainsi définie est une opération associative, mais non commutative (par exemple : $\mathrm{ij} = -\mathrm{ji}$) ; l'élément neutre pour la multiplication est $q = 1$.

L'ensemble H des quaternions a donc une *structure de corps*. Les égalités (4) montrent que la multiplication des quaternions n'est pas commutative, c'est-à-dire que le produit de deux quaternions dépend de l'ordre des facteurs : $qq' \neq q'q$. Le lecteur pourra s'en assurer en multipliant $(a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k})$ par $(a' + b'\mathrm{i} + c'\mathrm{j} + d'\mathrm{k})$ et en refaisant la même multiplication après interversion des facteurs. On trouve en effet :

$$(a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k})(a' + b'\mathrm{i} + c'\mathrm{j} + d'\mathrm{k}) = \\ = A + B\mathrm{i} + C\mathrm{j} + D\mathrm{k} , \qquad (5)$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= (aa' - bb' - cc' - dd') ; \\ B &= (ab' + ba' + cd' - dc') ; \\ C &= (ac' + ca' + db' - bd') ; \\ D &= (ad' + da' + bc' - cb') . \end{aligned} \qquad (6)$$

et

$$(a' + b'\mathrm{i} + c'\mathrm{j} + d'\mathrm{k})(a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}) = \\ = A + E\mathrm{i} + F\mathrm{j} + G\mathrm{k} , \qquad (7)$$

avec

$$\begin{aligned} E &= (ab' + ba' + dc' - cd') ; \\ F &= (ac' + ca' + bd' - db') ; \\ G &= (ad' + da' + cb' - bc') . \end{aligned} \qquad (8)$$

Le corps des quaternions est donc un *corps non commutatif*. Nous rencontrerons d'autres corps non commutatifs en algèbre linéaire et dans bien d'autres branches des mathématiques.

Corps finis.

Un corps est dit *fini* s'il possède un nombre fini d'éléments. Nous en avons rencontré un exemple en théorie des nombres, en étudiant les classes résiduelles modulo n dans $\mathbb{Z}$ (voir p. 28). Nous allons reprendre cet ensemble dans le cadre de la théorie des corps.

• *Constitution de l'ensemble* $\mathbb{Z}/n$. Soit n un nombre entier différent de 1, a et b deux entiers quelconques appartenant à $\mathbb{Z}$ et considérons la congruence :

$$a \equiv b \pmod{n} . \qquad (9)$$

Cette relation exprime que $a - b$ est divisible par n, ou encore que la division de a et de b par n donne le même reste. L'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers est alors la réunion des n *classes résiduelles modulo* n suivantes :

— la classe $C_0 = \overline{0}$ des entiers dont le reste de la division par n est 0 (ce sont les multiples de n) ;

— la classe $C_1 = \overline{1}$ des entiers dont le reste de la division par n est égal à 1 ;

— la classe $C_2 = \overline{2}$ des entiers dont le reste de la division par n est égal à 2 ;

⋮

— etc. ;

— la classe $C_{n-1} = (\overline{n-1})$ des entiers dont le reste de la division par n est égal à $n - 1$.

L'ensemble *fini* de ces n classes est noté $\mathbb{Z}/n$:

$$\mathbb{Z}/n = \{ C_0, C_1, C_2, ..., C_{n-1} \} , \qquad (10)$$

qu'on écrit encore, avec la convention du surlignement :

$$\mathbb{Z}/n = \{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{n-1} \} . \qquad (11)$$

Par exemple, si $n = 3$, on aura :

$$\begin{cases} C_0 = \overline{0} = \text{classe des entiers divisibles par 3 ;} \\ \qquad\quad \text{classe des multiples de 3 ;} \\ C_1 = \overline{1} = \text{classe des entiers qui sont des (multiples de 3) + 1 ;} \\ C_2 = \overline{2} = \text{classe des entiers qui sont des (multiples de 3) + 2 ;} \end{cases} \qquad (12)$$

et l'ensemble $\mathbb{Z}/3$ est un ensemble fini à 3 éléments $\{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2} \}$.

On peut calculer sur des classes comme on calculerait sur des nombres, en définissant deux lois de composition interne sur les éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}/n$, que nous nommerons addition et multiplication des classes.

• *Addition des classes.*

— Définissons l'addition de deux classes quelconques C_i et C_j par :

$$\begin{cases} C_i + C_j = C_{i+j} , & \text{si } i + j < n ; \\ C_i + C_j = C_{i+j-n} , & \text{si } i + j \geqslant n . \end{cases} \qquad (13)$$

Avec la convention du surlignement, cette définition de l'addition s'écrirait :

$$\begin{cases} \overline{i} + \overline{j} = \overline{i+j} , & \text{si } i + j < n ; \\ \overline{i} + \overline{j} = \overline{i+j-n} , & \text{si } i + j \geqslant n . \end{cases} \qquad (14)$$

Par exemple, avec $n = 3$, on aurait $C_0 + C_1 = C_1$, ce qui correspond à la propriété suivante : la somme d'un multiple de 3 et d'un (multiple de 3) + 1 est un (multiple de 3) + 1. De même $C_2 + C_2 = C_{4-3} = C_1$: la somme de deux (multiples de 3) + 2 est un (multiple de 3) + 1, etc.

— Il est aisé de constater que l'addition des classes est une opération associative et commutative, puisque l'addition des entiers i et j est elle-même associative et commutative.

— La classe $C_0 = \overline{0}$ est l'élément neutre pour l'addition des classes, puisque, quelle que soit la classe C_i, on a :

$$C_0 + C_i = C_i + C_0 = C_i . \qquad (15)$$

En notation surlignée, l'égalité précédente s'écrirait :

$$\overline{0} + \overline{i} = \overline{i} + \overline{0} = \overline{i} \qquad (16)$$

— Chaque classe C_i (ou $\overline{i}$) $\in \mathbb{Z}/n$ possède un symétrique dans $\mathbb{Z}/n$ qui est :

$$C_i^{-1} = C_{n-i} . \qquad (17)$$

Avec la notation surlignée, l'égalité (17) s'écrirait :

$$\overline{i}^{-1} = \overline{n-i} . \qquad (18)$$

• *Multiplication des classes.*

— Définition de la multiplication de deux classes C_i et C_j par :

$$C_i \times C_j = C_r , \qquad (19)$$

r étant le reste de la division du produit ij par n.

Par exemple, avec $n = 3$, on aurait :

$$C_2 \times C_2 = C_r \qquad (20)$$

et, comme ici $ij = 4$, $r = 1$, donc :

$$C_2 \times C_2 = C_1 . \qquad (21)$$

En notation surlignée, on écrirait :

$$\overline{2} \times \overline{2} = \overline{1} . \qquad (22)$$

Les égalités (21) et (22) correspondent à la propriété suivante : le produit d'un (multiple de 3) + 2 par un (multiple de 3) + 2 est un (multiple de 3) + 1.

— La multiplication des classes est commutative, associative, distributive ; la classe $C_1 = \overline{1}$ est l'élément neutre pour la multiplication.

• *Conclusion.* L'ensemble $\mathbb{Z}/n$ est donc un anneau (c'est un groupe pour l'addition et un monoïde pour la multiplication, comme on vient de le voir), et un *anneau fini*, puisque le nombre n de ses éléments est fini. Les propriétés de cet anneau sont différentes selon que n est ou n'est pas un nombre premier.

— Si n n'est pas un nombre premier, $\mathbb{Z}/n$ possède des diviseurs de 0 (voir la définition p. 28), c'est-à-dire que l'on peut avoir à la fois $C_i \neq \overline{0}$, $C_j \neq \overline{0}$ et $C_i C_j = \overline{0}$, $\overline{0}$ étant l'élément neutre pour l'addition des classes. En effet, si n n'est pas premier, on peut l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs premiers : $n = kp$, par exemple, k et p étant premiers. Dès lors le produit des classes $C_k C_p$ est, d'après la définition (19) ci-dessus, la classe $C_0 = \overline{0}$, puisque le reste de la division de kp par n est nul. Donc, si $n = kp$:

$$C_k \neq \overline{0}, \quad C_p \neq \overline{0} \quad \text{et} \quad C_k C_p = \overline{0} . \qquad (23)$$

— Si n est premier, on démontre que toute classe C_i possède un inverse C_i^{-1} tel que $C_i C_i^{-1} = C_1 = \overline{1}$. Cette propriété, jointe à la structure d'anneau, confère à l'ensemble fini $\mathbb{Z}/n$ la structure de corps : l'anneau des classes résiduelles *modulo* n dans $\mathbb{Z}$ est donc un *corps fini* lorsque n est premier.

• *Exemples.* Considérons à nouveau l'ensemble $\mathbb{Z}/3$ des classes résiduelles modulo 3. Cet ensemble contient trois classes C_0, C_1 et C_2, que nous noterons en notation surlignée respectivement $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$. Etablissons les tables d'addition et de multiplication pour ces classes, on obtient :

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

×	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

***Tables d'addition et de multiplication des classes de l'ensemble* $\mathbb{Z}/3$.**

On constate que :

1 - l'ensemble $\mathbb{Z}/3$ est un ensemble fini de 3 éléments ;

2 - les opérations + et × sont associatives, commutatives et doublement distributives ;

3 - $\overline{0}$ est l'élément neutre pour l'addition ; $\overline{1}$ est l'élément neutre pour la multiplication ;

4 - chaque classe possède un symétrique pour l'addition :

$$\overline{0} + \overline{0} = \overline{0} ; \quad \overline{1} + \overline{2} = \overline{0} ; \quad \overline{2} + \overline{1} = \overline{0} ;$$

5 - chaque classe différente de $\overline{0}$ admet un symétrique pour la multiplication :

$$\overline{1}^{-1} = \overline{1} \quad \text{et} \quad \overline{2}^{-1} = \overline{2} .$$

L'ensemble $\mathbb{Z}/3$ est donc bien un *corps commutatif fini*.

• *Fractions.* Soit à résoudre, dans le corps $\mathbb{Z}/n$, l'équation :

$$\beta x = \alpha , \qquad (24)$$

α, β et x appartenant à $\mathbb{Z}/n$. Si $\beta \neq 0$, il a certainement un inverse β^{-1} en vertu des axiomes de la structure de corps ; on est donc en droit d'écrire :

$$\beta^{-1} \beta x = \beta^{-1} \alpha . \qquad (25)$$

Or $\beta^{-1} \beta = \overline{1}$ (par définition de l'inverse) donc l'équation précédente devient :

$$\overline{1} \, x = \beta^{-1} \alpha . \qquad (26)$$

Comme $\overline{1} \, x = x$ ($\overline{1}$ étant l'élément neutre pour la multiplication), et comme la multiplication est commu-

tative, on a finalement :

$$x = \alpha\beta^{-1}. \qquad (27)$$

Convenons d'écrire $\alpha\beta^{-1} = \alpha/\beta$ et envisageons l'addition $x + x'$ dans le corps $\mathbb{Z}/n$. Avec les conventions précédentes, d'après l'équation (27), cette addition s'écrit :

$$x + x' = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta'} \qquad (28)$$

On montrerait, à partir de la définition de l'addition des classes, que (28) est une égalité équivalente à :

$$x + x' = \frac{\alpha\beta'}{\beta\beta'} + \frac{\alpha'\beta}{\beta\beta'}. \qquad (29)$$

On retrouve ainsi la règle de *réduction au même dénominateur* de deux fractions ; l'étude systématique des règles de calculs sur les éléments de $\mathbb{Z}/n$ nous ferait retrouver les règles générales de calculs sur les fractions (voir p. 138).

Propriétés des corps.

● *Sous-corps.* Un sous-ensemble A d'un corps K est un *sous-corps* de K si A possède la structure de corps pour l'addition et la multiplication telles qu'elles sont définies dans K (en particulier, A contient les éléments neutres pour ces opérations, à savoir $e = 0$ et $e' = 1$).

Nous avons rencontré, à diverses reprises, l'ensemble des *nombres complexes*, c'est-à-dire des nombres de la forme $z = a + bi$, a et b étant des nombres réels et i étant défini par $i^2 = -1$. Les complexes forment un corps $\mathbb{C}$ pour l'addition et la multiplication et contiennent l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels à titre de sous-ensemble : l'ensemble $\mathbb{R}$ ayant lui-même une structure de corps est un *sous-corps* de $\mathbb{C}$. Même remarque pour l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels : c'est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

● *Caractéristique d'un corps.* Considérons l'ensemble $\mathbb{Z}/3$ des classes résiduelles *modulo* 3 ; c'est un corps fini dont les 3 éléments sont $\bar{0}$, $\bar{1}$ et $\bar{2}$. Formons les multiples positifs de la classe unité $\bar{1}$ d'après les règles de l'addition des classes :

$$\begin{cases} 1 \times \bar{1} = \bar{1}\,; \\ 2 \times \bar{1} = \bar{1} + \bar{1} = \bar{2}\,; \\ 3 \times \bar{1} = \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{0}\,;^* \\ 4 \times \bar{1} = \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = 3 \times \bar{1} + \bar{1} = \bar{1}\,; \end{cases} \qquad (30)$$

* (règle $i + j - n$, paragraphe *b* ci-dessus) ;

Les multiples positifs de la classe unité $\bar{1}$ sont donc :

$$\bar{1},\ \bar{2},\ \bar{0},\ \bar{1},\ \bar{2},\ \bar{0},\ \bar{1},\ \bar{2},\ \bar{0},\ \ldots$$

L'ensemble $\mathbb{Z}/3$ a donc les propriétés suivantes (qui sont équivalentes) : 1° les multiples positifs de l'unité $\bar{1}$ ne sont pas distincts (ils se répètent de trois en trois) ; 2° il existe deux entiers k et l, $k > l$, tels que $k\bar{1} = l\bar{1}$, c'est-à-dire tels que $(k - l)\,\bar{1} = \bar{0}$; 3° la plus petite valeur de $p = k - l$ telle que $(k - l)\,\bar{1} = \bar{0}$ est un nombre premier. Nous dirons que le corps $\mathbb{Z}/3$ est *modulaire* et que sa *caractéristique* est p.

Soit maintenant le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, dont les éléments neutres sont les entiers 0 et 1. Les multiples positifs de l'unité sont : 1, 2×1, 3×1, ..., $k \times 1$, ..., c'est-à-dire 1, 2, 3, ... k ... On constate que : 1° les multiples de l'unité sont tous distincts ; 2° si $k \neq l$, alors $k \times 1 \neq l \times 1$; 3° la seule valeur de p telle que $p = k - l$ et que $(k - l) \times 1 = 0$ est $p = 0$. Le corps $\mathbb{Q}$ est *non modulaire* et de *caractéristique nulle*. D'une manière générale, tout corps qui contient le corps $\mathbb{Q}$ à titre de sous-corps est non modulaire. Dans le cas contraire, il est modulaire. En particulier, les corps finis sont tous modulaires.

● *Extension.* Un corps K est une *extension* d'un corps A, si A est un sous-corps de K. Cette définition est complémentaire de celle de sous-corps, donnée au début du paragraphe. Considérons par exemple le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels et l'ensemble K des nombres de la forme $m + n\sqrt{2}$, m et n étant des rationnels appartenant à $\mathbb{Q}$. Nous avons vu (p. 43) que K possédait une structure de corps : le corps K est une extension du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels.

Bien entendu, il existe une infinité d'extensions possibles d'un corps donné. Un cas intéressant est celui où le corps K est obtenu par *adjonction* au corps A de départ d'un élément (ou d'un ensemble) minimal. L'exemple classique, ici, est celui de l'extension des corps des réels : on peut construire une extension particulière $\mathbb{C}$ du corps $\mathbb{R}$ par adjonction à $\mathbb{R}$ d'une racine de l'équation :

$$x^2 + 1 = 0. \qquad (31)$$

Le carré d'un réel x est toujours positif, l'équation (31) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Convenons

LES MATHÉMATIQUES MODERNES A L'ÉCOLE

Les mathématiques traditionnelles reposaient sur le calcul et le raisonnement géométrique. Dès l'école primaire, on enseignait donc aux enfants à compter, à résoudre par le calcul des problèmes simples, à reconnaître des formes et des constructions géométriques. Les mathématiques dites « modernes » (et qui ont, maintenant, un siècle d'existence : elles sont aussi « âgées » que les romans de Zola ou les toiles des Impressionnistes) reposent sur la combinatoire ensembliste : d'où une transformation de la pédagogie et l'introduction, dès l'école primaire, d'exercices concrets qui permettront, plus tard, le passage à la théorie abstraite des ensembles. Nous donnons ici trois exemples de matériel mathématique moderne.

1 

1. Matricube. ***Sur un réseau en plastique transparent un enfant représente des situations numériques.***

2. Blocs logiques. ***Ce matériel est constitué d'ensembles dont chaque élément est défini par sa forme, sa taille, son épaisseur et sa couleur.***

3. Sur la photographie on voit un diagramme de Venn à deux attributs : l'ensemble des carrés et l'ensemble des triangles.

2 

2 photos © R. Biemel/T.

3 

Ph. © Asco/T.

d'appeler i un élément n'appartenant pas à $\mathbb{R}$ et que nous définissons comme une racine de l'équation (31) ; alors nous pouvons écrire :

$$i^2 + 1 = 0\,, \tag{32}$$

d'où $i^2 = -1$.

Le corps $\mathbb{C}$, composé d'éléments de la forme $a + bi$, a et b appartenant à $\mathbb{R}$, est une extension du corps $\mathbb{R}$ des réels : la notion d'extension permet donc une définition élégante des nombres complexes et permet de justifier les règles opératoires dans $\mathbb{C}$. Le corps non commutatif des quaternions est aussi une extension des réels, mais il est obtenu par adjonction des éléments (i, j, k), qui exige l'établissement des tables de multiplication et d'addition données plus haut (voir p. 44).

La théorie des corps permet de démontrer de nombreuses propriétés des ensembles possédant la structure de corps. Nous les rencontrerons au fur et à mesure des besoins, dans la suite de cet exposé.

La notion de module.

Remarques historiques.

A la fin du XIX[e] siècle, les structures de groupe, d'anneau et de corps étaient correctement définies. Ces notions permettaient une mise en ordre des connaissances en algèbre et en analyse, et leur exploitation s'est révélée très féconde, tant pour l'étude de la théorie des équations que pour celle de la théorie des fonctions. Dans la même période, les mathématiciens s'intéressent aux ensembles de *vecteurs* (le mot est introduit par Hamilton ; les vecteurs à *n* dimensions apparaissent chez Grassmann vers 1846) et à l'algèbre linéaire (voir p. 56). En 1888, Peano, commentant l'œuvre de Grassmann (la théorie que celui-ci appelait l'*algèbre extérieure*), introduit la définition axiomatique des ensembles de vecteurs qu'on appelle des *espaces vectoriels* et que nous étudions ci-après. Après 1920, les algébristes se sont aperçus que les espaces vectoriels étaient un cas particulier d'une structure plus générale : la structure de *module*. Les modules sont devenus un instrument important de l'algèbre à partir des travaux d'Emmy Noether (fille du mathématicien allemand Max Noether), d'Emil Artin et des algébristes de l'École américaine (Wedderburn, Dickson, Nathan Jacobson).

Plus générale que la structure d'espace vectoriel, la structure de module joue un rôle de premier plan dans certaines branches très abstraites des mathématiques contemporaines (topologie, algèbre homologique).

Définition.

Les trois structures précédemment étudiées font intervenir uniquement des lois de composition interne (une seule pour la structure de groupe, deux pour les structures d'anneau et de corps) : nous les avons appelées, pour cette raison, des *structures algébriques* (quand il y a au moins deux lois de composition interne, une structure algébrique est une *algèbre*). Nous allons maintenant définir une structure qui fait intervenir une loi de composition interne et une loi de composition externe.

Considérons un ensemble G dont les éléments seront notés x, y, ... Soulignons que x n'est pas nécessairement un nombre : ce peut être une transformation géométrique, une fonction, une substitution ou n'importe quel autre être mathématique. Définissons sur cet ensemble une loi de composition interne additive lui conférant une structure de groupe, appelons zéro et notons 0 l'élément neutre de cette structure. Le triplet $(G, +, 0)$ est un groupe.

Il s'agit maintenant de définir une loi de composition *externe* sur G. Pour cela, nous avons besoin d'un ensemble Ω autre que G. Appelons α, β, ... les éléments de Ω et supposons que cet ensemble possède une *structure d'anneau.* Cela dit, la loi de composition externe se définira ainsi : à tout couple d'éléments (α, x) appartenant l'un à l'ensemble Ω et l'autre à l'ensemble G, c'est-à-dire au produit cartésien $\Omega \times G$, on fait correspondre un élément noté αx appartenant à G. La loi de composition externe est donc l'application de $\Omega \times G$ dans G décrite par :

$$(\alpha, x) \rightarrow \alpha x\,. \tag{1}$$

D'une manière générale, les éléments tels que α et x étant des êtres mathématiques quelconques, il y a lieu de distinguer αx et $x\alpha$: le premier est dit *composé à gauche* (α est à gauche de x), et le second *composé à droite* (α est à droite de x).

L'application (1) est dite un *module à gauche sur l'anneau Ω*, si elle vérifie les conditions suivantes pour tout $x, y \in G$ et $\alpha, \beta, 1 \in \Omega$ (1 étant l'élément neutre pour la deuxième loi de composition interne dans Ω) :

$$\begin{cases} \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y\,; \\ (\alpha + \beta)\,x = \alpha x + \beta x\,; \\ (\alpha\beta)\,x = \alpha(\beta x)\,; \\ 1\,x = x\,. \end{cases} \tag{2}$$

On définirait de même un *module à droite sur l'anneau Ω* par l'application :

$$(x, \alpha) \rightarrow x\alpha\,, \tag{3}$$

vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} (x+y)\,\alpha = x\alpha + y\alpha\,; \\ x(\alpha + \beta) = x\alpha + x\beta\,; \\ x(\alpha\beta) = (x\alpha)\,\beta\,; \\ x1 = x\,. \end{cases} \tag{4}$$

Exemple.

● *Nous donnerons ici un exemple simpliste* de la notion de module, mais le lecteur ne doit pas oublier que cette structure concerne principalement des ensembles non numériques appartenant aux branches les plus abstraites des mathématiques contemporaines.

Considérons un ensemble constitué d'éléments x représentant des couples de nombres réels (a, b) ; par exemple :

$$x = (-1, 1)\,; \quad y = (3, \sqrt{2})\,; \quad z = (1/3, 4)\,; \ldots \tag{5}$$

Définissons sur cet ensemble une loi de composition interne appelée *addition*, commutative, associative, d'élément neutre $\mathbf{0} = (0, 0)$, que nous notons en caractères gras, pour ne pas le confondre avec le nombre zéro (mais cette précaution n'est pas indispensable quand on est familiarisé avec ce genre de calcul). L'addition est définie par :

$$x + y = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)\,. \tag{6}$$

Par exemple, avec les valeurs de x et y données par (5) on aurait :

$$x + y = (-1 + 3, 1 + \sqrt{2}) = (2, 1 + \sqrt{2})\,. \tag{7}$$

Il est clair que tout élément $x = (a, b)$ possède un symétrique pour l'addition qui est $-x = (-a, -b)$, puisque

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0) = \mathbf{0}\,.$$

Donc les éléments tels que x forment un groupe pour l'addition. Nous désignerons ce groupe par G :

$$G = \{x, y, z, \ldots\}\,. \tag{8}$$

Soit par ailleurs l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Définissons sur G une deuxième loi de composition, mais *externe*, comme on l'a fait dans la relation (1) ci-dessus. Si λ est un entier quelconque appartenant à $\mathbb{Z}$ et pour tout $x = (a, b) \in G$, on aura donc :

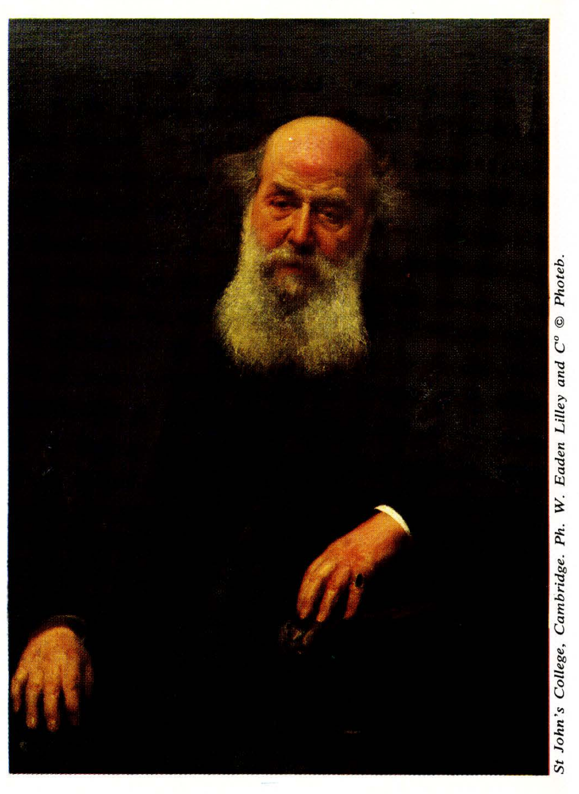
$$\lambda x = \lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)\,. \tag{9}$$

L'équation (9) nous permet de calculer le composé λx, quels que soient les éléments λ et x. Par exemple, pour $x = (-1, 1)$, on aurait $\lambda x = (-\lambda, \lambda)$; etc. Si l'on veut donner un nom à cette loi de composition externe, on peut l'appeler *homothétie.* Ce terme est emprunté à la géométrie élémentaire ; il signifie — grossièrement — « agrandissement » : l'élément $(-\lambda, \lambda)$ est l'« agrandissement » — en mathématiques, on dit d'une façon plus scientifique l'*homothétique* — de l'élément $(-1, 1)$ dans le rapport λ.

On vérifierait ainsi que la loi (9) satisfait aux conditions (2) du paragraphe *a* : donc le groupe G d'éléments $x = (a, b)$, muni d'une loi de composition externe dont les éléments λ sont choisis dans l'anneau $\mathbb{Z}$ est un *module sur* $\mathbb{Z}$. Il est inutile, ici, de préciser « à gauche » ou « à droite », car, en vertu de la commutativité de la multiplication arithmétique, l'élément $(\lambda a, \lambda b)$ est identique à l'élément $(a\lambda, b\lambda)$.

● *Remarque.* Si nous remplaçons l'anneau $\mathbb{Z}$ par le corps $\mathbb{R}$ des réels, et que nous définissons de la même manière G et l'homothétie sur les éléments de G, le module est appelé *espace vectoriel* sur $\mathbb{R}$ (le terme « espace » étant pris au sens d'« ensemble » et non en son sens usuel). En fait, l'exemple de module sur $\mathbb{Z}$ donné ci-dessus n'a pas d'intérêt et ne débouche sur aucun progrès des connaissances mathématiques : quand on calcule sur des anneaux numériques, on se place en général dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire dans des corps. Dès lors, tous les modules définis sur ces corps sont des espaces vectoriels : nous les rencontrerons ci-dessous.

Retenons donc que la théorie des modules concerne principalement des ensembles abstraits : nous l'évoquerons notamment à propos de l'algèbre homologique et de la topologie.



James Joseph Sylvester (1814-1897), mathématicien anglais dont les travaux ont porté sur l'algèbre linéaire, les formes quadratiques, la théorie des invariants, la théorie des nombres, la géométrie différentielle et la résolution des équations différentielles.

Structure d'espace vectoriel.

Remarques historiques.

Un espace vectoriel est un module sur un corps. L'importance de cette structure est due au fait qu'elle gouverne tous les chapitres de l'algèbre linéaire, qui, par ses nombreuses applications en mécanique, en physique, en informatique, etc., est une branche très exploitée des mathématiques. De plus, la théorie des espaces vectoriels s'applique aussi à l'analyse et à la géométrie différentielle. Bref, les mathématiciens se sont aperçus que, dès qu'ils cessaient de calculer sur des réels ou des complexes, c'est-à-dire dans des *corps*, ils se trouvaient confrontés aux calculs dans des espaces vectoriels. D'où l'importance capitale de cette structure.

● *Des nombres complexes aux vecteurs.* A l'origine de la notion très générale de *vecteur* (dont les vecteurs géométriques étudiés dans l'enseignement secondaire et utilisés en physique pour représenter des forces, des vitesses, des accélérations, etc., ne sont qu'un cas très particulier), il y a les travaux de Gauss sur les nombres complexes, ceux de Hamilton sur les quaternions (voir p. 43) et ceux de Grassmann sur l'*algèbre extérieure*. Les recherches de Gauss datent du début du XIX[e] siècle, celles de Hamilton de 1843-1853 (*Lectures on quaternions,* 1853), et celles de Grassmann, (*Lineale Ausdehnungslehre, Algèbre linéaire extérieure*) de 1844.

Nous avons déjà dit qu'un nombre complexe était un nombre de la forme $a + bi$, a et b appartenant à l'ensemble des réels et i étant défini par $i^2 = -1$. Gauss, puis Hamilton, ont proposé de définir un nombre complexe comme un couple (a, b) de réels. L'addition de deux nombres complexes est alors définie par :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \tag{1}$$

et la multiplication par :

$$(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')\,. \tag{2}$$

Par exemple les deux complexes $z = 1 + 5\,i$ et $z' = 2 - 3\,i$ sont représentés par $z = (1, 5)$ et $z' = (2, -3)$; leur somme est $z + z' = (3, 2)$ et leur produit est $zz' = (17, 7)$, d'après les règles (1) et (2). En explicitant, on aurait $z + z' = 3 + 2\,i$ et $zz' = 17 + 7\,i$.

On pourrait aussi calculer d'une manière analogue sur des quaternions, en écrivant $q = (a, b, c, d)$: on retrouverait les résultats des pages 43-44. Par exemple,

$$q + q' = (a + a', b + b', c + c', d + d').$$

Bien entendu, pour parvenir à des résultats de ce genre, il faut définir axiomatiquement avec soin les opérations envisagées. Enfin Grassmann a étudié comment on pouvait calculer sur des éléments à n termes de la forme $x = (a, b, c, ..., n)$.

Comme nous le verrons ci-après, un objet mathématique tel que $(a, b, ..., n)$ est appelé un *vecteur* ; les éléments a, b, c, ..., n sont ses *composantes* ; le nombre n de composantes est la *dimension* du vecteur. Avec ces définitions, un nombre complexe est un vecteur à deux dimensions, un quaternion un vecteur à quatre dimensions, les vecteurs de Grassmann sont à n dimensions. En géométrie, un segment fléché $\overrightarrow{OA}$ (nous adopterons la notation $\boldsymbol{OA}$) peut être défini par ses projections a et b sur deux axes Ox et Oy, et comptées positivement ou négativement selon leur orientation par rapport à ces axes : nous écrirons donc :

$$\boldsymbol{OA} = (a, b). \quad (3)$$

Le couple (a, b) qui définit un nombre complexe sert aussi à définir un segment fléché, qu'on appelle *vecteur géométrique* : la représentation géométrique des complexes découle de cette importante remarque (voir p. 56).

L'analyse vectorielle et le calcul matriciel se sont développés entre 1850 et 1880, sous l'impulsion de Sylvester et de Cayley, créateurs de la théorie des matrices (voir pp. 59-60), puis du Français Hermite et des travaux algébriques, en rapport avec l'analyse, de Kronecker, H.J. Smith, Weierstrass. La définition axiomatique des espaces vectoriels abstraits apparaît enfin en 1888 chez Peano.

● *De l'algèbre à l'analyse.* La notion d'espace vectoriel se retrouve en analyse, lorsque l'École italienne (Volterra, Ascoli, Arzelà, Dini) étudie l'espace des *fonctions continues*, entre 1870 et 1880, à la suite des travaux de Weierstrass (auteur d'un théorème sur l'approximation des fonctions continues par des polynômes en 1870 ; ce théorème ne sera généralisé que plus de 60 ans plus tard, par M. Stone, en 1936). Les progrès de l'analyse imposent alors de doter la structure d'espace vectoriel de propriétés complémentaires, ce qui conduit à la définition de nouvelles structures.

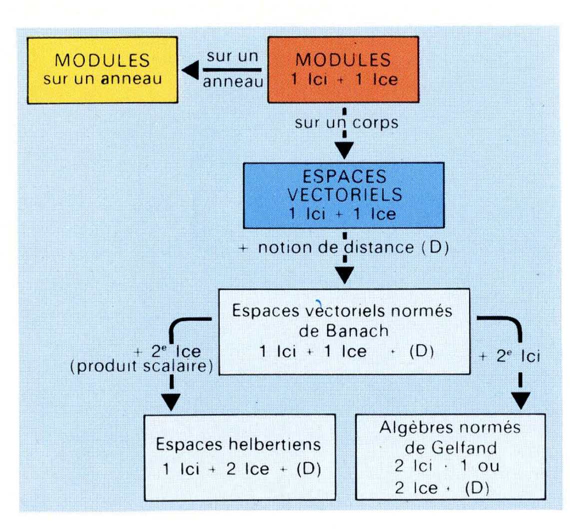
— Dans un espace vectoriel, on ne peut faire que des combinaisons linéaires (du premier degré) : addition de deux vecteurs ou multiplication d'un vecteur par un élément λ extérieur à l'ensemble et appartenant à un corps K (voir par exemple p. 46 : la loi de composition externe est appelée *homothétie*).

— Si on définit, en outre, la notion de *distance* dans un ensemble ayant une structure d'espace vectoriel, ce qui impose — on le verra — d'axiomatiser la notion de *passage à la limite*, l'espace considéré est dit *métrique*. Un espace qui est à la fois vectoriel et métrique est un *espace vectoriel normé* ou *espace de Banach* : cette notion, apparue en 1920-1922, a été l'objet des travaux de S. Banach, H. Hahn et E. Elly.

— Si l'on ajoute à un espace vectoriel normé une deuxième loi de composition externe définissant la correspondance entre deux vecteurs d'une part et un élément λ d'autre part (*produit scalaire* au sens général), on obtient un *espace hilbertien.* La théorie de ces espaces est antérieure à celle des espaces de Banach ; elle a été élaborée par Volterra (1887), Fredholm (1900), Hilbert (1906) et E. Schmidt (1907). Une théorie axiomatique de ces espaces a été construite vers 1930 par Stone et von Neumann.

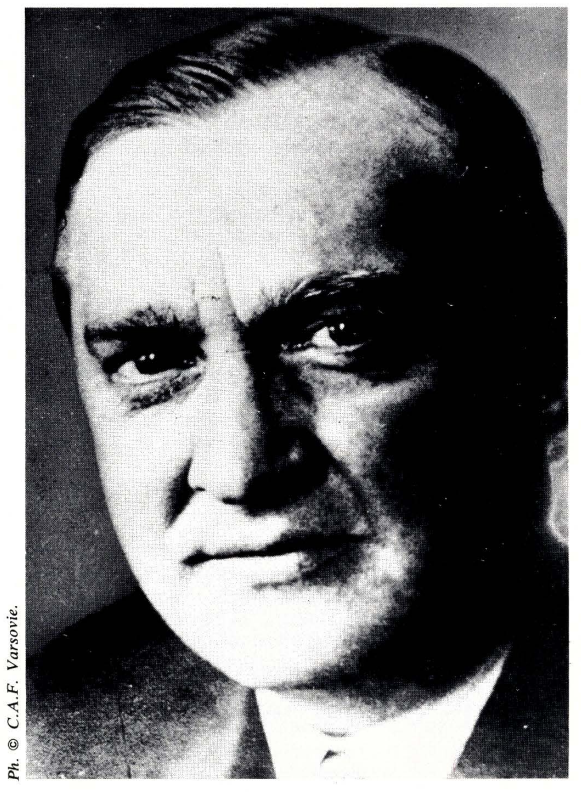
— Si l'espace vectoriel normé considéré possède en outre une deuxième loi de composition interne (multiplication), la structure s'appelle une *algèbre* (au sens non technique d'ensemble muni d'au moins deux lois de composition interne) qu'on appelle une *algèbre normée.* La théorie des algèbres normées a été introduite par l'Allemand I. Gelfand en 1938.

Les rapports entre ces différentes structures sont rappelés sur le schéma ci-après.



Principales structures d'espace vectoriel utilisées en analyse (on n'a pas mentionné ici les espaces topologiques, les espaces partiellement ordonnés et d'autres variétés d'espaces qui seront définies ultérieurement) ; lci = loi de composition interne ; lce = loi de composition externe.

Stefan Banach (1892-1945), mathématicien polonais, qui a élaboré la théorie des espaces vectoriels normés vers 1920-1922, et participé à la création de l'analyse fonctionnelle linéaire.



Ph. © C.A.F. Varsovie.

Définition.

● *Définition générale.* Un espace vectoriel est un *module sur un corps.* La notion de module est définie p. 46, et, en principe, cette définition générale d'un espace vectoriel est suffisante. Nous allons cependant l'expliciter axiomatiquement.

Soit un ensemble E dont les éléments x, y, ... seront nommés *vecteurs* et soit un corps K dont les éléments sont désignés par les lettres grecques α, β, ... Pour que E soit un module sur K, il faut et il suffit que :

1 - E ait une structure de groupe $(E, +, 0)$ pour une loi de composition interne additive $+$;

2 - qu'on définisse sur E une loi de composition externe, faisant intervenir le corps K : $(\alpha, x) \to \alpha x$, comme à la page 46.

Alors, K étant un corps, le module E est un *espace vectoriel sur le corps K.* Les conditions 1 et 2 peuvent s'écrire à l'aide des axiomes suivants, pour tout x, y, $z \in E$ et pour tout α, $\beta \in K$:

1 - $x + y = y + x$;
2 - $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$;
3 - il existe dans E un élément 0 (*vecteur nul*) tel que pour tout $x \in E$, $x + 0 = 0 + x = 0$;
4 - pour tout $x \in E$, il existe un symétrique $-x$ tel que $x - x = 0$, 0 étant le vecteur nul ;
5 - $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
6 - $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$;
7 - il existe dans K un *élément unité* 1 tel que pour tout $x \in E$, $1 x = x1 = x$;
8 - $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta) x$. (4)

Les axiomes 1 à 4 définissent la structure de corps et l'élément neutre pour l'opération $+$; les axiomes 5 à 8 définissent la loi de composition externe $(\alpha, x) \to \alpha x$.

● *Remarques* :

1 - Les axiomes 1 à 4 sont les mêmes que les axiomes définissant l'addition des réels, mais il ne faut pas oublier que x et y ne sont pas des nombres réels (ni même, en général, des nombres complexes). Comme les axiomes en question concernent uniquement l'opération $+$, sans que la nature des objets additionnés entre en jeu, les conséquences des axiomes de l'addition des réels sont donc valables ici aussi, à savoir : unicité de l'élément neutre 0, unicité de l'opposé $-x$, existence et unicité de la solution de l'équation $a + x = b$ (d'où une définition possible de la soustraction dans E).

2 - L'application $(\alpha, x) \to \alpha x$ est une loi de composition externe : il ne faut pas y voir une « multiplication dans E ». En particulier :

— Il existe dans le corps K deux lois de composition interne, $\perp$ et $\perp'$ admettant respectivement ε et ε' comme éléments neutres (voir la définition d'un corps p. 43) ; dans l'axiome 7, nous avons écrit $\varepsilon' = 1$ (élément unité), car il ne peut y avoir aucune ambiguïté. En effet le groupe E ne possède pas de deuxième loi de composition interne, donc il n'a pas d'élément unité.

— On peut appeler 0 l'élément neutre ε dans K, mais il ne faut pas le confondre avec l'élément neutre 0 dans E. Pour les distinguer, on peut écrire ce dernier avec une flèche : $\vec{0}$ ou en caractères gras : $\boldsymbol{0}$.

— On montre alors que, pour tout $\alpha \in K$ et pour tout $x \in E$:

$$\varepsilon x = 0\,x = \boldsymbol{0}\,; \quad (5)$$

et si $\alpha x = \boldsymbol{0}$, alors ou bien $\alpha = 0$, ou bien $x = \boldsymbol{0}$. Enfin, pour tout x, on a :

$$-x = (-1)\,x. \quad (6)$$

3 - Lorsque le corps K est numérique, l'espace vectoriel E est dit lui-même *rationnel* si K est le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, *réel* si $K = \mathbb{R}$ ou *complexe* si $K = \mathbb{C}$. Mais les éléments de E ne sont pas pour cela des nombres (ce sont des listes de nombres comme nous le verrons dans les exemples ci-après).

Exemples.

● *Un exemple trivial.* Imaginons un ensemble de caisses enregistreuses dans un grand magasin ou dans un super-marché et désignons ces caisses par A, B, C, D, ..., N. Chaque jour ouvrable de la semaine, un technicien chargé d'étudier le fonctionnement de l'entreprise relève le total journalier de chaque caisse. Chaque semaine, l'activité d'une caisse est représentée par un relevé qui a la forme d'un tableau tel que :

Jours	L	M	Me	J	V	S
Sommes	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

L, M, ... sont les six jours de la semaine (lundi, mardi, etc.) ; x_1, x_2, ..., x_6 sont les totaux enregistrés respectivement le lundi, le mardi, ..., le samedi, exprimés en une unité monétaire déterminée, la même pour toutes les caisses. Le relevé de la caisse A sera noté $\boldsymbol{A}$, le relevé de la caisse B sera noté $\boldsymbol{B}$, etc. On écrira en abrégé :

$$\boldsymbol{A} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\,; \quad (7)$$
$$\boldsymbol{B} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)\,; \quad (8)$$

etc.

On aura, par exemple, l'unité étant le franc :

$$\boldsymbol{A} = (125, 142, 251, 247, 290, 305)\,; \quad (9)$$
$$\boldsymbol{B} = (75, 78, 81, 87, 90, 111)\,; \quad (10)$$

etc.,

ce qui signifie que la caisse A a enregistré 125 F le lundi, 142 F le mardi, etc. ; et la caisse B, 75 F le lundi, 78 F le mardi, etc.

— Si nous voulons représenter l'activité globale des deux caisses A et B, nous devons faire la somme $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ des deux relevés. Ainsi les caisses A et B ont enregistré ensemble $125 + 75 = 200$ F le lundi, $142 + 78 = 220$ F le mardi, etc. On écrira cette opération comptable sous la forme d'une addition $(+)$ des relevés $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, addition définie par la règle opératoire suivante :

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5, x_6 + y_6). \quad (11)$$

Il est facile de montrer, en vertu des propriétés additives des nombres rationnels x et y, que :

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\,;$$
$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})\,; \quad (12)$$
$$\boldsymbol{A} + (0, 0, 0, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0) + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}.$$

La première égalité signifie que la somme de deux relevés est la même, quel que soit l'ordre dans lequel on les prend pour les additionner ; la seconde que l'on peut associer indifféremment les relevés $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ et ajouter le résultat de leur addition au relevé $\mathbf{C}$, ou bien ajouter le relevé $\mathbf{A}$ à la somme des relevés $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$, et qu'on obtient dans ce cas le même résultat. Autrement dit, l'addition des relevés est commutative et associative. Quant à la troisième égalité, elle nous dit que le relevé (0, 0, 0, 0, 0, 0) est l'élément neutre pour l'addition ; nous écrirons donc :

$$(0, 0, 0, 0, 0, 0) = \mathbf{0}\,. \tag{13}$$

D'autre part, si nous convenons de noter à l'aide d'un nombre positif les opérations créditrices et à l'aide d'un nombre négatif les opérations débitrices d'une caisse, nous pouvons définir le relevé $-\mathbf{A}$, *opposé* à $\mathbf{A}$, c'est-à-dire tel que :

$$-\mathbf{A} + \mathbf{A} = \mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}\,. \tag{14}$$

Avec les notations précédentes on aurait :

$$-\mathbf{A} = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, -x_5, -x_6)\,. \tag{15}$$

Les égalités (12) et la définition (15) nous montrent que l'ensemble des relevés tel que $\mathbf{A}$ est un *groupe* pour l'addition, l'opération « addition » signifiant ici cumul des relevés des deux caisses et se faisant selon la règle (11).

— Définissons maintenant l'opération « changement d'unité monétaire » : pour exprimer le relevé $\mathbf{A}$ de l'égalité (9) en dollars, sur la base 1 dollar = 5 francs, il faut diviser par 5 chaque total journalier, c'est-à-dire le multiplier par la fraction $\lambda = 1/5$. On obtient ainsi le relevé λA :

$$\lambda \mathbf{A} = (25,\ \ 28{,}4,\ \ 50{,}2,\ \ 49{,}4,\ \ 58,\ \ 61)\,. \tag{16}$$

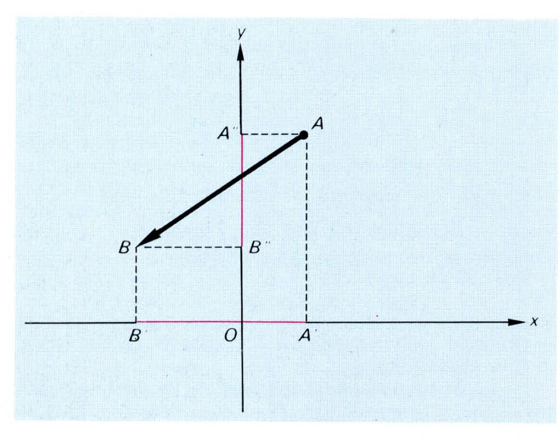
Plus généralement, λ appartenant au corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, on définit l'opération $\lambda \mathbf{A}$ par :

$$\lambda \mathbf{A} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \lambda x_5, \lambda x_6)\,. \tag{17}$$

L'opération « changement d'unité monétaire » est donc une loi de composition externe pour l'ensemble des relevés ; elle vérifie les axiomes 5 à 8 de la structure d'espace vectoriel.

— En résumé, les relevés $\mathbf{A}$ constituent un ensemble E muni d'une loi de composition interne (addition) lui conférant la structure de groupe et d'une loi de composition externe (que nous pouvons appeler *homothétie*) : c'est donc un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels.

● *Un exemple géométrique.* Soit l'ensemble des vecteurs géométriques du plan xOy, défini par deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy. A chaque vecteur $\mathbf{AB}$ on associe ses composantes (X, Y) qui sont des nombres réels (voir figure). On peut munir l'ensemble des vecteurs $\mathbf{AB}$ du plan de deux lois de composition, l'une interne, l'autre externe, en faisant intervenir le corps des réels, qui vérifient les axiomes 1 à 8 ci-dessus ; donc les segments fléchés $\mathbf{AB}$ forment un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des réels.



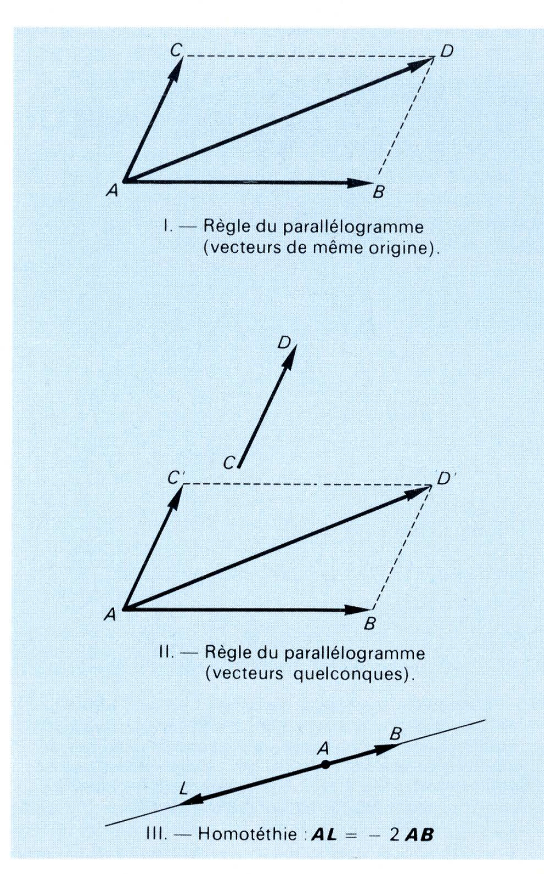
Vecteur géométrique $\overrightarrow{AB}$ à deux composantes. Les composantes $A'B' = X$ et $A''B'' = Y$ ont été tracées en rouge. En raison de l'orientation du vecteur dans le cas de figure considéré, X et Y sont ici des nombres réels négatifs (les segments $A'B'$ et $A''B''$ sont orientés négativement sur les axes Ox et Oy).

Précisons la nature des deux lois de composition sur l'ensemble des vecteurs géométriques.

— *L'addition vectorielle* $\mathbf{AB} + \mathbf{CD}$ consiste à construire le vecteur $\mathbf{AD}$ diagonale d'un parallélogramme dont les côtés sont les vecteurs $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{AC'}$, le vecteur $\mathbf{AC'}$, étant parallèle au vecteur $\mathbf{CD}$, de même sens et de même grandeur géométrique que ce vecteur ;

— *L'homothétie* $\lambda \mathbf{AB}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ consiste à construire le vecteur $\mathbf{AL}$ de même direction que le vecteur $\mathbf{AB}$, orienté comme celui-ci lorsque λ est positif, et en sens contraire si λ est négatif, et de grandeur géométrique égale à celle de $\mathbf{AB}$ multipliée par le nombre λ.

La première loi est une loi de composition interne dont l'élément neutre est le vecteur $\mathbf{0}$, réduit à n'être qu'un point (A et B sont confondus), la deuxième loi est une loi de composition externe sur le corps des réels. Ces lois respectent les huit axiomes (4) ; donc les vecteurs géométriques du plan forment un espace vectoriel pour les deux lois de l'addition vectorielle et l'homothétie.



I. — Règle du parallélogramme (vecteurs de même origine).

II. — Règle du parallélogramme (vecteurs quelconques).

III. — Homotéthie : $\mathbf{AL} = -2\,\mathbf{AB}$

Les deux lois de composition des vecteurs du plan.
I - Addition vectorielle : cette loi de composition interne fait correspondre à tout couple de vecteurs un troisième vecteur appelé leur* somme vectorielle *et construit selon la règle du parallélogramme. Si les vecteurs ont même origine, comme c'est le cas ici ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$), la construction est immédiate et l'on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.
II - Si les vecteurs n'ont pas une origine commune (tels $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$) il faut appliquer la construction indiquée dans le texte. La somme vectorielle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est ici le vecteur $\overrightarrow{AD'}$.
III - L'homothétie λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) transforme le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en son* homothétique *$\lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AL}$ (ici, on a pris ($\lambda = -2$)).

On peut écrire un vecteur géométrique $\mathbf{V}$ quelconque du plan sous la forme $\mathbf{V} = (X, Y)$, X et Y désignant ses deux composantes selon les axes Ox et Oy. Alors les deux lois de composition précédentes se définissent pour tout $(X, Y) \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} (X, Y) + (X', Y') = (X + X', Y + Y')\,; \\ \lambda(X, Y) = (\lambda X, \lambda Y)\,. \end{cases} \tag{18}$$

Il est facile de vérifier que ces deux lois vérifient les axiomes de la structure d'espaces vectoriels, avec (0, 0) comme vecteur nul et en notant $(-X, -Y)$ le vecteur symétrique pour l'addition de (X, Y).

— En résumé, l'ensemble des vecteurs (X, Y) du plan est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des réels. On notera l'analogie entre l'objet (X, Y), que nous appelons un vecteur (au sens général) et dont l'image est un vecteur géométrique, et l'objet $\mathbf{A}$ = relevé hebdomadaire $= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ de l'exemple précédent, qui est aussi un vecteur sur le corps $\mathbb{R}$ des réels. La différence entre les deux objets est le nombre des composantes : deux pour les vecteurs (X, Y) du plan et six pour les vecteurs-relevés. On précise ce fait en appelant $\mathbb{R}^2$ l'espace vectoriel des vecteurs géométriques et $\mathbb{R}^6$ celui des relevés.

● *Plus généralement,* un ensemble dont les éléments x sont de la forme :

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \tag{19}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant des nombres réels, est appelé un *espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{R}$ *des réels* si on le munit de la loi de composition interne $(x + y)$ et de la loi de composition externe $(\lambda, x) \to \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, définie comme précédemment :

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)\,, \end{aligned} \tag{20}$$

et :

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)\,. \tag{21}$$

Nous préciserons les définitions suivantes :

— x *est un vecteur à n dimensions* (ou *à n composantes*) ;

— $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les *n composantes* du vecteur x ;

— l'espace vectoriel est dit *n-dimensionnel* ; on le note $\mathbb{R}^n$ pour indiquer que les n composantes sont des nombres appartenant à $\mathbb{R}$;

— les nombres tels que λ appartiennent eux aussi à $\mathbb{R}$: on précise donc que $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel *n-dimensionnel* sur le corps $\mathbb{R}$ des réels ; le corps qui sert à constituer un espace est appelé *domaine d'opérateurs* (voir la définition générale d'une loi de composition externe au paragraphe **B,** *a* ci-dessus) ;

— le vecteur (0, 0, ..., 0) est le *vecteur nul* noté 0 (ou $\vec{0}$ ou $\mathbf{0}$ s'il risque d'y avoir ambiguïté avec le 0 des réels).

— Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est le *nombre* réel p défini par la combinaison linéaire :

$$p = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n\,. \tag{21 bis}$$

On le désigne souvent par un point placé entre les deux vecteurs : $p = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. Deux vecteurs dont le produit scalaire est nul sont dits *orthogonaux.*

Les vecteurs géométriques à deux dimensions sont, on l'a vu, les images de $\mathbb{R}^2$; les vecteurs géométriques à trois dimensions sont les images de $\mathbb{R}^3$. Pour $n > 3$, on ne peut plus construire d'images géométriques... mais est-ce indispensable ?

● *Autres exemples.*

— Nous étudierons, en analyse, la notion de *fonction numérique* $f(x)$, x étant une variable réelle appartenant à un ensemble déterminé (qui est le domaine de définition de la fonction). La valeur de la fonction $f(x)$ est un nombre réel, qu'on peut calculer par les méthodes du calcul ordinaire. Par exemple si $f(x) = x^2 - 1$, cette fonction est calculable dans le corps des réels quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Le domaine de définition de la fonction $f(x)$ est donc :

$$E = \{\text{les nombres réels}\}\,.$$

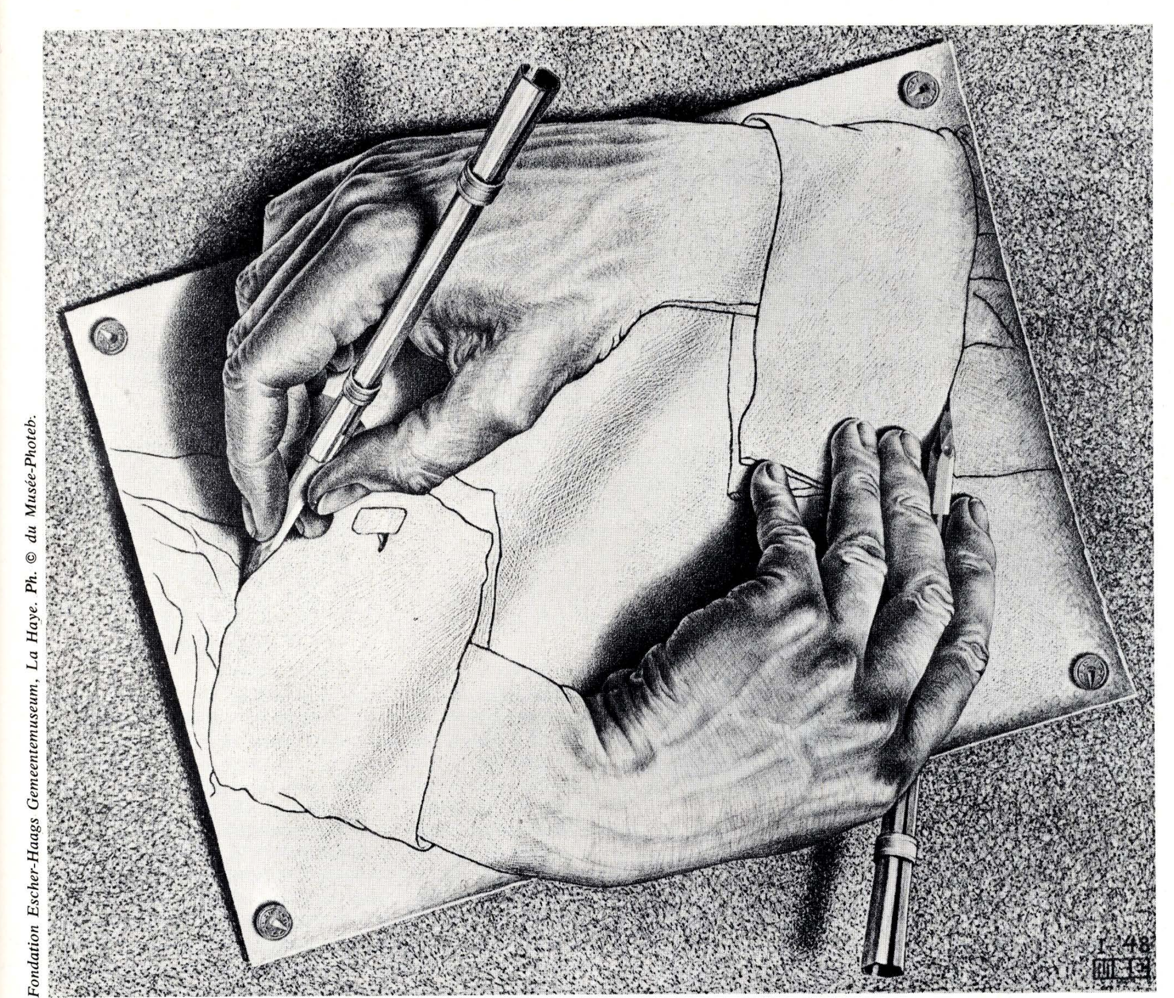
L'ensemble des valeurs de $f(x)$, lorsque x décrit toutes les valeurs de l'ensemble E, forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ qu'on écrit $\mathbb{R}(E)$.

— Si, dans l'équation (21), on choisit λ dans le corps $\mathbb{C}$ des complexes et si les composantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont elles-mêmes complexes, on obtient l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ sur le corps des complexes.

— Tous les exemples que nous avons donnés sont des exemples numériques : les composantes des vecteurs considérés et le corps sur lequel on a construit les espaces vectoriels sont des ensembles numériques (rationnels, réels ou complexes selon les cas). Mais il s'en faut de beaucoup que tous les espaces vectoriels soient numériques. On peut construire des ensembles ayant des structures d'espaces vectoriels et dont les éléments ne soient pas des nombres : par exemple un ensemble de transformations géométriques, ou bien un ensemble de morphismes (voir définition p. 38), ou de tout autre être abstrait. Ces espaces abstraits peuvent être traités de la même manière que les espaces numériques.

Combinaisons linéaires.

Soit $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, n vecteurs appartenant à un espace vectoriel E (*attention* : dans les exemples numériques du paragraphe *c*, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ désignaient les composantes numériques d'un vecteur sur le corps des réels ; ici le corps K sur lequel est construit E est quelconque, et $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ désignent non pas les composantes d'un vecteur mais des vecteurs distincts, numériques ou abstraits). Appelons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n éléments appartenant à K. La loi de composition externe $(\alpha, \mathbf{x}) \to \alpha\,\mathbf{x}$ nous permet de former des vecteurs $\alpha_1 \mathbf{x}_1, \alpha_2 \mathbf{x}_2$, etc. Considérons le vecteur $\mathbf{x}$ obtenu



Quoi de plus semblable qu'une main droite et qu'une main gauche ? Et pourtant il s'agit de deux volumes géométriques impossibles à superposer dans l'espace à trois dimensions. Ci-dessus, une lithographie de M. C. Escher, **Main dessinant** ***(1948), qui traduit admirablement le trouble de l'artiste confronté au problème de l'espace à plus de trois dimensions.***

en faisant l'addition, selon les règles de l'espace vectoriel considéré, de tous ces vecteurs :

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\, \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\, \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n\, \boldsymbol{x}_n\,. \qquad (22)$$

Le vecteur $\boldsymbol{x}$ est une *combinaison linéaire* (c'est-à-dire du premier degré) des vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$. On peut aussi le désigner en se servant du symbole Σ (sigma) dont on se sert pour indiquer la somme de i variables. On écrira alors : $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$ (les indications $i = 1$ et $i = n$ au-dessous et au-dessus du symbole sigma signifient que la somme est étendue de l'élément $\alpha_1\, \boldsymbol{x}_1$ à l'élément $\alpha_n\, \boldsymbol{x}_n$).

● *Remarques* :

1 - Notons d'abord qu'il ne peut pas être formé de combinaisons qui ne soient pas du premier degré. En effet, une combinaison du second degré, par exemple, serait $\alpha_1\, \boldsymbol{x}_1^2$ ou $\alpha_1\, \boldsymbol{x}_1\, \boldsymbol{x}_2$: mais pour cela, il faudrait avoir défini une deuxième loi de composition interne sur E, permettant de calculer $\boldsymbol{x}_1\, \boldsymbol{x}_2$ ou $\boldsymbol{x}_1^2$, ce qui n'est pas le cas, puisque la structure d'espace vectoriel ne contient qu'une loi de composition interne additive.

2 - S'il existe dans K des valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ non toutes nulles telles que $\boldsymbol{x} = 0$, les vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ sont dits *linéairement dépendants* ; cela signifie que chacun d'eux, à coefficients non nuls, peut être décrit sous la forme d'une combinaison linéaire des autres.

3 - Si l'égalité $\boldsymbol{x} = 0$ implique $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots \alpha_n = 0$, alors les vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ sont dits *linéairement indépendants*, et on ne peut exprimer l'un d'entre eux en fonction d'une combinaison linéaire des autres.

4 - Exemple : soit dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ sur le corps des réels les deux vecteurs $\boldsymbol{x}_1 = (1, 0)$ et $\boldsymbol{x}_2 = (0, 1)$. Existe-t-il deux réels α_1 et α_2, non tous deux nuls, tels que $\alpha_1\, \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\, \boldsymbol{x}_2 = 0$? On a, d'après la définition de la loi de composition externe $\alpha \boldsymbol{x}$:

$$\alpha_1\, \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\, \boldsymbol{x}_2 = (\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \qquad (23)$$

et cette somme est nulle si et seulement si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Donc les vecteurs $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$ sont linéairement indépendants. En revanche, si nous considérons dans $\mathbb{R}^2$ un troisième vecteur $\boldsymbol{x}_3 = (a, b)$, alors il est possible de trouver trois nombres α_1, α_2 et α_3 non tous nuls tels que $\alpha_1\, \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\, \boldsymbol{x}_2 + \alpha_3\, \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0} = (0, 0)$. En effet on doit avoir :

$$(\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2) + (\alpha_3\, a, \alpha_3\, b) = (0, 0)\,, \qquad (24)$$

d'où :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3\, a = 0\,; \\ \alpha_2 + \alpha_3\, b = 0\,. \end{cases} \qquad (25)$$

On peut trouver trois valeurs de α_1, α_2 et α_3 non toutes nulles qui vérifient (25). Donnons par exemple à α_3 la valeur arbitraire $\alpha_3 = 1$; en faisant $\alpha_1 = -a$ et $\alpha_2 = -b$, le système (25) est vérifié. Donc il en est de même pour l'équation (24) : les vecteurs $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ et $\boldsymbol{x}_3$ sont donc linéairement dépendants.

5 - D'une manière générale, tout vecteur $\boldsymbol{x}_3$ de $\mathbb{R}^2$ peut s'exprimer linéairement en fonction de $\boldsymbol{x}_1$ et de $\boldsymbol{x}_2$, ou de tout autre couple avec lequel il serait linéairement dépendant. Les lecteurs qui ont quelques rudiments de géométrie analytique savent que tous les vecteurs $\boldsymbol{V}(X, Y)$ du plan s'expriment linéairement en fonction des vecteurs unitaires $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ des axes, sous la forme $\boldsymbol{V} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j}$ (voir aussi p. 95).

● *Dimensions d'un espace vectoriel.* Un espace vectoriel est dit *n-dimensionnel* s'il existe dans cet espace n vecteurs linéairement indépendants et si n'importe quel ensemble de $n+1$ vecteurs est un ensemble de vecteurs linéairement dépendants. Si pour tout n il y a n vecteurs indépendants, l'espace est dit de dimension infinie.

Tout ensemble de n vecteurs indépendants dans un espace n-dimensionnel est appelé une *base* pour cet espace (exemple : les deux vecteurs unitaires $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ pour l'espace $\mathbb{R}^2$ des vecteurs géométriques à deux dimensions ; les trois vecteurs unitaires $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ pour l'espace $\mathbb{R}^3$ des vecteurs géométriques à trois dimensions).

● *Décomposition d'un vecteur suivant une base.* Soit $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ les n vecteurs linéairement indépendants constituant une base dans un espace vectoriel E sur un corps K, et soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur quelconque de l'espace E. Alors les $n+1$ vecteurs $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n\}$ ne sont pas linéairement indépendants d'après ce qui vient d'être dit et il existe des nombres $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ non tous nuls tels que :

$$\alpha \boldsymbol{x} + \alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{f}_n = 0\,. \qquad (26)$$

De plus, $\alpha \neq 0$, sinon le premier terme de l'équation (26) serait nul, et $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ ne seraient plus linéairement indépendants, puisque la somme $\alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{f}_n$ serait nulle avec des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ non tous nuls. On peut donc, puisque $\alpha \neq 0$, diviser tous les termes de l'équation (26) par α, ce qui permet de décomposer de la manière suivante :

$$\boldsymbol{x} = -\left(\frac{\alpha_1}{\alpha} \boldsymbol{f}_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha} \boldsymbol{f}_2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha} \boldsymbol{f}_n\right). \qquad (27)$$

Soit, en posant $\beta_i = -\alpha_i/\alpha$:

$$\boldsymbol{x} = \beta_1 \boldsymbol{f}_1 + \beta_2 \boldsymbol{f}_2 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{f}_n\,. \qquad (28)$$

Le vecteur $\boldsymbol{x}$ a été *décomposé suivant la base* $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$, et cette décomposition est unique.

● *Application.* Considérons les vecteurs de composantes (x, y, z) constituant l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ sur le corps des réels. Les trois vecteurs :

$$\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)\,; \quad \boldsymbol{j} = (0, 1, 0)\,; \quad \boldsymbol{k} = (0, 0, 1) \qquad (29)$$

sont linéairement indépendants. En effet, l'égalité :

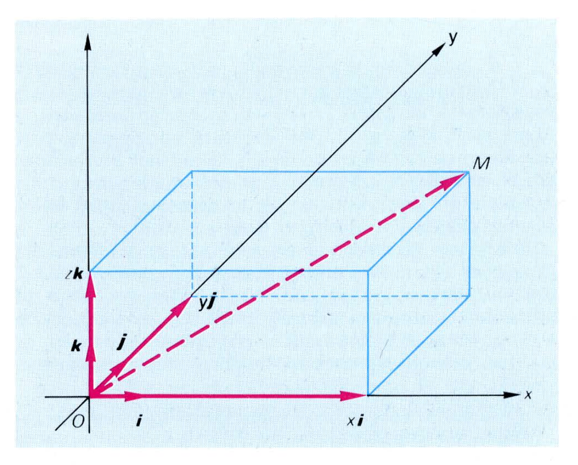
$$\alpha_1\, \boldsymbol{i} + \alpha_2\, \boldsymbol{j} + \alpha_3\, \boldsymbol{k} = (0, 0, 0) \qquad (30)$$

implique $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Donc : $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ est une base pour $\mathbb{R}^3$. Un vecteur $\boldsymbol{V}(x, y, z)$ quelconque peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{V} = (x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\,. \qquad (31)$$

Les nombres x, y et z sont les *coordonnées* (= les composantes) du vecteur $\boldsymbol{V}$.

En géométrie, le vecteur $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{OM}$ représente un point M dans un système d'axes Ox, Oy, Oz ; (x, y, z) sont les *coordonnées* du point M. Le vecteur $\boldsymbol{OM}$ est la diagonale du parallélépipède construit sur $x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$ et $z\boldsymbol{k}$.



Base d'un espace vectoriel à trois dimensions. Les points M ***de l'espace géométrique définissent les vecteurs*** $\vec{V} = \vec{OM}$, ***dont l'ensemble est un espace vectoriel à trois dimensions sur le corps des réels désigné par*** $\mathbb{R}^3$. ***Les vecteurs*** $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, ***appelés aussi vecteurs unitaires des axes, forment une base pour*** $\mathbb{R}^3$. ***Un vecteur quelconque*** $\vec{V} = (x, y, z)$ ***est la somme vectorielle*** $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, ***c'est-à-dire la diagonale du parallélépipède construit sur les vecteurs*** $x\vec{i}$, $y\vec{j}$ ***et*** $z\vec{k}$.

Sous-espaces vectoriels.

● *Définition.* Un sous-ensemble A d'un espace vectoriel E sur un corps K est appelé un *sous-espace vectoriel* de E s'il possède lui-même la structure d'espace vectoriel sur K pour les deux lois de composition définies sur E (c'est-à-dire : si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$, alors $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in A$ et $\alpha \boldsymbol{x} \in A$ pour tout $\alpha \in K$). Le vecteur nul $\boldsymbol{0} \in E$ est appelé *sous-espace nul* ; l'espace E lui-même est un *sous-espace identique* à E. Ces deux sous-espaces sont dits *impropres* ; tous les autres sous-espaces sont appelés *propres*. Ainsi $\mathbb{R}^2$ (les vecteurs géométriques à deux dimensions) est un sous-espace propre de $\mathbb{R}^3$ (vecteurs géométriques à trois dimensions) sur le corps $\mathbb{R}$.

● *Somme directe.* Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les sous-espaces d'un espace vectoriel E. Si un vecteur quelconque $\boldsymbol{x} \in E$ peut être décomposé sous la forme :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_n\,, \qquad (32)$$

de sorte que $\boldsymbol{x}_1 \in A_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in A_2$, ..., $\boldsymbol{x}_n \in A_n$ et si cette décomposition est unique, alors l'espace vectoriel E est dit *somme directe* de ses sous-espaces.

● *Espace quotient.* On peut définir dans E la

relation d'équivalence suivante : deux vecteurs $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in E$ sont ***équivalents au modulo*** *A* (= selon le sous-espace *A*) si $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in A$. On peut écrire cette relation sous la forme :

$$\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{y} \ (\text{mod } A)\,, \qquad (33)$$

ou sous la forme $\boldsymbol{x} \overset{A}{\sim} \boldsymbol{y}$ (le symbole « $\sim$ » se lit « équivalent à »). L'ensemble des vecteurs $\boldsymbol{y}$ équivalents à un vecteur $\boldsymbol{x}$ est la classe d'équivalence $\bar{\boldsymbol{x}}$ (modulo *A*), qui contient aussi l'élément $\boldsymbol{x}$ lui-même. L'ensemble des classes d'équivalence $\bar{\boldsymbol{x}}$, $\bar{\boldsymbol{y}}$, $\bar{\boldsymbol{z}}$, ... est l'ensemble-quotient E/A de l'espace vectoriel *E* par le sous-espace *A*. E/A est appelé un espace quotient.

Un exemple géométrique de relation d'équivalence dans un espace vectoriel *E* est la relation « équipollent à » pour les vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$. En géométrie, deux vecteurs $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{V}'$ sont dits *équipollents* lorsqu'ils sont : 1° parallèles (c'est-à-dire qu'ils sont portés par une même droite ou par des droites parallèles) ; 2° de même sens ; 3° de même module (= de même grandeur géométrique). Si deux vecteurs sont équipollents, il est clair que leur différence $\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}'$ (obtenue en additionnant le vecteur $\boldsymbol{V}$ et l'opposé du vecteur $\boldsymbol{V}'$) est le vecteur nul $\boldsymbol{0}$, qui constitue le sous-espace nul $A = \{\boldsymbol{0}\}$, défini plus haut. Nous pouvons donc écrire l'équation (33) sous la forme $\boldsymbol{V} \equiv \boldsymbol{V}'$ (mod $\boldsymbol{0}$). Tous les vecteurs équipollents à un vecteur $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ constituent la classe d'équivalence $\bar{\boldsymbol{a}}$, et le vecteur $\boldsymbol{a}$ lui-même en fait partie ; on a de même les classes d'équivalence $\bar{\boldsymbol{b}}$, $\bar{\boldsymbol{c}}$, ... L'ensemble $\{\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{c}}, ...\}$ est l'espace quotient $\mathbb{R}^3/\boldsymbol{0}$. Nous avons utilisé la relation d'équipollence dans la figure décrivant la loi de composition interne sur les vecteurs du plan (voir ci-dessus) : dans le cas de figure II, nous avons remplacé le vecteur $\boldsymbol{CD}$ par le vecteur équipollent $\boldsymbol{AC}'$.

Morphismes et opérateurs linéaires.

Pour la définition générale des morphismes, voir p. 38.

● *Morphismes d'espaces vectoriels.* Soit *E* et *F* deux espaces vectoriels sur un même corps *K* ; nous appellerons $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ... les vecteurs appartenant à l'espace *E* et $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, ... les vecteurs appartenant à *F*. Considérons l'application $E \xrightarrow{\omega} F$ qui fait correspondre à tout $\boldsymbol{x} \in E$ un vecteur $\boldsymbol{y} \in F$ image de $\boldsymbol{x}$ dans l'application ω, image que nous noterons $\omega(\boldsymbol{x})$, symbole qu'il faut lire « oméga de $\boldsymbol{x}$ ».

Soit deux éléments $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in E$, et deux éléments $\alpha_1, \alpha_2 \in K$. La loi de composition externe définie sur *E* et appliquée à $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$ donne $\alpha_1 \boldsymbol{x}_1$ et $\alpha_2 \boldsymbol{x}_2$; la loi de composition interne (addition) appliquée à ces deux vecteurs donne finalement le composé $\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\ _2$, qui est une combinaison linéaire très simple des vecteurs $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$. L'application $E \xrightarrow{\omega} F$ transforme ce vecteur en $\omega(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2)$. Si :

$$\omega(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2) = \alpha_1\, \omega(\boldsymbol{x}_1) + \alpha_2\, \omega(\boldsymbol{x}_2)\,, \qquad (34)$$

alors l'application ω est un *morphisme* de l'espace *E* dans l'espace *F* (ce qui peut se résumer grossièrement par la formule : « l'image du composé est le composé des images »).

— Si *E* s'applique sur tout l'espace *F*, le morphisme ω est un *épimorphisme.*

— Si le morphisme ω est une application injective, c'est-à-dire si à deux éléments distincts $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$ de *E* correspondent deux images distinctes $\omega(\boldsymbol{x}_1)$ et $\omega(\boldsymbol{x}_2)$ de *F*, c'est un *monomorphisme.*

— Si le morphisme ω est à la fois un épimorphisme et un monomorphisme, c'est un *isomorphisme.*

— Remarque : un morphisme d'espace vectoriel est souvent noté :

$$\omega : E \rightarrow F\,. \qquad (35)$$

● *Opérateurs linéaires.* Un morphisme d'espace vectoriel est souvent appelé un *opérateur linéaire.* Dans ce cas, au lieu d'écrire le morphisme sous la forme $\omega : E \rightarrow F$, ce qui conduit à noter $\omega(\boldsymbol{x})$ l'image de $\boldsymbol{x}$ dans l'application ω, on écrit $A : E \rightarrow F$, et on appelle *A* un opérateur linéaire. L'image de $\boldsymbol{x}$ est alors écrite $A\,\boldsymbol{x}$ et la condition (34) s'écrit :

$$A(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2) = \alpha_1 A\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 A\boldsymbol{x}_2\,. \qquad (36)$$

Nous n'approfondirons pas ici la théorie des opérateurs linéaires ; nous nous contenterons d'en donner quelques définitions qui seront utilisées ultérieurement.

— L'opérateur *A* qui, à tout $\boldsymbol{x} \in E$, fait correspondre le vecteur nul $\boldsymbol{0}$ de *F* vérifie la condition (36), c'est donc un opérateur linéaire : on l'appelle *opérateur nul.*

— L'opérateur *A* qui, à tout $\boldsymbol{x} \in E$, fait correspondre le vecteur $\boldsymbol{x} \in E$ est aussi un opérateur linéaire : c'est l'*opérateur unité* (*identité*).

— Si *E* est un espace vectoriel de dimension finie *n* et si *F* est un espace vectoriel à une seule dimension (par exemple : $F = \mathbb{R}$), l'opérateur linéaire *A* qui applique *E* dans *F* est appelé *forme linéaire.*

— On peut définir la somme $A_1 + A_2$ de deux opérateurs linéaires et le produit αA d'un opérateur linéaire par un nombre α selon les règles suivantes :

$$\begin{cases} (A_1 + A_2)\,\boldsymbol{x} = A_1 \boldsymbol{x} + A_2 \boldsymbol{x}\,; \\ (\alpha A)\,\boldsymbol{x} = \alpha(A\boldsymbol{x})\,. \end{cases} \qquad (37)$$

On montre alors que l'ensemble des opérateurs A_1, A_2, ... qui applique *E* dans *F* est lui-même un espace vectoriel, qui admet l'opérateur nul comme élément neutre pour l'addition.

— Si *E, F, G* sont trois espaces vectoriels, *A* et *B* deux opérateurs linéaires définissant les applications $A : E \rightarrow F$ et $B : F \rightarrow G$, alors l'opération $P : E \rightarrow G$ est appelée *produit AB* des opérateurs *A* et *B*, *pris dans cet ordre.* On a :

$$P\boldsymbol{x} = A(B\boldsymbol{x})\,. \qquad (38)$$

— Soit *A* un opérateur tel que $A : E \rightarrow F$ et *B* un opérateur linéaire tel que $B : F \rightarrow E$; appelons U_E l'opérateur identité dans *E*. Alors, si :

$$BA = U_E\,, \qquad (39)$$

B est appelé *inverse à gauche* de l'opérateur *A* et *A* est l'inverse à droite de l'opérateur *B*.

Algèbres.

Si, dans un espace vectoriel *E* sur un corps *K*, on définit une deuxième loi de composition interne appelée *multiplication*, telle que $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ (ou $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$) soit un élément de *E*, et si cette loi satisfait en outre aux axiomes suivants, l'espace vectoriel *E* est appelé une *algèbre associative* (ne pas confondre ce mot, qui est pris au sens d'un ensemble possédant au moins deux lois de composition interne, avec le sens technique ordinaire) :

$$\text{pour tout } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in E \text{ et } \alpha \in K \begin{cases} 9 - \alpha(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}) = (\alpha\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}(\alpha\boldsymbol{y})\,. \\ 10 - (\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}\boldsymbol{z})\,. \\ 11 - (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}\,\boldsymbol{z}\,. \\ 12 - \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{z}\,. \end{cases} \qquad (40)$$

Les axiomes ont été numérotés 9 à 12, les huit premiers étant ceux d'un espace vectoriel, énoncés aux équations (4). Les axiomes 9 et 10 sont appelés lois associatives de l'algèbre considérée (elles concernent la loi de composition externe $\alpha\boldsymbol{x}$ et la multiplication), les axiomes 11 et 12 sont les *lois distributives.* L'algèbre est dite *non commutative* si, en général, $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}$ et *commutative* si $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}$. Une algèbre possède un élément neutre 0 pour l'addition et un élément neutre *e* (= unité) pour la multiplication (ne pas le confondre avec l'élément unité 1 du corps *K* sur lequel est construit l'espace vectoriel *E*). Deux éléments $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont symétriques pour la multiplication (*inverses*) si $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\boldsymbol{x} = e$.


C'est à l'époque où la comtesse de Ségur écrivait **Les petites filles modèles** *(ci-dessous : illustration de Bertall pour l'édition originale de 1858) que s'est constituée l'algèbre moderne, avec les travaux de Hamilton, Grassmann, Riemann, Boole, etc.*



Bibliothèque Nationale, Paris. Ph. Michel Didier © Photeb.

Lattis et algèbres booléennes.

Nous allons maintenant étudier deux structures très générales : le *lattis* (ou *treillis*, ou *ensemble réticulé*) et les *algèbres booléennes*, qui sont des lattis particuliers. C'est le logicien et mathématicien anglais George Boole (prononcez « Boule ») qui, le premier, a étudié un cas particulier de lattis ; ses travaux remontent aux alentours de 1850 (*Analyse mathématique de la logique*, 1847 ; *Investigations des lois de la pensée*, 1854). Dedekind a introduit la notion plus générale de lattis une trentaine d'années plus tard.

Lattis.

Le lecteur est prié de se reporter p. 17, pour revoir éventuellement la définition d'un ensemble ordonné, totalement ou partiellement, selon une relation d'ordre $R\ \{x, y\}$ écrite conventionnellement « $x \leqslant y$ » (ou, d'une façon synonyme : « $y \geqslant x$ ») et celles de majorant, de minorant, de borne supérieure et de borne inférieure d'une partie *A* d'un ensemble ordonné *E*.

● *Définition.* Un *lattis* est un ensemble *E* partiellement ordonné dans lequel toute partie $A = \{x, y\}$ à deux éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure dans *E*. Nous écrirons :

$$a = x \wedge y\,, \qquad (1)$$

pour exprimer que *a* est la borne inférieure de $\{x, y\}$; et :

$$b = x \vee y\,, \qquad (2)$$

pour exprimer que *b* est la borne supérieure de $\{x, y\}$.

● *Exemples.*

— Soit l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers naturels ordonné par la relation « *m* divise *n* ». Considérons une partie *A* de $\mathbb{N}^*$ à deux éléments, $A = \{x, y\}$. Donnons par fantaisie au symbole « $\leqslant$ » le sens de « est diviseur de » ; on écrira donc :

$$m \text{ divise } n \quad \text{ou} \quad m \leqslant n\,. \qquad (3)$$

(*Attention* : avec la convention de notation des relations d'ordre, « $\leqslant$ » ne signifie nécessairement pas que *m* est un nombre inférieur à *n*, bien que ce soit toujours le cas ici.) Pour voir si l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est un lattis, examinons l'existence de bornes inférieure et supérieure pour l'ensemble à deux éléments *A*.

1 - Soit α un minorant de *A*, cela signifie que α

minore aussi bien x que y, c'est-à-dire que α est un diviseur commun pour x et y. La plus grande valeur possible de α est le PGCD de x et y : c'est la borne inférieure a de l'ensemble A.

2 - Soit maintenant β un majorant de A ; on doit avoir « x diviseur de β » et « y diviseur de β » : donc β est un multiple commun de x et de y. Le plus petit majorant possible est le PPCM de x et y : c'est la borne supérieure b de l'ensemble A.

Tout ensemble $A\{x, y\}$ partie de $\mathbb{N}^*$ admettant une borne inférieure et une borne supérieure pour la relation $m \leqslant n$ (« $\leqslant$ » = « est diviseur de »), il en résulte que $\mathbb{N}^*$ muni de cette relation d'ordre est un lattis.

— Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties qui lui correspond (voir la définition p. 15). L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est partiellement ordonné pour la relation « est inclus dans », que nous noterons indifféremment à l'aide du symbole « $\subset$ » ou du symbole « $\leqslant$ ». On sait que l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est constitué par : 1° l'ensemble vide $\varnothing$; 2° les ensembles $\{x\}$, $\{y\}$, ..., à un élément ; 3° les ensembles $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, ..., à deux éléments ; 4° les ensembles à trois, quatre, cinq, ... éléments ; 5° l'ensemble E lui-même. C'est-à-dire que $\mathcal{P}(E)$ est constitué par toutes les parties A, B, C, ... de E, en y incluant l'ensemble vide et l'ensemble E. Considérons une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ contenant deux éléments de $\mathcal{P}(E)$, par exemple $\mathcal{A} = \{A, B\}$.

1 - Tout ensemble α inclus dans A et dans B est inclus dans l'intersection $A \cap B$ des deux ensembles A et B : l'ensemble $A \cap B$ est le plus grand possible pour la relation d'inclusion, c'est-à-dire la borne inférieure de $\mathcal{A}$.

2 - Toute partie β dans laquelle sont inclus A et B, est un majorant pour $\mathcal{A}$; l'ensemble $A \cup B$ est le plus petit de ces majorants pour la relation d'inclusion : c'est la borne supérieure de $\mathcal{A}$.

Toute partie $\mathcal{A}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ possédant une borne inférieure et une borne supérieure, l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ est un lattis.

● *Axiomes de la structure de lattis.* Nous avons dit qu'un ensemble était un lattis si, et seulement si, chaque couple $\{x, y\}$ de cet ensemble possédait une borne inférieure $a = x \wedge y$ et une borne supérieure $b = x \vee y$. Pour définir un lattis, il faut donc se donner une relation d'ordre $\leqslant$ et deux opérations binaires $\vee$ (union) et $\wedge$ (intersection) déterminant respectivement la borne supérieure et la borne inférieure de tout couple $\{x, y\}$ appartenant à E. Ces opérations ont les propriétés de l'union et de l'intersection des ensembles (voir pp. 15-16), à savoir :

Nos des axiomes	Propriétés	Opération $\vee$	Opération $\wedge$
1	Commutativité	$x \vee y = y \vee x$	$x \wedge y = y \wedge x$
2	Associativité	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
3	Idempotence	$x \vee x = x$	$x \wedge x = x$
4	Absorption	$(x \vee y) \wedge x = x$	$(x \wedge y) \vee x = x$

(4)

● *Principe de dualité.* Le lecteur a sans doute remarqué que les axiomes 1 à 4 sont doubles et portent sur les deux opérations $\vee$ et $\wedge$. Le *principe de dualité* dit que si une proposition p peut être déduite des axiomes 1 à 4, alors on peut établir la proposition p', obtenue en intervertissant $\vee$ et $\wedge$ dans p. La proposition p' est *duale* de p.

Par exemple, on peut montrer dans certains cas que $\wedge$ est une opération distributive par rapport à $\vee$, c'est-à-dire que pour tout x, y, z d'un lattis, on a :

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \quad (5)$$

Le dual de cet énoncé est donc vrai lui aussi et s'écrit :

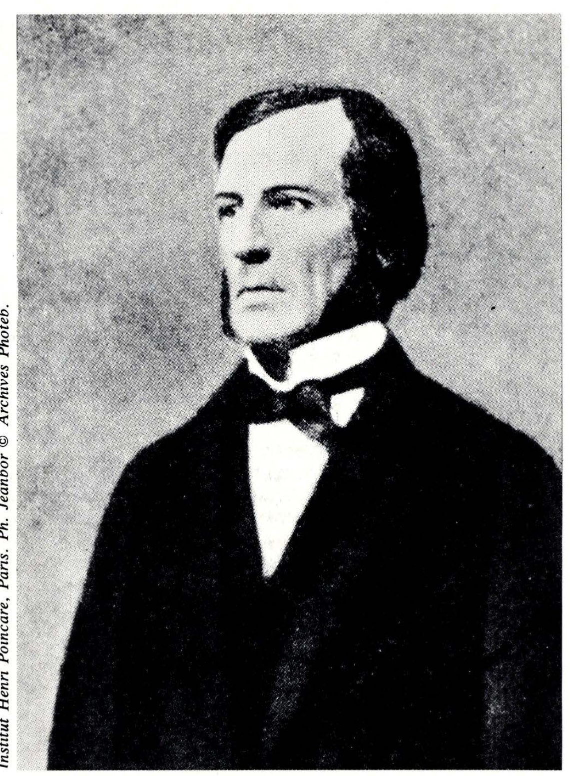
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z). \quad (6)$$

● *Modularité.* Les lattis les plus importants en algèbre ne sont pas distributifs ; toutefois ils vérifient souvent une condition plus faible que la distributivité et qu'on nomme la *modularité* ; on l'exprime ainsi :

$$\text{si } x \leqslant y \text{, alors } x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z). \quad (7)$$

Si la condition de modularité (7) est vérifiée, le lattis est dit *modulaire*. La condition duale est :

$$\text{si } y \geqslant x \text{, alors } x \wedge (y \vee z) = y \vee (x \wedge z). \quad (8)$$



George Boole (1815-1864).

Algèbres de Boole.

● *Définition.* Si un ensemble E partiellement ordonné possède une structure de lattis, c'est-à-dire s'il est muni de deux lois de composition interne binaires $\wedge$ et $\vee$ satisfaisant les axiomes (4) ci-dessus, et si de plus : 1° les opérations $\wedge$ et $\vee$ sont doublement distributives ; 2° il existe une opération $x \to x'$ faisant correspondre à tout $x \in E$ un élément $x' \in E$ appelé son *complément dans E* ; 3° E contient un plus grand élément 1 et un plus petit élément 0 (« $>$ » et « $<$ » devant être compris au sens de la notation des relations d'ordre) : alors le lattis est une *algèbre booléenne* (ou une algèbre de Boole).

● *Exemples.*
— Soit l'ensemble $B = \{0, 1\}$, muni des lois $\vee$, $\wedge$, $'$, ainsi définies :
$\vee$ (union ou addition) : par la table d'addition donnée p. 42, relative à l'exemple « électrique » ;
$\wedge$ (intersection ou multiplication) : par la table de multiplication donnée au même paragraphe :
$'$ (complémentation) : par $0' = 1$; $1' = 0$.

1 - Les lois de composition interne $\vee$ et $\wedge$ sont commutatives, associatives, idempotentes et absorptives (on le vérifie directement) : donc B est un lattis.

2 - $\vee$ et $\wedge$ sont doublement distributives.

3 - Il existe une troisième loi, unaire (= portant sur un seul élément) : la complémentation notée : $'$.

4 - Le plus grand élément est 1 ; le plus petit élément est 0.

Les propriétés 2, 3 et 4 ajoutées à la propriété 1 montrent donc que B est une algèbre de Boole.

— L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble est une algèbre de Boole. En effet :

1 - $\mathcal{P}(E)$ muni des opérations $\cup$ et $\cap$, définies en théorie des ensembles, est un lattis.

2 - $\cup$ et $\cap$ sont doublement distributives.

3 - La troisième loi : $'$ est la complémentation dans E (voir p. 16).

4 - Le plus petit élément de $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble vide $\varnothing$, et le plus grand élément de $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble E lui-même.

Résumé et conclusion.

Résumé.

● *La structure d'un ensemble E* est déterminée par les lois de composition (interne ou externe) définies sur cet ensemble et par leurs propriétés.

● *Nous avons décrit huit types de structures*, les structures : de monoïde, de groupe, d'anneau, de corps, de module sur un anneau, d'espace vectoriel (module sur un corps), de lattis, d'algèbre booléenne. A ces structures principales on peut ajouter des structures dérivées : sous-monoïde, sous-groupe, idéal d'un anneau, sous-corps, sous-espace vectoriel, etc.

● *Les lois de composition interne étudiées ont été nommées* : addition ou union, multiplication ou intersection, complémentation ; elles sont respectivement notées :

$$+ \text{ ou } \vee \text{ ou } \cup \text{ ; } \times \text{ ou } \wedge \text{ ou } \cap \text{ ; } ' \text{ ;}$$

ou d'une manière générale par des symboles tels que : $\perp$, $\top$, $\perp'$, etc.

La description technique des lois de composition impose d'indiquer le procédé par lequel on obtient le composé $z = x \perp y$ (table d'addition, table de multiplication, construction géométrique, etc.).

● *La description d'une structure* impose de définir des éléments particuliers : les éléments neutres pour les opérations considérées (notés en général 0 pour l'addition et 1 pour la multiplication) et d'examiner l'existence ou la non-existence d'éléments symétriques ($-x$, x^{-1}).

● *L'application f d'un ensemble E* dans un ensemble F impose d'étudier l'image dans F du composé $x \perp y$ de deux éléments appartenant à E pour une loi $\perp$. Si f satisfait à certaines conditions, énoncées p. 38, c'est un *morphisme*. Les cas particuliers où le morphisme considéré est un *isomorphisme* est particulièrement fécond.

● *On peut définir, dans un ensemble E* muni d'une structure (S), une relation d'équivalence $R\{x, y\}$ notée $x \equiv y$. Cette relation dépend, évidemment, de la nature des objets constituant l'ensemble E. Par exemple, dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers, on définit la congruence $a \equiv b \pmod p$ comme le fait pour $a - b$ d'être divisible par p ; dans un espace vectoriel E la relation d'équivalence $x \equiv y \pmod A$ signifie que le vecteur $x - y$ appartient au sous-espace vectoriel A.

Tous les éléments équivalents à un même élément a constituent une classe d'équivalence $\bar{a}$.

Conclusion.

Les mathématiques sont l'art du calcul, en prenant le terme au sens général de « combinatoire ». L'arithmétique calcule sur des nombres entiers ou rationnels, l'algèbre (au sens le plus général) calcule sur des ensembles, sur des opérations, sur des implications ; l'analyse calcule sur les nombres réels, les nombres complexes, les fonctions, les infiniment petits, etc.; la géométrie calcule sur des ensembles de points ; la topologie calcule sur des configurations, etc.

L'intérêt de la considération de la structure d'un ensemble dans lequel on calcule est multiple.

1 - On détermine d'emblée les règles générales de tout calcul, sans avoir besoin de le démontrer pour chaque théorie particulière ou pour chaque cas particulier.

2 - L'utilisation de certaines structures et de leurs propriétés permet de résoudre des problèmes fondamentaux de l'algèbre ou de l'analyse (par exemple les propriétés du groupe de substitutions facilitent l'étude des équations du n-ième degré).

3 - Les liens de parenté entre diverses théories mathématiques deviennent évidents quand on examine les structures qui leur correspondent. C'est grâce à l'algèbre des structures, notamment, qu'on a pu généraliser la notion de nombre (des entiers naturels aux idéaux, en passant par les réels et les complexes), et de vecteurs (à 2, 3, ..., n dimensions, et les tenseurs).

4 - Grâce à l'algèbre des structures, l'édifice des connaissances mathématiques est plus cohérent, plus général, plus rigoureux. En revanche, le raisonnement mathématique est plus abstrait, et, en apparence, plus éloigné des applications physiques, techniques, etc. Cet inconvénient disparaît, évidemment, après un peu de pratique.

5 - Il n'est pas inutile de rappeler que les principales structures algébriques ont été définies entre 1830 et 1880 environ. L'algèbre dite moderne est celle de nos arrière-arrière-grands-parents, contemporains des révolutions de 1848, de la formation de l'empire allemand, de l'unité italienne, du Second Empire, de la Commune de Paris, du triomphe de la machine à vapeur, des crinolines, de l'Impressionnisme, des opéras de Wagner, de l'élaboration et de la diffusion du *Capital*, de l'*Internationale ouvrière* et des premiers mouvements anarchistes. Elle est antérieure à la psychanalyse (née en 1885), à la physique relativiste (née en 1905), à la physique atomique et nucléaire (qui se développe entre 1895 et 1920), à la physique quantique (élaborée entre 1920 et 1930).

NOMBRES RÉELS ET NOMBRES COMPLEXES.

Nous avons déjà rencontré les nombres réels et les nombres complexes pp. 31-32. Ce sont là des êtres mathématiques d'une importance capitale : toute l'algèbre classique, élémentaire ou supérieure, l'analyse, l'algèbre linéaire, etc., conduisent à *calculer* — au sens large — dans ces ensembles. Avant de poursuivre notre exposé des connaissances mathématiques, il nous faut donc définir les réels et les complexes avec plus de rigueur et de précision que nous ne l'avons fait jusqu'à présent.

Rappel historique.

La notion de nombre réel.

Le « nombre » par excellence, sur lequel on calcule, que l'on combine, que l'on met en rapport dans des équations avec d'autres « nombres » connus ou inconnus, c'est le nombre entier positif, c'est-à-dire l'*entier naturel.* Nous l'avons vu, p. 25, qu'on peut définir l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et du zéro par un système d'axiomes, décrivant leurs propriétés fondamentales et à partir desquelles toutes les autres propriétés — dont l'ensemble constitue l'*arithmétique* ou la *théorie des nombres* — peuvent être déduites. Vingt-deux siècles environ séparent la première tentative de définition axiomatique des entiers (par Euclide, qui reprend Eudoxe) des axiomes de Peano (1889), dont on fait classiquement usage pour définir l'ensemble $\mathbb{N}$. Au cours des âges (voir p. 7) et pour les besoins de l'algèbre — considérée comme la théorie des équations — ont été introduits les nombres fractionnaires, les nombres négatifs, les irrationnels et les nombres complexes, dont nous ne parlerons d'ailleurs pas pour l'instant. L'ensemble des rationnels (positifs et négatifs) et des irrationnels constitue l'ensemble des réels.

● *Définition par la théorie de la mesure.* C'est encore à Euclide qu'il faut remonter si l'on veut une première définition axiomatique des réels, définition qui reprend les théories d'Eudoxe. Pour les Anciens, un nombre réel est un symbole exprimant la mesure d'une grandeur (une longueur, une surface ou un volume par exemple). Les nombres rationnels sont représentables par des segments divisibles en unités et en fractions d'unités ; les irrationnels sont aussi représentables par des segments, ainsi la diagonale d'un carré dont le côté est égal à l'unité représente l'irrationnel $\sqrt{2}$. De ce point de vue, la définition du nombre réel en tant que telle est esquivée, et seules sont conservées les règles axiomatiques de calcul. Dans le Livre I des *Arithmétiques* de Diophante d'Alexandrie, on trouve une introduction ample définissant les diverses catégories de réels et les règles de calcul les concernant. Cette attitude a persisté jusqu'au début du XIX[e] siècle où l'on se contentait encore de la définition d'Isaac Barrow (le maître de Newton) : les nombres réels sont des symboles traduisant des rapports de grandeurs — commensurables ou incommensurables — et susceptibles de se combiner entre eux selon les lois de l'arithmétique. Cet état d'esprit va être celui de tous les mathématiciens jusqu'aux travaux de Gauss sur les séries convergentes.

● *Les réels considérés comme la limite d'une série convergente.* A partir du XIX[e] siècle — tout particulièrement à partir d'un mémoire de Gauss sur les *séries hypergéométriques* (1812), on ne se contente plus de cette définition opérationnelle des réels. Il y a à cela deux raisons :

1 - la théorie des fonctions, élaborée au XVIII[e] siècle, a porté au premier plan de la réflexion mathématique les problèmes relatifs aux *séries convergentes*, à la *continuité*, à la notion de *limite* ;

2 - la valeur numérique d'une fonction est un nombre réel qui peut se calculer, dans le cas le plus général, en remplaçant la fonction par une somme de termes, qu'on appelle une *série* ; le nombre réel équivalent à la fonction est la *limite*, si elle existe, vers laquelle tend cette série lorsque le nombre de termes augmente indéfiniment.

Sans anticiper sur ce qui sera dit ultérieurement en analyse, expliquons-nous succinctement. Une *série numérique* est la somme des termes a_1, a_2, ... formant une *suite.* Par exemple :

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + \cdots \qquad (1)$$

est une série numérique, dans laquelle x est un nombre déterminé. Le premier terme de la série est 1 ; le deuxième terme de la série est x ; le troisième terme de la série est x^2 ; ... le n-ième terme de la série est x^{n-1}. Si x est un nombre supérieur à 1, chaque terme est supérieur au précédent, et la somme (1) augmente en même temps que n et tend vers l'infini quand n augmente indéfiniment : on dit que la série *diverge* ou *est divergente.* En revanche, si x est inférieur à 1, chaque terme est plus petit que le précédent. Par exemple, pour $x = 1/2$, (1) s'écrit :

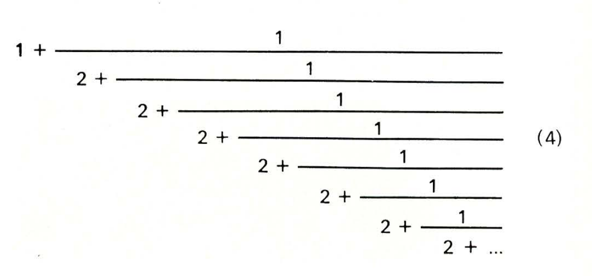
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots . \qquad (2)$$

En formant les *sommes partielles* :

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 , \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \\ s_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}, \\ s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}, \\ &\text{etc.,} \end{aligned} \qquad (3)$$

on *constate* (mais ce n'est pas une démonstration), que la somme s_n se rapproche de plus en plus de 2 au fur et à mesure que n augmente. Il est donc *tentant* de dire que $s = 2$ est la *valeur limite* qu'atteindra la série (2) si on la prolonge à l'infini. Si l'on succombe à cette tentation, on dira que la série est *convergente* et que sa somme est la limite $s = 2$.

Au XVII[e] et au XVIII[e] siècle, bien des mathématiciens ont succombé à la tentation de l'intuition et ils ont affirmé la convergence de séries variées, sans apporter aucune rigueur logique à ces affirmations. Newton lui-même croyait que n'importe quelle fonction pouvait se mettre sous la forme d'une série de puissances et les *règles de convergence* employées résultaient souvent d'actes de foi plus que de raisonnements déductifs. Dès lors, la définition d'un nombre irrationnel comme la limite d'une série convergente ne peut être guère prise au sérieux : ainsi, on savait depuis le XVI[e] siècle (Bombelli) que $\sqrt{2}$ peut se calculer avec autant de précision que l'on désire par la fraction prolongeable à l'infini :



$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}}}} \qquad (4)$$

Yves Tanguy (1900-1955) : Nombres réels. (Coll. comtesse Pecci-Blunt, Rome.)

Mais cela ne constitue pas une définition rigoureuse de $\sqrt{2}$, car il faudrait *démontrer* que l'expression (4) tend vers une limite finie ; pour cela il faut disposer d'une définition claire et distincte de la notion de limite.

Ainsi donc, dans la mesure où l'on peut définir un nombre réel en se fondant sur la notion de suite, de série convergente, de continuité et de limite, il faut commencer par définir ces notions. C'est cette rigueur qu'introduit Gauss dans son mémoire de 1812 pour calculer une fonction appelée *série hypergéométrique*, et qu'on retrouve en 1817 dans un mémoire célèbre sur la définition de la continuité des fonctions, dû au mathématicien et logicien italo-tchèque (... mais qui écrivait en allemand), B. Bolzano. Toutefois c'est à Cauchy (*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, 1821) que revient le mérite d'avoir établi d'une façon rigoureuse la théorie des séries. Donnons-lui la parole :

> *« ... Avant d'effectuer la sommation d'aucune série, j'ai dû examiner dans quels cas les séries peuvent être sommées, ou, en d'autres termes, quelles sont les conditions de leur convergence ; et j'ai, à ce sujet, établi des règles générales qui me paraissent mériter quelque attention. »*

Parmi ces « règles générales », il y a le fameux « *critère de Cauchy* » (qui ne s'applique, en fait, qu'à certaines suites dites « suites de Cauchy ») et que son auteur énonce de la manière suivante :

> *« Pour que la série soit convergente, il est d'abord nécessaire que le terme général U_n décroisse indéfiniment tandis que n augmente ; mais cette condition ne suffit pas, et il faut encore que pour des valeurs croissantes de n, les différentes sommes :*
>
> $U_n + U_{n+1}$,
> $U_n + U_{n+1} + U_{n+2}$,
> etc.
>
> *c'est-à-dire les sommes des quantités U_n, U_{n+1}, U_{n+2}, etc., prises, à partir de la première, en tel nombre que l'on voudra, finissent par obtenir constamment des valeurs numériques inférieures à toute limite assignable. Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la série est assurée. »*

Les idées de Cauchy furent précisées par Abel (1826), et un demi-siècle plus tard, par Weierstrass, Dedekind, Méray et Cantor. On aboutit ainsi à diverses définitions possibles (et équivalentes) des réels, à partir des nombres rationnels.

● *La mise en ordre axiomatique* de ces connaissances a eu lieu dans les vingt dernières années du XIXe siècle. A partir du moment où l'on définit l'ensemble des réels en partant de l'ensemble des rationnels, l'ensemble des rationnels en partant de l'ensemble des entiers (positifs et négatifs), et l'ensemble des entiers à partir de l'ensemble ℕ des entiers naturels, il fallait avant toute chose axiomatiser l'ensemble ℕ. C'est ce que firent Dedekind (1888) et Peano (1889-1891).

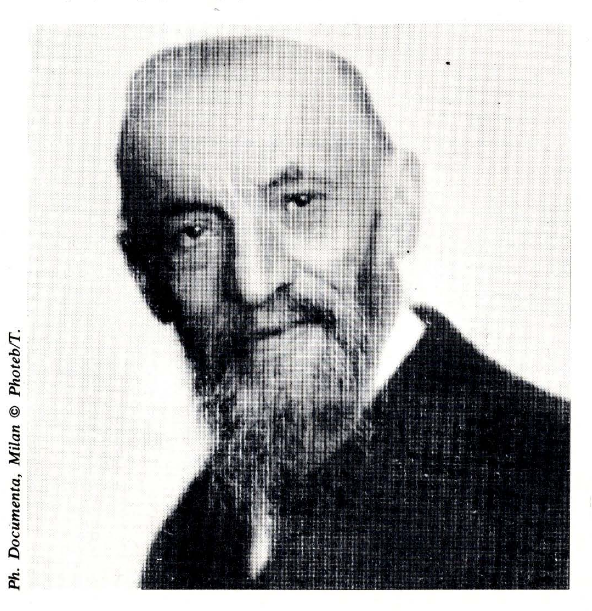
Il faut donc bien comprendre le processus qui aboutit à la définition des réels :

1 - les nombres rationnels sont définis *axiomatiquement*, par référence, en dernière analyse, à l'ensemble ℕ des entiers naturels, lui-même défini par les axiomes de Peano énoncés p. 25.

2 - les irrationnels peuvent alors être définis par diverses méthodes, faisant intervenir la notion de continuité, et fondées soit directement sur la théorie des séries (Cauchy), soit sur la notion de *coupure* dans un ensemble (Dedekind).

Nous donnons ci-contre et p. 54, la définition des nombres réels proposés par Dedekind en 1872 dans *Stetigkeit und irrationale Zahlen (Continuité et nombres irrationnels)*. Signalons qu'on peut aussi définir les réels sans se référer aux rationnels (Hilbert, 1900).

Giuseppe Peano (1858-1932). Ce mathématicien a inventé un système de signes permettant d'énoncer les propositions logiques et mathématiques, la pasigraphie (étymologiquement : « l'art de tout écrire »).



Ph. Documenta, Milan © Photeb/T.

La notion de nombre complexe.

L'histoire des nombres complexes a déjà été racontée (voir p. 12). Introduits par les algébristes italiens du XVIe siècle (et en particulier par Bombelli) pour résoudre les équations du 3e et du 4e degré à une inconnue, les nombres complexes ont embarrassé les mathématiciens jusqu'au début du XIXe siècle. Leur théorie a été faite d'une manière définitive par Gauss et par Hamilton. Voici un résumé chronologique relatif à la théorie des nombres complexes.

Dates	Événements
1579	Bombelli décrit et utilise des nombres imaginaires dans son *Algebra*.
1673	Wallis tente de déterminer une représentation géométrique des nombres complexes.
1677	Leibniz démontre que le nombre $\sqrt{a+bi} + \sqrt{a-bi}$ est réel. (Nous utilisons la notation moderne ; en fait Leibniz n'utilisait pas le symbole i, qui ne fut introduit qu'en 1750 par Euler.)
1702	Leibniz et Jean Bernoulli introduisent le concept (discuté) de logarithme d'un nombre imaginaire.
1714	L'Anglais Roger Cotes énonce la formule célèbre $ix = \lg(\cos x + i \sin x)$.
1730	De Moivre établit la formule : $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$.
1746	D'Alembert démontre que tous les nombres imaginaires sont de la forme $a + bi$.
1748	Euler démontre les formules célèbres : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ et $e^{i\pi} = -1$.
1750	Euler introduit le symbole i.
1751	Euler montre que tout nombre imaginaire possède, comme tout nombre réel, une infinité de logarithmes.
1797	Gauss découvre la représentation géométrique des nombres complexes, encore admise aujourd'hui (voir p. 56) ; toutefois il ne vulgarise pas immédiatement sa découverte.
1797	Le Danois Caspar Wessel propose une représentation géométrique des nombres complexes, analogue à celle de Gauss (qu'il ignorait) ; cette découverte passa inaperçue en son temps.
1806	J.-R. Argand établit à son tour la représentation géométrique des nombres complexes, sur des méthodes analogues à celles de Gauss et de Wessel : les nombres complexes sont représentés par les points d'un plan rapporté à deux axes *Ox* et *Oy*.
1814-1815	Polémique dans les *Annales*, publiées par le mathématicien français Gergonne, au sujet de la représentation géométrique des complexes par la méthode de Wessel.
1828	Warren, reprenant les théories géométriques précédentes, justifie les propriétés des opérations sur les nombres complexes en les ramenant à des transformations géométriques dans le plan (déplacements et similitudes).
1831	Gauss invente l'expression *nombre complexe (Théorie des résidus biquadratiques)* pour décrire les nombres de la forme $a + bi$.
1833	Théorie définitive des nombres complexes par Hamilton : un nombre complexe est un couple de réels (a, b). L'addition et la multiplication de ces êtres mathématiques se définit par : $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$; $(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$. Cette définition générale des complexes conduira Hamilton à la théorie des quaternions.

Le corps ℝ des nombres réels.

Une définition simple des réels.

Voici la définition due à Dedekind ; nous donnerons d'abord la définition de $\sqrt{2}$, puis la définition générale des réels.

● *Définition de $\sqrt{2}$.* Soit l'ensemble ℚ des entiers et fractions positifs et négatifs et du zéro. Rien ne nous interdit de les ranger en deux classes distinctes :

— 1re classe { tous les nombres négatifs ; le zéro ; les nombres rationnels positifs *a* dont le carré a^2 est plus petit que 2.

— 2e classe : tous les autres nombres.

Cette division est telle que l'on peut choisir un nombre *a* de la première classe et un nombre *b* de la deuxième classe tels que la différence $(b - a)$ soit aussi petite que l'on veut (on exprime cette condition en disant que l'*écart* des deux classes est nul). On dit qu'on a effectué une *coupure* dans l'ensemble des nombres rationnels. Il est facile de constater qu'il n'existe pas, dans la première classe, un nombre supérieur à tous les autres. En effet, supposons que ce nombre existe ; nommons-le *x*. Puisqu'il appartient à la première classe, on doit avoir :

$$x^2 < 2 . \qquad (1)$$

Par ailleurs, tout nombre $b > x$ appartiendrait à la deuxième classe (puisque *x* est supposé être le plus grand nombre de la première classe). Or il est toujours possible — c'est ce que montre le calcul prolongé à l'infini de la racine carrée de 2 — de trouver un nombre *b* tel que b^2 soit compris entre x^2 et 2, c'est-à-dire tel que $x^2 < b^2 < 2$. Il existerait alors un nombre *b* tel que son carré soit inférieur à 2, donc appartenant à la première classe, et plus grand que *x*, donc plus grand que le plus grand nombre de la première classe, ce qui conduit à une contradiction. On aboutirait de la même façon à une contradiction si l'on supposait qu'il existe un nombre de la deuxième classe qui soit plus petit que tous les autres nombres de cette classe. En résumé, la coupure que nous avons réalisée sur l'ensemble des rationnels définit un nombre *x* qui ne peut être un nombre rationnel (c'est-à-dire qui n'appartient ni à la première classe, ni à la seconde). Le nombre défini par cette coupure se note $\sqrt{2}$ (lire : « racine de 2 ») ; nous sommes certains qu'il n'est pas rationnel et nous l'appelons, par conséquent, *irrationnel.*

● *Définition générale des réels.* Divisons l'ensemble des rationnels en deux classes distinctes, non vides, telles que :

1 - tout nombre inférieur à un nombre de la première classe appartient à cette classe, qui sera appelée *classe inférieure I* ;

2 - tout nombre supérieur à un nombre de la seconde classe appartient à cette seconde classe, dite *classe supérieure S* ;

3 - il est possible de choisir deux nombres *a* et *b* appartenant respectivement à la première et à la deuxième classe, tels que la différence $(b - a)$ soit aussi petite que l'on veut.

On a ainsi effectué une *coupure* dans l'ensemble des rationnels.

— Les deux premières conditions nous montrent que tout nombre de la classe inférieure *I* est plus petit que tout nombre de la classe supérieure *S* et que, si un nombre n'est pas classé, il est supérieur à tout nombre de *I* et inférieur à tout nombre de *S*.

— En vertu de la troisième condition, il existe au plus un nombre *x* non classé. En effet, s'il y en avait deux, *x* et *y*, la différence $(b - a)$ serait supérieure à la valeur absolue $|y - x|$, quels que soient *a* et *b* choisis respectivement dans la classe inférieure et dans la classe supérieure, ce qui est en contradiction avec la troisième condition.

En résumé, si l'on pratique une coupure dans l'ensemble des rationnels en respectant les trois conditions précédentes, quatre cas peuvent se présenter.

— 1er cas : il existe un nombre rationnel non classé, α. Cela signifie que les nombres de la classe inférieure sont les nombres rationnels inférieurs à α, et que les nombres de la classe supérieure sont les nombres rationnels supérieurs à α ; α détermine la coupure, et, inversement, la coupure définit α.

— 2e cas : il n'existe aucun nombre rationnel non classé, mais il existe dans *I* un nombre α supérieur à tous les autres. Dans ce cas, les nombres de la première classe sont les nombres inférieurs à α et α



Académie des Sciences, Paris. Ph. © X-D.R.-Photeb.

Richard Dedekind (1831-1916). Elève de Gauss, il a apporté une importante contribution à la théorie des irrationnels en introduisant la notion de coupure ; il est, avec Cantor, le créateur de la théorie des ensembles.

lui-même, et les nombres de la deuxième classe sont des rationnels supérieurs à α. La coupure est déterminée par le rationnel α, et, inversement, α est défini par cette coupure.

— 3e cas : il n'existe aucun nombre rationnel non classé et il existe dans S un nombre α inférieur à tous les autres. Dans ce cas, les nombres appartenant à I sont des rationnels inférieurs à α, et les nombres appartenant à S sont des rationnels supérieurs à α et α lui-même ; ici aussi, α détermine la coupure et, inversement, la coupure définit α.

— 4e cas : il n'existe aucun nombre rationnel non classé ; en même temps il n'existe pas dans I de nombre supérieur à tous les autres, ni dans S de nombre inférieur à tous les autres. Dans ce cas on dit que la coupure définit un *nombre irrationnel* (elle ne peut pas définir un nombre rationnel, puisque tous ceux-ci sont classés) considéré comme inférieur à tous les nombres de S et comme supérieur à tous les nombres de I.

— L'ensemble des coupures ainsi définies, et qu'on nomme l'*ensemble* $\mathbb{R}$, est l'*ensemble des nombres réels* ; il possède la structure de *corps commutatif.*

Axiomes des nombres réels.

Les propriétés des nombres réels découlent de leur définition. Il est commode toutefois de les présenter comme les conséquences d'un système d'axiomes explicitant cette définition qui sous-entend :

1 - que l'ensemble $\mathbb{R}$ a une structure de *corps commutatif*, comme l'ensemble $\mathbb{Q}$ dont on est parti ;

2 - qu'il est muni d'une *relation d'ordre* $x \leq y$ pour tout couple (x, y) de nombres réels ;

3 - qu'il s'agit d'un ensemble continu (ce qui permet de définir les irrationnels comme faisant partie des réels).

● *Axiomes de la structure de corps commutatif.* Cette structure a été définie p. 43 : un corps commutatif est un ensemble muni de deux lois de composition interne (+ et ×), associatives, commutatives et doublement distributives, admettant l'une et l'autre un élément neutre (respectivement : 0 et 1) et telles que chaque élément $x \in \mathbb{R}$ admet un symétrique dans $\mathbb{R}$ pour ces opérations ($-x$ pour l'addirion et x^{-1} pour la multiplication). Ces axiomes s'écrivent ainsi, en appelant x, y, z trois réels quelconques :

$$\left\{\begin{array}{lll} 1 - & x+y & = y+x\,; \\ 2 - & (x+y)+z & = x+(y+z)\,; \\ 3 - & x+0 & = 0+x = x\,; \\ 4 - & x+(-x) & = 0\,; \\ 5 - & xy & = yx\,; \\ 6 - & (xy)z & = x(yz)\,; \\ 7 - & 1x & = x1 = x\,; \\ 8 - & x(x^{-1}) & = 1, \text{ pour tout } x \neq 0\,; \\ 9 - & x(y+z) & = xy + xz\,. \end{array}\right. \qquad (2)$$

● *Relation d'ordre.* Pour tout couple (x, y) de réels il existe une relation d'ordre notée :

$$x \leq y \qquad (3)$$

(la relation $y \geq x$ est synonyme de la relation $x \leq y$). Cette relation possède les propriétés suivantes, qui sont des axiomes d'ordre :

$$\left\{\begin{array}{l} 10 - \text{pour tout } x,\ x \leq x\,; \\ 11 - x \leq y \text{ et } y \leq x \text{ implique } x = y\,; \\ 12 - x \leq y \text{ et } y \leq z \text{ implique } x \leq z\,; \\ 13 - 0 \leq x \text{ et } 0 \leq y \text{ implique } 0 \leq xy\,. \end{array}\right. \qquad (4)$$

En d'autres termes, l'ensemble $\mathbb{R}$ est un *ensemble totalement ordonné* (voir la définition p. 17).

● *Axiome de la borne supérieure.* Tout sous-ensemble non vide A, appartenant à $\mathbb{R}$ et qui admet un majorant, possède une borne supérieure. Rappelons la définition du majorant et de la borne supérieure pour une relation d'ordre $x \leq y$:

— Si pour tout $x \in A$ il existe $y \in \mathbb{R}$, tel que $x \leq y$, on dit que A est *majoré* par l'élément y, ou encore que y est un majorant de A ; on peut écrire conventionnellement :

$$A \leq y\,. \qquad (5)$$

Par exemple la partie $A = \{0, ..., 10\}$ de l'ensemble des réels contient tous les réels compris entre 0 et 10, y compris 0 et 10 eux-mêmes. Tout réel y supérieur ou égal à 10 est un majorant pour A, eu égard à la relation d'ordre « ≤ ».

— S'il existe un majorant y_0 tel que, pour tout autre majorant y, on ait $y_0 \leq y$, alors y_0 est appelé la *borne supérieure* de l'ensemble A (dans l'exemple précédent, $y_0 = 10$).

L'axiome de borne supérieure a pour conséquence deux propriétés très importantes connues sous le nom d'*axiome d'Archimède* et d'*axiome de Cantor.* En fait, dans la mesure où ces deux propositions sont des conséquences de l'axiome de la borne supérieure, ils n'ont pas droit à l'appellation « axiome ». Toutefois, très souvent, ils sont posés comme des axiomes ; alors l'axiome de la borne supérieure devient le *théorème* de la borne supérieure. L'intérêt capital de ces propositions est qu'elles définissent la continuité de l'ordre numérique des réels et qu'elles permettent d'assimiler l'ensemble des réels à l'ensemble des points d'une droite.

Conséquences des axiomes précédents.

● *Les axiomes d'addition et de multiplication* (nos 1 à 9 ci-dessus) permettent de justifier :

1 - les règles opératoires et la méthode de résolution des équations $a + x = b$ et $ax = b$ ($b \neq 0$), la première admettant la solution unique $x = b - a$ et la seconde la solution unique $x = b/a$;

2 - la notation exponentielle et la règle $x^m\, x^n = x^{m+n}$ pour m et n entiers (c'est-à-dire appartenant à $\mathbb{Z}$) ;

3 - la règle d'absorption : si un produit de deux réels est nul, l'un au moins des facteurs est nul ;

4 - toutes les règles opératoires sur les polynômes de l'algèbre élémentaire.

● *Les axiomes de la relation d'ordre (nos 10 à 13)* ont pour conséquence les règles de transformation des inéquations (on peut faire passer un terme d'une inégalité dans l'autre en changeant son signe ; on peut multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif sans changer le sens de l'inégalité ; on peut multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif à condition de changer le sens de cette inégalité ; etc.).

● *L'existence d'une borne supérieure pour toute partie non vide majorée de* $\mathbb{R}$ a de nombreuses conséquences très importantes, dont voici les principales.

— Pour tout $x > 0$ réel et pour tout $n > 0$ entier, il existe un réel $y > 0$ et un seul tel que $y^n = x$. Ce nombre est noté $\sqrt[n]{x}$ (lire : « racine n-ième de x »).

— Étant donné deux réels positifs x et y, on a :

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[mn]{x}\,. \qquad (6)$$

— « Axiome » d'Archimède : si $x > 0$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, alors il existe un multiple entier nx du nombre x tel que :

$$(n-1)\,x \leq y < nx\,. \qquad (7)$$

Ainsi énoncé, l'axiome d'Archimède concerne la loi de composition additive des réels. Pour la multiplication il s'énonce de la manière suivante : si $x > 1$ et $y > 0$, alors il existe un exposant $n \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$x^{n-1} \leq y, \quad x^n > y\,. \qquad (8)$$

Parmi les conséquences de l'axiome d'Archimède on peut retenir les suivantes :

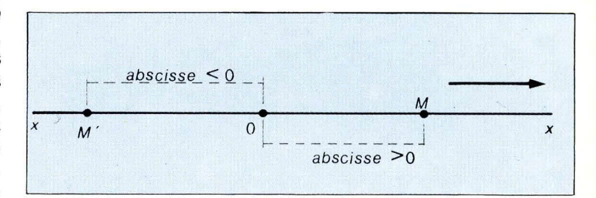
1 - tout intervalle (a, b) de nombres réels contient au moins un nombre rationnel ;

2 - on peut noter un nombre réel à l'aide d'un ensemble fini de symboles (pratiquement, on utilise le système décimal de numération, qui utilise les dix symboles 0, 1, 2, ..., 9).

— Axiome de Cantor (appelé aussi *principe des intervalles fermés emboîtés*). Considérons dans l'ensemble des réels un ensemble d'intervalles noté I_1, I_2, ... tel que, pour tout couple d'intervalles I_m *et* I_n, l'un soit inclus dans l'autre, par exemple $I_m \subset I_n$ ou $I_n \subset I_m$. Un tel ensemble d'intervalles est appelé *système d'intervalles emboîtés.* L'axiome de Cantor s'énonce ainsi : pour tout système d'intervalles fermés emboîtés $[a, b]$, il existe au moins un nombre réel appartenant à tous les intervalles du système. On déduit de ce principe un certain nombre de conséquences, en particulier le théorème suivant : l'intersection d'un système d'intervalles fermés emboîtés est formée d'un seul nombre si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il y a dans le système un intervalle $[a, b]$ tel que $b - a < \varepsilon$.

● *La droite numérique.* Considérons un axe $x'\,x$ défini par son origine, O, et orienté dans un certain sens (par exemple de la gauche vers la droite). On appelle *abscisse* d'un point M la mesure de la longueur OM avec une certaine unité, affectée du signe « + » si le point M est à droite de O et du signe « − » s'il est à gauche de O (avec la convention de sens précédemment indiquée).

Pour interpréter géométriquement la définition de Dedekind, considérons l'ensemble des points de la



Abscisse d'un point sur une droite.

droite $x'\,x$ et pratiquons une coupure dans cet ensemble en choisissant arbitrairement un point a de cette droite. En s'aidant d'une figure, le lecteur constatera que les différents cas possibles envisagés dans la définition de Dedekind peuvent être retrouvés, à condition de remplacer l'expression « ensemble des réels » par le terme « droite $x'\,x$ » et les nombres réels par des points. Il est d'ailleurs classique, en mathématiques d'appeler l'ensemble $\mathbb{R}$ de tous les nombres réels *droite numérique*, et les nombres réels eux-mêmes les *points* de cette droite.

Nous pouvons retrouver une interprétation géométrique de l'axiome d'Archimède et de l'axiome de Cantor.

— *Axiome d'Archimède* : soit deux points a et b sur la demi-droite Ox, avec $Oa < Ob$. Construisons à partir de O, sur la demi-droite Ox, les segments $Oa = aa_1 = a_1\,a_2 = a_2\,a_3 = \cdots = a_{n-1}\,a_n$, tels que l'un quelconque des points a_1, a_2, ... soit situé entre deux autres points analogues (par exemple a_2 entre a_1 et a_3, a_4 entre a_3 et a_5, a_i entre a_{i-1} et a_{i+1}). L'axiome d'Archimède consiste à affirmer qu'il existe un point a_n tel que b soit entre O et a_n (c'est ce qu'on appelle un *ordre archimédien*).

— *Axiome de Cantor* : étant donné un nombre réel irrationnel défini par une coupure quelconque sur l'ensemble des rationnels, on admet qu'il existe un point a sur la droite $x'\,x$ ayant pour abscisse ce nombre.

Nombres algébriques et nombres transcendants.

● *Théorème de Cantor (1874).* Nous avons

défini, p. 19, un ensemble dénombrable comme un ensemble équipotent à l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers naturels, c'est-à-dire comme un ensemble $E = \{ a, b, ... \}$ dont chaque élément peut être mis en correspondance biunivoque avec les éléments de l'ensemble $\mathbb{N}^* = \{ 1, 2, 3, ... \}$. Autrement dit, si l'on associe l'élément a au nombre 1, l'élément b au nombre 2, etc., alors :

1 - il est possible de numéroter tous les éléments de l'ensemble E à l'aide des nombres de l'ensemble $\mathbb{N}^*$;

2 - deux éléments distincts de E portent deux « numéros » différents ;

3 - tout nombre appartenant à $\mathbb{N}^*$ est appliqué sur un élément appartenant à E ;

4 - deux nombres distincts sont appliqués à deux éléments distincts.

Si un ensemble ne possède pas ces propriétés d'équipotence à $\mathbb{N}^*$ il est dit *non-dénombrable*.

Le théorème démontré par Cantor en 1874 s'énonce de la manière suivante :

> *« L'ensemble de tous les points (= de tous les nombres réels) de l'intervalle [0, 1] = $0 \leqslant x \leqslant 1$ est non-dénombrable. »*

On démontre ce théorème à l'aide du principe des intervalles emboîtés (voir p. 54). Voici l'articulation de cette démonstration.

1 - Supposons que l'ensemble des réels x tels que $0 \leqslant x \leqslant 1$ soit dénombrable. Cela signifie qu'on peut associer les entiers $\mathbb{N}^*$ à chaque réel x compris entre 0 et 1, en appelant $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ ces nombres réels. Si l'ensemble [0, 1] est dénombrable, la suite $x_1, x_2, ...$ décrit *tous* les nombres de l'intervalle [0, 1]. Nous allons démontrer qu'il existe au moins un nombre ξ (c'est la lettre grecque *ksi*) de l'intervalle qui est différent de tous les x_n de la suite considérée, donc que cette suite ne décrit pas tout l'intervalle [0, 1], donc que cet intervalle est non-dénombrable.

2 - Partageons l'intervalle [0, 1] en trois intervalles égaux [0, 1/3], [1/3, 2/3], [2/3, 1]. Les nombres 1/3 et 2/3 sont des nombres frontières, communs l'un aux deux premiers intervalles et l'autre aux deux derniers intervalles.

3 - Le nombre x_1 — c'est-à-dire le premier terme de la suite dénombrable — ne peut appartenir à la fois aux trois intervalles ; on peut donc choisir un intervalle, que nous appellerons I_1, qui ne contient pas x_1 (ni à l'intérieur, ni sur la frontière), c'est-à-dire, en notation ensembliste, tel que $x_1 \notin I_1$.

4 - Partageons l'intervalle I_1 en trois intervalles égaux comme précédemment ; pour la même raison que précédemment, il y a un intervalle I_2 qui ne contient pas le nombre x_2 ; et ainsi de suite : l'intervalle I_3, partie de I_2, ne contient pas x_3 ; ... l'intervalle I_{n+1}, qui est une des trois parties égales de l'intervalle I_n, ne contient pas x_{n+1}, etc.

5 - Nous sommes donc en présence d'une suite infinie d'intervalles fermés $I_1, I_2, ..., I_{n+1}, ...$ emboîtés les uns dans les autres. D'après l'axiome de Cantor, il existe un nombre ξ qui appartient à tous les intervalles du système. En vertu de ce qu'on vient de démontrer, ξ n'est égal ni à x_1, ni à x_2, ..., ni à x_n, ... Donc il existe un nombre réel ξ qui ne fait pas partie de la suite dénombrable $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ (c'est-à-dire qui n'est pas affecté d'un « numéro » appartenant à $\mathbb{N}^*$) et qui est compris dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$. Cela prouve que cet intervalle n'est pas dénombrable.

● *Composition de l'ensemble* [0, 1]. Convenons d'appeler *rationnels* les nombres $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ dans l'ensemble A et dénombrables, et *irrationnels* les nombres tels que ξ, dont l'ensemble sera noté B. Nous pouvons écrire que l'ensemble des nombres [0, 1] est l'union des ensembles A et B, c'est-à-dire que :

$$[0, 1] = A \cup B. \tag{9}$$

Cette relation nous montre que les irrationnels compris entre 0 et 1 constituent un ensemble non-dénombrable. En effet, si B était dénombrable, l'ensemble [0, 1] serait la réunion de deux ensembles dénombrables A et B, donc serait lui-même dénombrable (voir p. 19, théorème n° 2) ; or nous avons montré que [0, 1] est non-dénombrable : donc l'ensemble B lui-même est non-dénombrable. Considérons maintenant cet ensemble B des irrationnels compris entre 0 et 1. Il contient notamment des nombres qui sont racines d'équations de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

etc., ou, d'une manière générale, de la forme $P(x) = 0$, $P(x)$ désignant un polynôme en x à coefficients rationnels (voir ci-après p. 72). Par exemple B contient le nombre $\sqrt{2}/2$, qui est racine de l'équation du 2[e] degré $2x^2 - 1 = 0$; etc. Or on démontre en algèbre :

1 - que l'ensemble $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... des polynômes en x est dénombrable ;

2 - que tout polynôme $P(x)$ de degré n possède n racines ; donc l'ensemble des n racines de tous les polynômes $P(x)$ est un ensemble dénombrable que nous nommerons P'.

Puisque B est non dénombrable, il ne peut se réduire à B' : il faut donc supposer que B est la réunion de l'ensemble dénombrable B' et d'un ensemble B'' non dénombrable :

$$B = B' \cup B''. \tag{10}$$

Les réels qui peuvent être racines d'une équation $P(x) = 0$ sont dits *algébriques* (voir p. 31) ; donc l'ensemble B des irrationnels compris entre 0 et 1 contient d'une part des nombres algébriques (ensemble B') et d'autre part des nombres appartenant à l'ensemble non dénombrable B'' et qui sont non algébriques (c'est-à-dire qui ne sont pas les racines d'aucune équation de la forme $P(x) = 0$). Ces nombres ont été nommés *transcendants*.

● *Comparaisons.* Un ensemble non dénombrable est plus étendu qu'un ensemble dénombrable puisqu'il contient :

1 - tous les éléments auxquels on peut associer un entier naturel ;

2 - d'autres éléments.

Donc il y a beaucoup plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels, et, parmi les irrationnels, il y a beaucoup plus de nombres transcendants que de nombres algébriques.

D'autre part, tout ensemble équipotent à l'intervalle [0, 1] est appelé *ensemble ayant la puissance du continu*. L'ensemble des réels — c'est-à-dire l'ensemble des points de la droite numérique $-\infty < x < +\infty$ est équipotent à l'intervalle [0, 1] : il a donc la puissance du continu.

Le corps ℂ des nombres complexes.

Construction du corps ℂ des complexes.

Considérons l'ensemble, $\mathbb{R}^2$, des couples ordonnés (a, b) de deux nombres réels ; nous savons déjà que cet ensemble est un espace vectoriel à deux dimensions. Cet ensemble, tel qu'il a été présenté p. 48, n'a pas la structure de corps, puisque nous n'y avons défini qu'une seule opération interne, l'addition de deux vecteurs ; la seconde opération (homothétie) n'est pas une opération interne, mais une opération externe. Que manque-t-il à l'espace $\mathbb{R}^2$ pour qu'il ait une structure de corps ? Très peu de chose en vérité : il faut définir une nouvelle *loi de composition interne*, que nous baptiserons *multiplication*. $\mathbb{R}^2$ étant alors doté de deux opérations internes, l'addition (définie dans le cadre de la structure d'espace vectoriel) et la multiplication (à définir), nous nous assurerons que les opérations inverses sont toujours possibles, nous préciserons la nature de l'élément neutre multiplicatif et notre espace vectoriel aura une *structure de corps*. Nous l'appellerons le *corps des complexes* et nous le noterons par la lettre ℂ.

Nous demandons maintenant à notre lecteur, s'il est profane en mathématiques, de s'armer de courage. Il nous aurait été possible de lui présenter le corps des complexes en partant de considérations géométriques ; cela lui aurait soulagé l'imagination. Mais, en réalité, il est peu rigoureux de procéder ainsi en mathématiques : il faut commencer par une définition très générale, abstraite, et passer ensuite seulement à la représentation géométrique. Donc, pas de figures, pas de schémas, pas d'expériences dans ce paragraphe : place au raisonnement abstrait, qui n'est difficile qu'en apparence, car, en définitive, il ne s'agit que de règles de multiplication.

● *Premier temps : simplifions le problème.* Nous avons dit p. 49 qu'on pouvait choisir, dans un ensemble de vecteurs, deux vecteurs (dans le cadre d'un espace à deux dimensions) à partir desquels on pouvait engendrer tous les autres, ces deux vecteurs formant une *base* pour l'ensemble considéré. Choisissons comme base les deux vecteurs : (1, 0) et (0, 1). Pour simplifier l'écriture, désignons le premier de ces vecteurs par $\boldsymbol{e}$ et le second par $\boldsymbol{i}$. Un vecteur quelconque de l'espace $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{OM} = (a, b)$, s'écrit :

$$\boldsymbol{OM} = (a, b) = a\boldsymbol{e} + b\boldsymbol{i}, \tag{1}$$

a et b étant des nombres réels.

● *Deuxième temps : définition de l'égalité de deux vecteurs dans* $\mathbb{R}^2$. Si $(a, b) = (a', b')$, cela revient à écrire :

$$a\boldsymbol{e} + b\boldsymbol{i} = a'\boldsymbol{e} + b'\boldsymbol{i}, \tag{2}$$

c'est-à-dire :

$$a = a' \quad \text{et} \quad b = b'. \tag{3}$$

● *Troisième temps : définition de l'addition dans* $\mathbb{R}^2$. La somme de deux éléments de $\mathbb{R}^2$ se fait selon la méthode générale de l'addition des vecteurs :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'); \tag{4}$$

donc :

$$(a\boldsymbol{e} + b\boldsymbol{i}) + (a'\boldsymbol{e} + b'\boldsymbol{i}) = (a + a')\boldsymbol{e} + (b + b')\boldsymbol{i}. \tag{5}$$

● *Quatrième temps : définition du produit dans le corps* ℂ. Voici maintenant l'opération qui, ajoutée à la précédente, confère à l'ensemble $\mathbb{R}^2$ la structure de corps, à savoir : la multiplication de deux éléments (a, b) et (a', b') de cet ensemble.

Comme les vecteurs $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{i}$ constituent la base de l'espace vectoriel étudié, il faut que nous établissions une table de multiplication pour ces deux éléments ; le reste ne sera qu'une question de calcul. Établissons donc *arbitrairement* (c'est un arbitraire très relatif, car il est motivé par notre intention de définir les nombres

Les bornes kilométriques des autoroutes indiquent, de kilomètre en kilomètre, l'abscisse curviligne (= mesurée sur une ligne courbe) du point où est plantée la borne.



Ph. Jeanbor © Photeb/T

complexes !) la table de multiplication suivante :

Table des $\vec{e}$	**Table des $\vec{i}$**
$\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}$,	$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{e} = \boldsymbol{i}$,
$\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}$,	$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{e}$,

qu'on peut aussi écrire sous la forme suivante :

Opération « × »	***e***	***i***
e	***e***	***i***
i	***i***	$-\boldsymbol{e}$

On constate, en lisant ce tableau, que l'opération est commutative ($\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{e}$) et associative, puisque (la vérification est immédiate) :

$$\boldsymbol{e} \times (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{i}) \times \boldsymbol{e} . \qquad (6)$$

D'autre part, rien ne nous interdit d'imposer à cette loi d'être distributive par rapport à l'addition des réels et d'être compatible par rapport à cette loi.

Une fois toutes ces règles établies, l'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni des deux opérations considérées, que nous appellerons *addition des vecteurs* et *multiplication des vecteurs*, possède la structure de corps.

Cela posé, pour multiplier le vecteur $(a, b) = a\boldsymbol{e} + b\boldsymbol{i}$ par le vecteur $(a', b') = a'\boldsymbol{e} + b'\boldsymbol{i}$, on appliquera les règles du calcul algébrique élémentaire :

$$(a, b) \times (a'\ b') = (a\boldsymbol{e} + b\boldsymbol{i})\,(a'\boldsymbol{e} + b'\boldsymbol{i}) = aa'\,\boldsymbol{ee} + bb'\,\boldsymbol{ii} + ab'\,\boldsymbol{ei} + ba'\,\boldsymbol{ei} . \qquad (7)$$

La table de multiplication précédente donne $\boldsymbol{ee} = \boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{ii} = -\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{ei} = \boldsymbol{ie} = \boldsymbol{i}$, donc (7) s'écrit :

$$(a, b) \times (a'\ b') = aa'\boldsymbol{e} - bb'\,\boldsymbol{e} + ab'\boldsymbol{i} + ba'\boldsymbol{i} \qquad (8)$$

soit, en groupant les termes en $\boldsymbol{e}$ et en $\boldsymbol{i}$:

$$(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb')\,\boldsymbol{e} + (ab' + ba')\,\boldsymbol{i} . \qquad (9)$$

● *Cinquième temps : propriétés du produit.* Il est facile de vérifier que le produit de deux vecteurs (a, b) et (a', b') quelconques, effectué selon les règles ci-dessus, possède les propriétés suivantes :

— il est commutatif (propriété qui découle de la commutativité du produit des deux vecteurs de la base) ;

— il est associatif ; considérons en effet le produit $(a, b)\,(a', b')\,(a'', b'')$; pour simplifier l'écriture, comme il n'y a aucune confusion possible, nous avons abandonné le signe « × » ; il s'écrit :

$$(a\boldsymbol{e} + b\boldsymbol{i})\,(a'\boldsymbol{e} + b'\boldsymbol{i})\,(a''\boldsymbol{e} + b''\boldsymbol{i}) . \qquad (10)$$

Quelle que soit la marche de nos opérations, nous serons amenés dans tous les cas à former le produit d'un élément de chaque facteur par tous les autres. Chacun de ces produits comprendra une partie réelle et une partie vectorielle. La partie vectorielle sera toujours composée des vecteurs $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{i}$, et de ces vecteurs seulement ; or nous savons que, pour les deux vecteurs de la base, le produit est associatif. D'autre part, nous savons aussi que, pour des nombres réels, le produit est associatif. Par conséquent, la multiplication de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ est associative.

— La multiplication admet pour élément neutre le vecteur $\boldsymbol{e}$; on le constate immédiatement en effectuant le produit :

$$\boldsymbol{e}\,(a, b) = \boldsymbol{e}(a\boldsymbol{e} + b\boldsymbol{i}) ; \qquad (11)$$

on obtient en effet :

$$\boldsymbol{e}\,(a\boldsymbol{e} + b\boldsymbol{i}) = a\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e} + b\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{e} = a\boldsymbol{e} + b\boldsymbol{i} \qquad (12)$$

(puisque $\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{e} = \boldsymbol{i}$).

— Il existe une opération inverse pour la multiplication. Le raisonnement est ici un peu plus compliqué (c'est-à-dire un peu plus long), mais il n'est pas plus difficile ; tout se ramène, finalement, à l'application de règles de calcul connues et à la connaissance de la table de multiplication pour les $\boldsymbol{e}$ et les $\boldsymbol{i}$.

Soit (a, b) un élément de $\mathbb{R}^2$; nous supposerons que a et b ne sont pas simultanément égaux à 0.

On cherche l'élément (a', b') tel que :

$$(a\boldsymbol{e} + b\boldsymbol{i})\,(a'\boldsymbol{e} + b'\boldsymbol{i}) = (aa' - bb')\,\boldsymbol{e} + (ab' + ba')\,\boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}, \qquad (13)$$

d'où le système :

$$aa' - bb' = 1\,, \quad ab' + ba' = 0 \qquad (14)$$

qui admet la seule solution :

$$a' = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad b' = \frac{-b}{a^2 + b^2} \qquad (15)$$

(puisque a et b ne sont pas tous deux nuls), d'où :

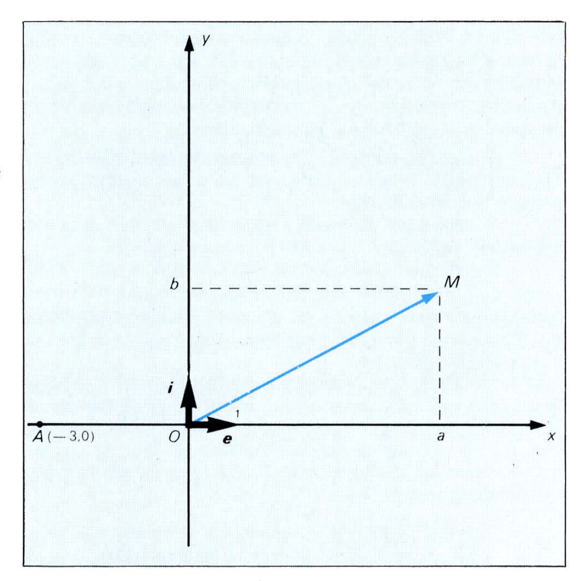
$$(a\boldsymbol{e} + b\boldsymbol{i})^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2}\,\boldsymbol{e} - \frac{b}{a^2 + b^2}\,\boldsymbol{i} . \qquad (16)$$

En résumé, les éléments (a, b) autres que $(0, 0)$ forment un groupe commutatif pour la multiplication.

L'aboutissement.

L'ensemble $\mathbb{R}^2$, dont les éléments sont de la forme (a, b), muni de l'addition et de la multiplication, est un corps. On l'appelle le *corps des nombres complexes*, ℂ.

● *Une représentation graphique simple.* Traçons deux axes de coordonnées, Ox et Oy, rectangulaires. Tout vecteur (a, b) a pour image un *vecteur géométrique* $\boldsymbol{OM}$ de composantes a et b ; a s'appelle souvent l'abscisse du point M et b l'ordonnée de ce point dans le système d'axes considéré. Le point M sera l'image du nombre complexe $(a, b) = a\boldsymbol{e} + b\boldsymbol{i}$.



***Le point** M**, de coordonnées** (a, b) **est l'image du nombre complexe** z = a + bi ; z **est l'affixe du point** M.*

● *Correspondance avec l'ensemble,* ℝ, *des réels.* Un élément de ℝ, c'est-à-dire un nombre réel, se note a. Pour en donner une image, dans le système précédent, nous n'avons pas besoin de deux axes de coordonnées ; l'axe Ox suffit : nous dirons que tous ses points représentent des réels et que, inversement, à tout réel correspond un des points de Ox. Le nombre -3, par exemple, se trouve représenté par le point A situé à 3 unités à gauche de l'origine O (voir figure ci-dessus). Considérons maintenant le complexe $(-3, 0)$. Son image étant A, elle se confond avec celle du réel -3. Sans entrer dans des considérations axiomatiques difficiles, on voit que tout réel a se confond avec tout complexe $(a, 0)$ et inversement. On exprime cela en disant que le sous-corps de ℂ composé des éléments $(a, 0)$ est *isomorphe* à l'ensemble ℝ.

● *Convention supplémentaire.* On peut introduire une convention de notation nouvelle. Le réel a possède la même image que le complexe $(a, 0) = (a, \boldsymbol{e})$; convenons d'écrire :

$$a = a\boldsymbol{e}\,, \qquad (17)$$

ce qui revient à poser que le vecteur $\boldsymbol{e}$ est le complexe $(1, 0)$, autrement dit qu'il est assimilable à 1. Avec cette convention, l'élément $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}^2 = -\boldsymbol{e}$ se note -1.

Soit alors un complexe $(a, b) = a\boldsymbol{e} + b\boldsymbol{i}$. Il comprend deux parties :

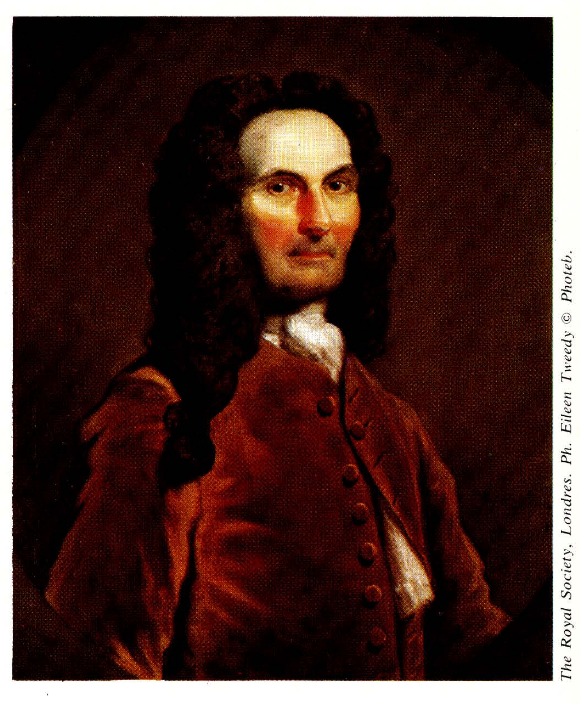
— $a\boldsymbol{e}$ peut être noté a, grâce à la convention précédente : c'est ce qu'on appelle sa *partie réelle*.

— Dans la deuxième partie figure le complexe $\boldsymbol{i}$, tel que $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{e} = (-1, 0)$. $\boldsymbol{i}$ est un vecteur $(0, 1)$. Donc $b\boldsymbol{i} = b(0, 1)$. Si l'on a convenu que Ox est l'image de l'ensemble ℝ, il est évident que l'image de $b(0, 1)$, vecteur homothétique du vecteur $\boldsymbol{i}$, ne correspond pas à un élément réel, puisque cette image est sur l'axe Oy. L'élément $b\boldsymbol{i}$ est appelé un élément *imaginaire* et b est la *partie imaginaire* de (a, b).

Finalement un complexe (a, b), avec toutes ces conventions, sera noté :

$$z = a + b\mathrm{i} \qquad (18)$$

(attention : z ne désigne pas un réel). Il n'est pas gênant d'écrire i et non pas $\boldsymbol{i}$ (l'italique grasse $\boldsymbol{i}$ rappelait que $\boldsymbol{i}$ est un vecteur), à la condition de convenir que la lettre i ne représentera jamais un nombre réel.



Abraham de Moivre (1667-1754) : son nom est lié à la représentation trigonométrique des nombres complexes (formule de Moivre), mais aussi à la théorie des probabilités, dont il fut l'un des initiateurs.

● *En résumé :*

— On appelle nombre complexe un être mathématique désigné par la lettre z telle que :

$$z = a + b\mathrm{i}\,, \qquad (19)$$

les nombres a et b étant des réels, i étant *non pas un nombre*, mais un *symbole* conventionnel tel que $\mathrm{i} \times \mathrm{i} = \mathrm{i}^2 = -1$; a s'appelle la partie réelle du nombre complexe, b la partie imaginaire. Un nombre dans lequel $a = 0$ se réduit à $z = b\mathrm{i}$; il est appelé nombre imaginaire pur ; un nombre dans lequel $b = 0$ se réduit à sa partie réelle ; c'est *un nombre réel*. Le nombre $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$ est dit *nombre complexe conjugué* de $z = a + b\mathrm{i}$; on a $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

— Les règles de calcul sont celles du calcul algébrique ordinaire, avec la convention $\mathrm{i}^2 = -1$.

Égalité	$z = z'$	$a = a'$, $b = b'$
Addition	$z + z'$	$(a + a') + (b + b')\,\mathrm{i} = A + B\mathrm{i}$
Multiplication	zz'	$(aa' - bb') + (ab' + ba')\,\mathrm{i} = A + B\mathrm{i}$
Division	$z : z' = zz'^{-1}$	$\frac{z}{z'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}\,\mathrm{i}$

Représentation trigonométrique des nombres complexes.

● *Image d'un nombre complexe.* Rapportons tous les points M d'un plan à deux axes de coordonnées Ox et Oy. Convenons de faire correspondre à tout point M de coordonnées a et b un nombre complexe $z = a + b\mathrm{i}$; inversement, à tout nombre $z = a + b\mathrm{i}$ correspondra un point M de coordonnées a et b. M est appelé l'*image* du nombre complexe z, et z est l'*affixe* du point M.

● *Module et argument.* Les relations élémentaires de trigonométrie (voir p. 148) et les propriétés du triangle rectangle permettent d'écrire, en appelant ϱ (lettre grecque « *rō* ») la grandeur géométrique du vecteur $\boldsymbol{OM}$, et θ (lettre grecque « *thêta* ») l'angle (mesuré en radians) de l'axe Ox avec le vecteur $\boldsymbol{OM}$:

$$a = \rho \cos\theta\,, \qquad b = \rho \sin\theta\,, \qquad (20)$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \qquad (21)$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,, \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} . \qquad (22)$$

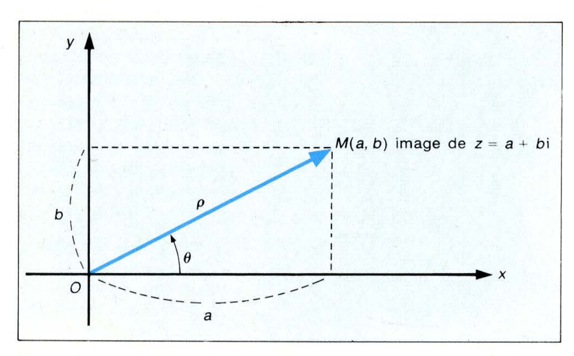
ρ s'appelle le *module* de z, il est égal à $\sqrt{z\bar{z}}$; θ est l'*argument* du nombre complexe z. On écrit :

$$\rho = |z| \quad \text{et} \quad \theta = \arg z\,. \qquad (23)$$

Ainsi, le nombre $z = a + bi$ peut s'écrire sous la *forme trigonométrique*

$$z = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\,. \qquad (24)$$

Voir p. 140 la récapitulation des règles de calcul sur les complexes.



Représentation trigonométrique d'un nombre complexe. Le plan défini par les axes Ox et Oy est souvent appelé « plan d'Argand-Cauchy ».

Image de la somme et du produit de deux nombres complexes.

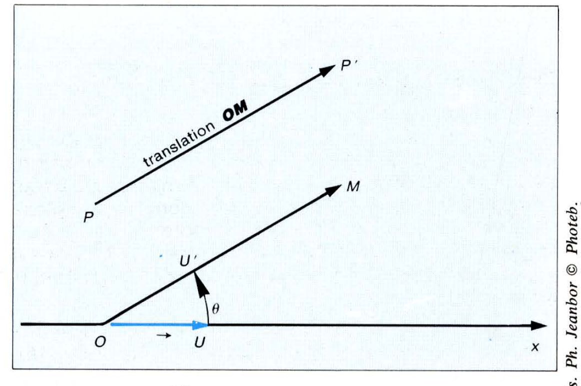
● *Observations préliminaires.* Soit un vecteur ***OM*** quelconque dans un plan. Nous pouvons le considérer comme le « signe » d'un déplacement qui ferait passer du point O au point M et qu'on appelle une *translation.* Tout point P du plan qui subit la translation ***OM*** est déplacé en un point P' tel que le vecteur ***PP'*** soit parallèle au vecteur ***OM***, de même sens que celui-ci et égal en grandeur. On dit aussi que le vecteur ***OM*** est un *opérateur de translation*, ou qu'il *opère* une translation.

Supposons qu'on fasse passer par O un axe arbitraire Ox sur lequel on a choisi une unité de longueur, et désignons par ***OU*** = ***u*** un vecteur d'origine O, porté par Ox, dans le sens de Ox et de grandeur égale à l'unité. Appelons ρ le module du vecteur ***OM***. On passe de U à M par une double opération :

1 - en faisant effectuer au vecteur ***OU*** une rotation de centre O et d'angle θ dans le sens indiqué sur la figure ci-dessous, ce qui l'applique en ***OU'*** sur ***OM*** ;

2 - en *multipliant* le vecteur ***OU'***, dont la grandeur est égale à 1, par le nombre ρ qui mesure la grandeur géométrique du vecteur ***OM***. Nous avons dit p. 48 que cette opération s'appelle une *homothétie* de rapport ρ.

Les deux opérations (rotation puis homothétie) forment ce qu'on appelle en géométrie une *similitude*, caractérisée par son centre O, l'angle θ et le rapport ρ. Ainsi le vecteur ***OM*** peut-il être appelé l'*opérateur d'une similitude* (O, θ, ρ) sur le vecteur ***u***.



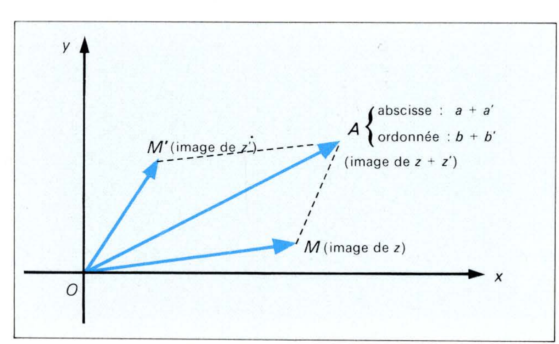
Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ ***opère la similitude qui fait passer du point U au point M.***

● *Image d'une somme.* Soit z un complexe, dont l'image est M ; le vecteur ***OM*** associé à z est un opérateur de translation qui fait passer du point O au point M. Ajouter z' à z c'est faire intervenir un deuxième vecteur ***OM'***, c'est-à-dire opérer sur le point M une translation définie par ***OM'*** (nous appellerons cela *une z'-translation*). On voit sur la figure ci-dessous que le point M est ainsi transporté en A, tel que : ***OA*** = ***OM*** + ***OM'*** = diagonale du parallélogramme construit sur ***OM*** et ***OM'***. Il est facile de vérifier que l'on a, algébriquement :

$$\begin{cases} \text{abscisse de } A = a + a'\,, \\ \text{ordonnée de } A = b + b'\,; \end{cases} \qquad (25)$$

donc : A est l'image de $z + z' = (a + a') + (b + b')\,i$.

Le résultat final ne dépend pas de l'ordre dans lequel on fait les translations ; on passe en effet de O à A soit par la translation ***OM*** suivie de la translation ***MA*** = ***OM'***, soit par la translation ***OM'*** suivie de la translation ***M' A*** = ***OM***.



La somme de deux nombres complexes est une composition de translations.

● *Image d'un produit.*

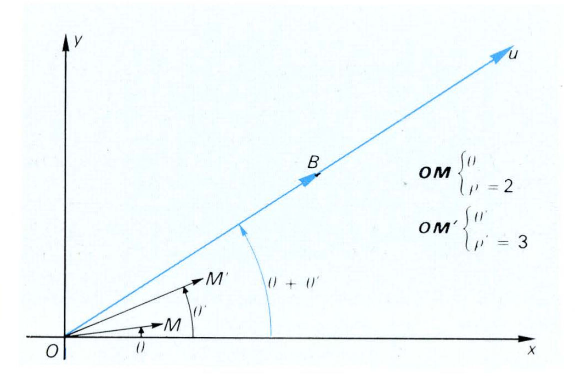
— *Le produit* $1 \times z = z$. Soient le complexe $z = a + bi$ et le nombre 1. Ces deux nombres ont respectivement pour image le vecteur ***OM*** et le vecteur ***OU*** portés par l'axe Ox. Si l'on considère ***OM*** comme un opérateur de similitude, appliquer cette opération au vecteur ***OU***, c'est faire la similitude (0, θ, ρ), c'est-à-dire passer du point U au point M, ou du nombre 1 au nombre $1 \times z = z$. Multiplier 1 par z, c'est donc appliquer au point U une z-similitude.

— *Le produit* $z'\,z$. De même, multiplier z' par z, c'est appliquer au point M', image de z', la z-similitude. Remarquons que l'opération est commutative : multiplier z par z', c'est appliquer au point M la z'-similitude. Dans les deux cas, on obtient le même point, B, image de zz'.

En utilisant la représentation trigonométrique des nombres complexes, on montre aisément que le produit zz' a pour module $\rho\rho'$ et pour argument $\theta + \theta'$. Donc la construction de l'image, B, du produit zz' est aisée (figure ci-dessous) :

1° - on trace l'axe Ou qui fait avec Ox un angle $\theta + \theta'$;

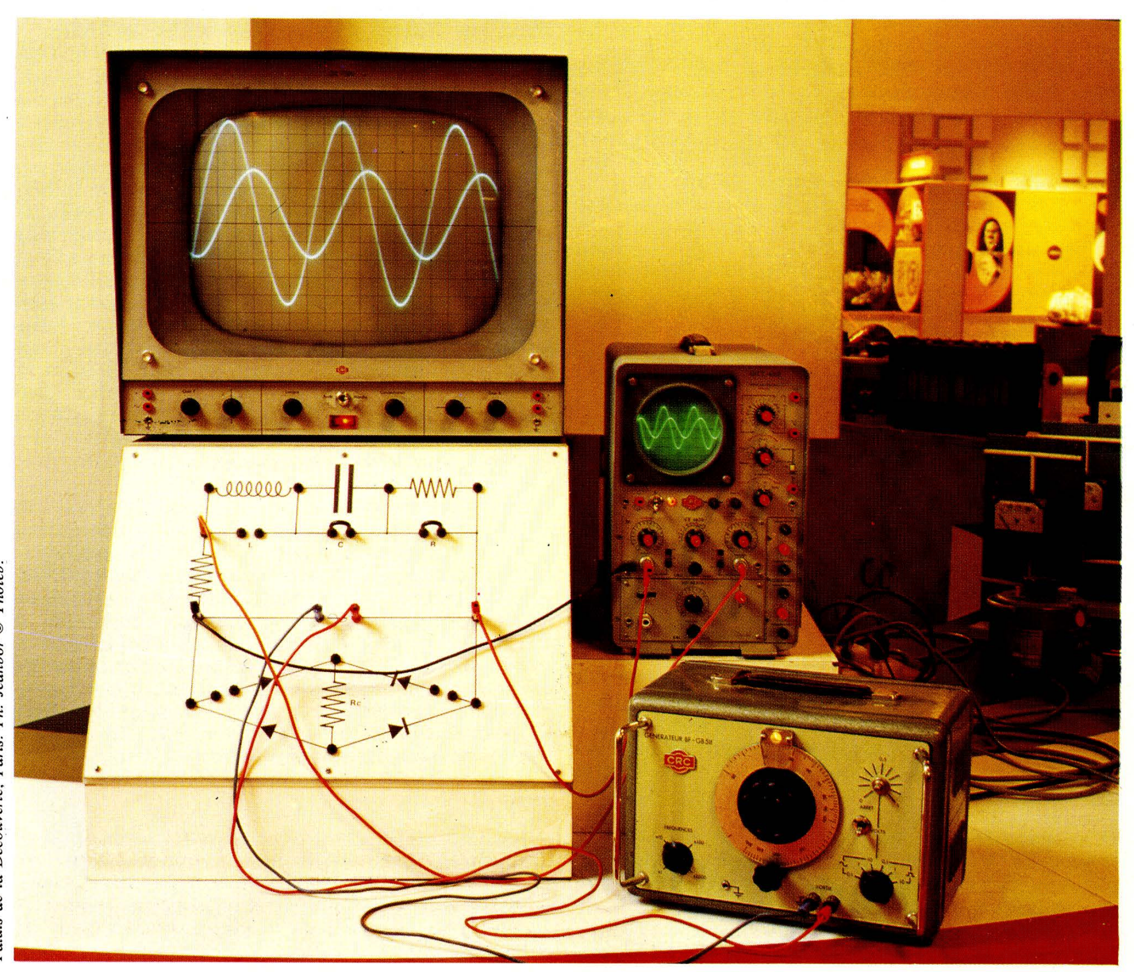
2° - on porte sur cette droite à partir de O, la grandeur $OB = \rho\rho'$ ($6 = 3 \times 2$ dans le cas de la figure).



Les nombres complexes z et z', d'images M et M', ont pour produit un nombre complexe, d'image B.

● *Signification géométrique du symbole* i. Le vecteur ***i*** (0, 1) est l'opérateur d'une rotation de centre O et d'angle $\pi/2$. Si l'on applique la i-similitude (= rotation) au vecteur ***OU*** (1, 0), on obtient le vecteur ***i*** (porté par Oy), ce qui s'écrit algébriquement $1 \times i = i$. Si l'on applique deux fois la i-similitude au vecteur ***OU*** on obtient le vecteur $-$***OU***, d'où $1 \times i \times i = i^2 = -1$.

Quelque chose d'aussi concret, d'aussi « expérimental » qu'un courant électrique alternatif peut être représenté à l'aide de la notion, en apparence très abstraite, de nombre complexe.



Palais de la Découverte, Paris. Ph. Jeanbor © Photeb.

L'ALGÈBRE LINÉAIRE.

De quoi s'agit-il ?

L'algèbre linéaire élémentaire.

Tous les collégiens ont appris à résoudre les équations du premier degré à une inconnue, de la forme $ax + b = 0$, et des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues. On leur a aussi enseigné que la fonction $y = ax + b$ était représentée graphiquement par une *ligne droite*. De sorte que le terme « ligne » (droite) et l'expression « premier degré » sont devenus synonymes en mathématiques : l'algèbre qui étudie des combinaisons du premier degré — c'est-à-dire des combinaisons où n'interviennent pas l'élévation des nombres sur lesquels on calcule à une puissance ou le produit de ces nombres entre eux — est appelée *algèbre linéaire*.

Lorsque l'algèbre était limitée à la théorie des équations, c'est-à-dire, en gros, jusqu'aux environs de 1830-1840, le « premier degré » était un chapitre mineur de cette branche des mathématiques. Un algébriste, vers 1800, c'était un spécialiste des équations du n-ième degré et des problèmes très variés qu'elles posaient, de sorte que les travaux de Cramer (1750) sur les systèmes de n équations du premier degré à n inconnues n'ont pas engendré, sur le champ, de théorie générale. Donnons un exemple simple de la méthode de Cramer. Soit à résoudre le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} ax + by = c \,; \\ a'x + b'y = c'. \end{cases} \quad (1)$$

Dans ce système, x et y sont les inconnues et a, b, c, a', b', c' des coefficients supposés connus. N'importe quel collégien sait (en principe) qu'il faut procéder de la manière suivante pour résoudre cette équation.

1 - On multiplie les deux membres de la deuxième équation par b/b', avec l'intention d'*éliminer* l'inconnue y ; le système devient :

$$\begin{cases} ax + by = c \,; \\ \dfrac{ba'}{b'} x + by = \dfrac{bc'}{b'}. \end{cases} \quad (2)$$

En effet : $b' y \times \dfrac{b}{b'} = by$.

2 - On soustrait membre à membre les équations (2), pour éliminer y ; on obtient :

$$ax - \frac{ba'}{b'} x + by - by = c - \frac{bc'}{b'}, \quad (3)$$

soit, après élimination des termes en y et réduction des deux membres :

$$(ab' - ba')\, x = cb' - bc' \quad . \quad (4)$$

3 - De l'équation (4) on tire immédiatement :

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad (5)$$

en supposant que $ab' - ba' \neq 0$.

4 - En procédant de même pour éliminer les termes en x, c'est-à-dire en multipliant les deux membres de la deuxième équation (1) par a/a', on parviendrait au système équivalent :

$$\begin{cases} ax + by = c \,, \\ ax + \dfrac{ab'}{a'} = \dfrac{ac'}{a'}. \end{cases} \quad (6)$$

Après soustraction membre à membre et réduction, on parviendrait à la solution :

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}. \quad (7)$$

Si le lecteur est perspicace, il a remarqué que les formules de résolution donnant x et y ont le même dénominateur :

$$D = ab' - ba'. \quad (8)$$

Ce dénominateur est obtenu en faisant les « produits en croix » des coefficients des inconnues, ce qu'on peut écrire ainsi :

$$ab' - ba' = \begin{matrix} a & & b \\ & \times & \\ a' & & b' \end{matrix} \quad (9)$$

et en adoptant la convention de signes suivante : le produit de deux coefficients est positif quand on se dirige de la première colonne à la seconde (ab') et négatif dans le cas contraire (ba').

D'autre part on remarque que les numérateurs des fractions (5) et (7) sont aussi des « produits en croix » respectant la même convention :

$$cb' - bc' = \begin{matrix} c & & b \\ & \times & \\ c' & & b' \end{matrix} \;; \quad (10)$$

$$ac' - ca' = \begin{matrix} a & & c \\ & \times & \\ a' & & c' \end{matrix} \quad (11)$$

On observe en outre que le produit en croix (10) est obtenu à partir de (9) en remplaçant les coefficients a et a' de l'inconnue x par le deuxième membre des équations à résoudre, à savoir respectivement par c et c' ; de même (11) est obtenu en remplaçant dans (9) les termes b et b' par respectivement c et c'.

Ajoutons enfin que si $D = ab' - ba' \neq 0$, le système (1) admet une solution et une seule (les deux valeurs de x et de y trouvées) ; si $D = 0$, le système possède soit une infinité de solutions (il est dit *indéterminé*), soit zéro solution (il est dit *impossible* ou *incompatible*).

Le produit en croix $ab' - ba'$ est donc doublement utile :

1 - il permet de dire si le système a ou n'a pas de solution ;

2 - il permet de calculer les racines du système.

On le nomme un *déterminant* et on l'écrit à l'aide de deux barres verticales :

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}. \quad (12)$$

De la théorie des déterminants à l'algèbre linéaire moderne.

Cramer a montré qu'on pouvait résoudre tout système de n équations linéaires à n inconnues à l'aide de tableaux analogues à (12), mais évidemment plus compliqués. Il est donc à l'origine de la *théorie des déterminants* (voir ci-dessous). Vers 1840-1850, de nombreux mathématiciens ont eu recours à cette méthode de calcul, en apparence un peu lourde, pour résoudre les systèmes linéaires rencontrés en Analyse (dans l'étude de certaines classes d'équations différentielles, d'équations aux dérivées partielles), et en géométrie projective (voir p. 77). On assiste donc à un perfectionnement de la méthode (H. Wroński, J.P. Binet, Jacobi, Hesse), puis à un élargissement du concept de déterminant avec la *théorie des matrices* (Hamilton, Cayley, Sylvester, entre 1843 et 1858).

A peu près à la même époque, deux autres théories linéaires se sont développées, tant pour les besoins propres de l'algèbre et de la théorie des nombres que pour ceux de l'analyse et de la géométrie analytique et algébrique : la *théorie des formes algébriques* et celle des *invariants*. Cette dernière a eu un succès et une fécondité considérable, comparable à celle de la théorie des groupes. Le concept d'invariant a été perçu par Lagrange, Gauss, Cauchy, Jacobi, etc., mais c'est George Boole qui l'a explicité le premier (1841). L'application de la théorie des invariants à l'algèbre (Cayley, Sylvester) et à la géométrie analytique (Hesse, Steiner, Cayley), vers 1850-1860, a été suivie de l'élaboration d'une théorie synthétique des invariants (Aronhold, 1863 ; Clebsch ; Gordan en 1868-1869) et de généralisations diverses (Kronecker, Christoffel, Klein, Study, Fuchs, Jordan, Hermite, Brioschi, Riemann, Lie). Une théorie générale englobant ces travaux dans des domaines différents a été proposée par Hilbert, en 1890.

Enfin nous avons vu, p. 46, que la structure d'*espace vectoriel* est découverte et axiomatisée dans la même période (deuxième moitié du XIX[e] siècle). Le calcul sur les quaternions (Hamilton, 1833-1843), les biquaternions (Clifford, 1872), les grandeurs hypercomplexes sont aussi des chapitres importants de l'algèbre linéaire qui débouchent sur le *calcul vectoriel* et le *calcul tensoriel*. La théorie des algèbres (associatives, non associatives, etc.) est inaugurée par les travaux de Grassmann (l'algèbre extérieure) et développée par l'École anglo-saxonne (B. Peirce, C.S. Peirce, Study, Wedderburn, etc.).

Plan.

Nous décrirons ici les principaux concepts de l'algèbre linéaire (déterminant, matrice, vecteur, tenseur) et nous donnerons quelques informations sur les formes algébriques. Nous rencontrerons ultérieurement de multiples applications de l'algèbre linéaire dans des domaines très divers des mathématiques.

Les déterminants.

Définition et notation.

La notion de déterminant, soupçonnée par Leibniz, a été mise au point par Cramer (1750), Bezout (1764), Vandermonde (1772), Laplace (1772), Lagrange (1773), mais la théorie générale de cet algorithme n'a été faite qu'au XIX[e] siècle : Gauss crée le terme « déterminant » en 1801, Binet, Jacobi et Cauchy précisent la théorie et Cayley introduit la notation moderne en 1841.

● *Définition.* Un *déterminant* est une expression algébrique d'un type très particulier, associée à un tableau carré de nombres (ou d'êtres mathématiques susceptibles d'être traités comme des nombres). Les nombres en question sont les *éléments* du déterminant ; le tableau carré est appelé une *matrice* (voir p. 60). En général, une matrice est notée à l'aide de crochets ou de parenthèses, et un déterminant à l'aide de barres verticales. Ainsi les coefficients a, b, a', b' des inconnues du système (1) ci-dessus peuvent être présentés sous la forme d'une *matrice des coefficients* notée :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Le déterminant de cette matrice s'écrit :

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}. \quad (2)$$

● *Remarques* :

1 - Il ne faut évidemment pas confondre *matrice* et *déterminant*. Une matrice est un tableau de nombres (ou d'autres éléments) rangés dans un certain ordre en lignes et en colonnes ; un déterminant est une fonction calculée selon des règles précises à partir de ces éléments. Ainsi la matrice (1) ci-dessus résume simplement le fait que a est le coefficient de x dans la première équation, b le coefficient de y dans la première équation, a' le coefficient de x dans la deuxième équation, etc. En revanche, le déterminant (2) est le nombre $ab' - ba'$, que nous avons appelé « produit en croix » ci-contre.

2 - Une matrice carrée et le déterminant qui lui est associé peuvent être caractérisés par leur nombre n de lignes et de colonnes. Ainsi le déterminant (2), qui comprend deux lignes et deux colonnes, est un déterminant du *deuxième ordre* ; un déterminant à trois lignes et à trois colonnes est dit du *troisième ordre* ; un déterminant à n lignes et à n colonnes est dit du *n-ième ordre*.

3 - Pour calculer la valeur D d'un déterminant $|D|$, on est amené à faire la somme algébrique des produits de ses éléments, affectés du signe + ou du signe − selon une règle qui sera précisée au paragraphe *b* ci-après. Par exemple, le déterminant (2) se calcule en faisant les produits ab' et ba' : chaque produit de (2) (ou de (n) éléments) d'un déterminant du deuxième (ou n-ième) ordre est appelé un *terme*.

● *Notation.* Les éléments d'un déterminant (ou d'une matrice) peuvent être notés à l'aide de lettres comme on l'a fait précédemment. Toutefois il est commode d'utiliser une notation à l'aide d'indices selon les règles suivantes.

1 - Chaque élément est représenté par une lettre munie d'un double indice, qui est la même pour tous les éléments du déterminant : a par exemple.

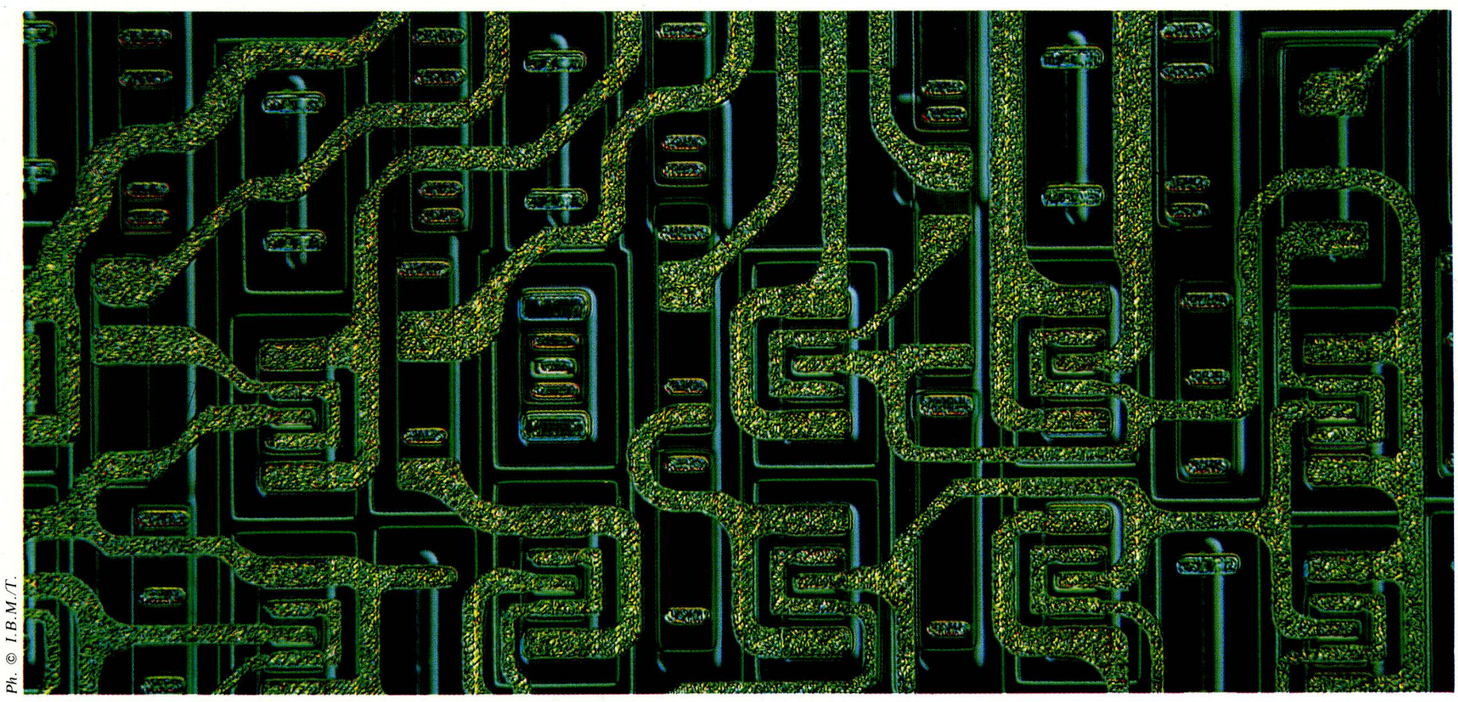
2 - Pour préciser de quel élément il s'agit, on adjoint à cette lettre deux indices : le premier indique la *ligne* de l'élément et le second sa *colonne* (le moyen mnémotechnique classique pour se souvenir de l'ordre des indices est : « *licol* »). Ainsi a_{11} désigne l'élément qui occupe l'intersection de la première ligne et de la première colonne ; a_{23} est l'élément qui se trouve à l'intersection de la deuxième ligne et de la troisième colonne ; etc. Un terme quelconque est noté a_{ij} : i désigne la i-ième ligne et j la j-ième colonne.

3 - Avec cette règle, écrivons par exemple les déterminants $|D|$, $|D'|$ et $|D''|$, respectivement du deuxième, du troisième et du quatrième ordre. On obtient :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (4)$$

$$D'' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \quad (5)$$



L'étude des circuits électriques comprenant de nombreuses dérivations fait intervenir la résolution de systèmes de n équations à n inconnues qu'on ne peut traiter par les méthodes simples de l'algèbre élémentaire. L'emploi du calcul matriciel permet des solutions rapides et globales de ces problèmes.

Ph. © I.B.M./T.

Attention : a_{32} se lit « a trois, deux » (et non « a trente-deux »).

4 - Les éléments dont les deux indices sont égaux (a_{11}, a_{22}, ...) occupent, comme on le voit, la diagonale du tableau carré. Ce sont les *éléments diagonaux* ; la diagonale correspondante est appelée *diagonale principale*.

● *A quoi servent les déterminants ?* Tout d'abord, comme on l'a dit, à résoudre les systèmes linéaires de n équations à n inconnues. Contrairement à ce qu'on pourrait penser, ce problème est au centre de multiples préoccupations non seulement mathématiques, mais aussi physiques et techniques. Par exemple lorsqu'on réalise un circuit électrique comportant 50 dérivations, les intensités $I_1, I_2, ..., I_{50}$ du courant qui passe dans chaque résistance $R_1, R_2, ..., R_{50}$ de la dérivation sont généralement déterminées par les besoins du montage. Pour calculer les résistances $R_1, R_2, ..., R_{50}$ qu'il faut mettre dans le circuit, on est conduit à résoudre un système linéaire de 50 équations à 50 inconnues : les méthodes usuelles, apprises au collège, conduiraient à des mois et des mois de calcul ! La méthode des déterminants simplifie considérablement le problème (... à condition de posséder une méthode de calcul simple des déterminants).

Comme nous le verrons par la suite, les matrices peuvent traduire des données mathématiques extrêmement variées (transformations géométriques, données topologiques, etc.) et le calcul de leurs déterminants est alors une opération essentielle : l'outil créé par Cramer pour résoudre les systèmes linéaires à n inconnues est devenu un instrument de calcul d'une portée très générale.

Calcul des déterminants.

● *Par définition*, la valeur d'un déterminant dans $\mathbb{N}$ se calcule de la manière suivante.

1 - On fait tous les produits de n éléments a_{ij} choisis de telle sorte que ces éléments n'appartiennent ni à la même ligne, ni à la même colonne, c'est-à-dire que les indices i et j de deux éléments quelconques du produit sont respectivement différents. Chaque produit est un *terme*.

2 - Le signe d'un terme est +, si la permutation des seconds indices des éléments est paire ; ce signe est −, dans le cas contraire. La permutation fondamentale étant (1, 2, 3, ..., n).

3 - Le déterminant est la somme algébrique des termes ainsi définis.

● *Remarque* : Nous avons défini la parité d'une permutation p. 35. Si nous prenons, par exemple, comme permutation fondamentale la permutation à 5 éléments (1, 2, 3, 4, 5), et si nous opérons une *transposition* sur cette permutation (c'est-à-dire si nous changeons deux éléments de place) on obtient, par exemple : (1, 3, 2, 4, 5) ; c'est une permutation *impaire*, car elle est obtenue à l'aide d'un nombre *impair* de transpositions. En revanche, la transposition (1, 3, 2, 5, 4) est *paire* car elle a été obtenue par un nombre pair (2) de transpositions (le 3 à la place du 2, le 5 à la place du 4).

● *Exemples.*

— *Déterminant d'ordre 2.* C'est un déterminant de la forme (3) ci-dessus.

1 - Les termes sont les produits à deux éléments $a_{11}\,a_{22}$ et $a_{12}\,a_{21}$.

2 - Le premier terme correspond à la permutation (1, 2) des seconds indices ; c'est la permutation fondamentale : donc le terme est affecté du signe +. Le deuxième terme correspond à la permutation (2, 1), qui est impaire (une seule transposition) : il est donc affecté du signe −.

3 - Donc :

$$D = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}\,. \qquad (6)$$

— *Déterminant d'ordre 3.* C'est un déterminant de la forme (4) ci-dessus.

1 - Les termes sont des produits de trois éléments, soit :

$$\begin{cases} a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\ ; \\ a_{12}\,a_{23}\,a_{31}\ ; \\ a_{13}\,a_{21}\,a_{32}\ ; \\ a_{11}\,a_{23}\,a_{32}\ ; \\ a_{12}\,a_{21}\,a_{33}\ ; \\ a_{13}\,a_{22}\,a_{31}\,. \end{cases} \qquad (7)$$

2 - Les permutations des seconds indices (1, 2, 3), (2, 3, 1) et (3, 1, 2) sont paires ; donc les trois premiers termes de (7) sont affectés du signe +. Les permutations (1, 3, 2), (2, 1, 3) et (3, 2, 1) sont impaires ; donc les trois autres termes de (7) sont affectés du signe −.

3 - D'où la valeur du déterminant :

$$D' = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31}\,. \qquad (8)$$

● *Pour* $n > 3$, le calcul devient laborieux. On peut le simplifier en remplaçant un déterminant d'ordre n par un déterminant équivalent d'ordre inférieur, en utilisant les propriétés fondamentales des déterminants énoncées ci-après.

Propriétés des déterminants.

● *Définition.*

— Considérons un élément a_{ij} quelconque dans un déterminant et supprimons la i-ième ligne et la j-ième colonne à l'intersection desquelles se trouve l'élément a_{ij}. Il subsiste un tableau à $n-1$ lignes et à $n-1$ colonnes, c'est-à-dire un déterminant d'ordre $n-1$, qu'on appelle *mineur* du déterminant initial correspondant à a_{ij}. Nous noterons ce déterminant M_{ij}.

— Le nombre A_{ij} défini par :

$$A_{ij} = (-1)^{(i+j)}\,M_{ij} \qquad (9)$$

est appelé *cofacteur* de l'élément a_{ij}. Si $i+j$ est pair, $A_{ij} = M_{ij}$; si $i+j$ est impair, $A_{ij} = -M_{ij}$.

● *Propriétés fondamentales des déterminants.* Nous nous contenterons de les énoncer, sans les démontrer (la démonstration se trouve dans les traités d'algèbre courants).

1 - La valeur d'un déterminant ne change pas quand on intervertit les lignes et les colonnes de même indice. Il résulte de cette propriété que tout ce qui est démontré pour les colonnes est valable pour les lignes, et réciproquement.

2 - Lorsqu'on échange entre elles deux lignes (ou deux colonnes) le déterminant change de signe.

3 - Un déterminant qui a deux lignes (ou deux colonnes) identiques est nul.

4 - Si tous les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) contiennent un facteur commun, on peut sortir cet élément du déterminant. Cette propriété s'écrit, dans le cas particulier où, par exemple, les termes d'une ligne ont en commun le facteur k :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\,. \qquad (10)$$

5 - Si tous les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) sont nuls, le déterminant est nul. Cette propriété découle de la précédente : si tous les éléments d'une ligne, par exemple, sont égaux à 0, alors on se trouve dans le cas où $k = 0$, et l'équation (10) montre que le déterminant est nul.

6 - Soit un déterminant $|D|$ d'ordre n. Considérons les éléments de la i-ième ligne, à savoir : a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}. Chacun de ces éléments possède un cofacteur A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{in}. On démontre que la valeur D du déterminant $|D|$ est donnée par :

$$D = A_{i1}\,a_{i1} + A_{i2}\,a_{i2} + \cdots + A_{in}\,a_{in}\,. \qquad (11)$$

On dit qu'on a développé le déterminant par rapport aux éléments de sa i-ième ligne.

On peut de même développer un déterminant par rapport aux éléments de sa j-ième colonne. Les éléments de cette colonne sont en effet a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj} ; ils admettent respectivement pour cofacteur A_{1j}, A_{2j}, ..., A_{nj}, de sorte que le déterminant a pour valeur :

$$D = A_{1j}\,a_{1j} + A_{2j}\,a_{2j} + \cdots + A_{nj}\,a_{nj}\,. \qquad (12)$$

7 - La valeur d'un déterminant ne change pas si l'on ajoute aux éléments d'une ligne (ou d'une colonne) les éléments correspondants d'une autre ligne (ou d'une autre colonne) après les avoir multipliés par un même nombre. Cette dernière propriété est intéressante, car elle permet de faire apparaître des éléments nuls dans les lignes et les colonnes d'un déterminant, c'est-à-dire de simplifier le calcul.

On trouvera, p. 141, un exemple de calcul de déterminant utilisant les propriétés qui viennent d'être énoncées.

Théorie des matrices.

Généralités et définition.

● *Rappel historique.* Le concept de *matrice* a été introduit en 1843 par A. Cayley ; le terme (en anglais : *matrix*) est dû à J. Sylvester (1850) qui

l'employait pour décrire le tableau des coefficients d'un système d'équations du premier degré, à partir duquel on calcule le déterminant du système. L'idée de calculer « en bloc » sur ces tableaux, c'est-à-dire de considérer les matrices comme analogues à des nombres, est de W. R. Hamilton (1853), qui y voyait une généralisation des nombres complexes : c'est là d'ailleurs le concept moderne, qui considère les matrices comme des *nombres hypercomplexes*. Toutefois, ce n'est qu'en 1858 que Cayley précisa les notions, les définitions et les règles du calcul matriciel. En 1904, Hilbert introduit les matrices d'ordre infini.

La théorie des matrices a eu d'abord des applications purement mathématiques (résolution des équations algébriques, des équations différentielles) ; puis cet outil s'est révélé extraordinairement commode en astronomie, en mécanique, pour l'étude des réseaux électriques, en mécanique quantique, dans la théorie de la relativité, en physique nucléaire, dans les sciences humaines (statistiques, économie, etc.), en informatique, etc. De nos jours, le calcul matriciel est tout aussi indispensable à un ingénieur ou à un technicien que l'était jadis le calcul algébrique élémentaire.

● *Définition.* Une matrice est un tableau rectangulaire à m lignes et n colonnes formé d'éléments notés a_{ij}, l'indice i indiquant la ligne et l'indice j la colonne de l'élément considéré. On a évidemment $i = 1, 2, 3, ..., m$ et $j = 1, 2, 3, ..., n$. Si les éléments sont des nombres, la matrice est dite numérique (ce sera le cas des matrices dont nous parlerons ici ; leurs éléments seront choisis dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels pour la commodité des exemples, mais ils pourraient tout aussi bien être choisis dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes ; $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont, rappelons-le, des *corps commutatifs*).

Le nombre m de lignes est la *hauteur* de la matrice, le nombre n de colonnes est sa *longueur*. On désigne ces deux dimensions par des expressions comme :

une (m, n) matrice ;
une $m \times n$ matrice ;
une matrice $m \times n$;
etc.

Par convention, le premier nombre désigne toujours le nombre de lignes et le second le nombre de colonnes. Quand $m = n$, la matrice est dite *carrée d'ordre n*. Quand $m = 1$ (une seule ligne), c'est une *matrice ligne* ; quand $n = 1$ (une seule colonne), c'est une *matrice colonne*.

● *Notation.* Pour noter une matrice, on utilise indifféremment les crochets, les parenthèses ou la double barre. On désigne en général une matrice par une lettre majuscule ($A, B, ...$) ; quand on risque de confondre ce symbole avec une autre grandeur, on écrit $[A]$ ou $\|A\|$ au lieu de A. Voici quelques exemples d'écriture d'une matrice à deux lignes et à trois colonnes, c'est-à-dire de ce que nous nommerons une $(2, 3)$ matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \left\| \begin{matrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{matrix} \right\| . \qquad (1)$$

— On utilise la notation indicielle expliquée p. 58 quand on désigne les éléments d'une matrice par des lettres. Une (m, n) matrice s'écrit alors :

$$A = \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}^{n \text{ colonnes}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix}}\right\} m \text{ lignes} \qquad (2)$$

— On peut aussi désigner une matrice par son terme général a_{ij}, mis entre crochets, on écrira alors :

$$A = [a_{ij}] . \qquad (3)$$

— Les éléments $a_{11}, a_{22}, ...,$ sont les *éléments diagonaux* de la matrice, ils constituent sa *diagonale principale* quand il s'agit d'une matrice carrée.

Propriétés fondamentales des matrices.

● *Matrices égales.* Deux matrices A et B sont égales si, et seulement si, tous leurs éléments homologues le sont. Cela implique que A et B ont les mêmes dimensions $m \times n$. Si l'on appelle a_{ij} et b_{ij} les éléments généraux de ces deux matrices, on a, pour tout couple de valeurs (i, j) : $a_{ij} = b_{ij}$.

● *Sous-matrices d'une matrice.* En supprimant, dans une matrice A donnée, une ou plusieurs lignes, une ou plusieurs colonnes ou à la fois une ou plusieurs lignes et une ou plusieurs colonnes, on obtient ce qu'on nomme des *sous-matrices*. Lorsque l'ensemble des sous-matrices permet de reconstituer la matrice initiale, on les nomme *blocs*.

Exemple : soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -7 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} . \qquad (4)$$

En supprimant la troisième ligne et les quatrième et cinquième colonnes de A, on obtient la sous-matrice :

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \qquad (5)$$

En supprimant la troisième ligne et les trois premières colonnes de A, on obtient la sous-matrice :

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} . \qquad (6)$$

En supprimant les deux premières lignes et les deux dernières colonnes de A, on obtient la sous-matrice ligne :

$$D = [-2 \quad 2 \quad 1] . \qquad (7)$$

En supprimant les deux premières lignes et les trois premières colonnes de A, on obtient la sous-matrice ligne :

$$E = [4 \quad 6] . \qquad (8)$$

On peut donc écrire :

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix} . \qquad (9)$$

B, C, D et E sont des *blocs* de la matrice A (la division proposée ici est bien entendu arbitraire).

● *Transposition.* La transposée d'une (m, n) matrice A est une (n, m) matrice admettant comme première ligne la première colonne de A, comme deuxième ligne la deuxième colonne de A, etc., l'ordre des termes n'étant pas changé à l'intérieur de chaque ligne devenue colonne. On écrit la transposée de A sous la forme : ${}^tA$ ou $\tilde{A}$ (lire : « transposée de A »). Par exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tA = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} . \qquad (10)$$

On a évidemment ${}^t({}^tA) = A$: la transposée d'une transposée redonne la matrice initiale.

● *Transposée d'une matrice carrée.* Une matrice carrée A d'ordre m possède m lignes et m colonnes ; donc sa transposée $\tilde{A}$ est aussi carrée et d'ordre m : les deux matrices coïncident quant à leurs dimensions.

● *Rang d'une matrice.* On appelle rang r d'une matrice le nombre le plus grand de colonnes linéairement indépendantes (pour l'indépendance linéaire d'un ensemble de nombres, voir p. 49). Dans le cas où les éléments d'une matrice appartiennent à un même corps commutatif (c'est le cas pour les matrices numériques dont nous nous occupons ici), le rang d'une matrice est aussi égal au plus grand nombre de lignes linéairement indépendantes.

● *Définitions complémentaires.*

— *Matrices opposées.* Deux matrices, A et A', sont dites *opposées* lorsque tous les éléments de l'une sont les éléments de l'autre changés de signe ; on écrit alors : $A' = -A$, ou encore, en désignant par a'_{ij} le terme général de la matrice a' :

$$a'_{ij} = -a_{ij} .$$

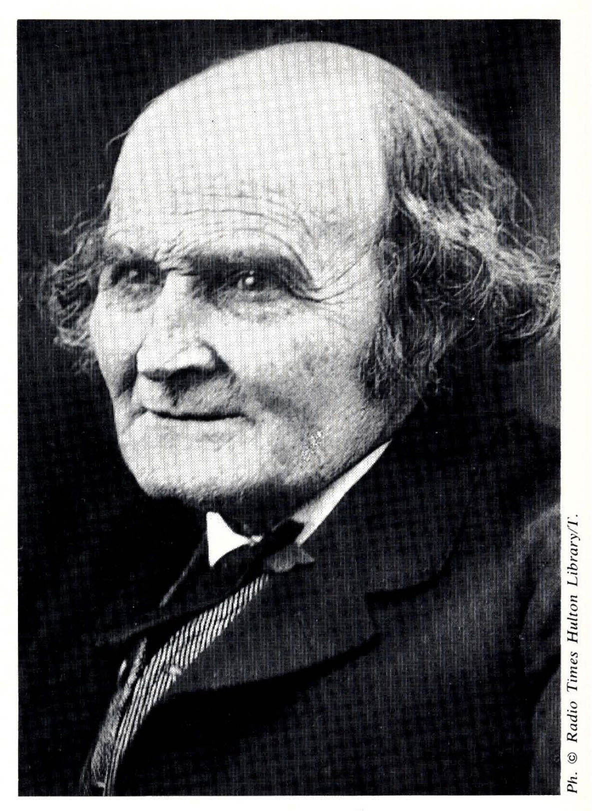
— *Matrice symétrique* : une matrice A est dite symétrique lorsqu'elle est égale à sa transposée ${}^tA$; l'égalité $A = {}^tA$ indique que le terme général a_{ij} de la matrice A est égal au terme général a_{ji} de sa transposée : $a_{ij} = a_{ji}$. Soit par exemple la matrice A et sa transposée ${}^tA$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{et} \qquad (11)$$

$${}^tA = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} .$$

On constate que $A = {}^tA$: donc A est une matrice symétrique : un élément tel que a_{13} dans la matrice A est égal à l'élément a_{31} de la matrice ${}^tA$.



Ph. © Radio Times Hulton Library/T.

Arthur Cayley (1821-1895) : cet avocat devenu mathématicien est à l'origine de la théorie des matrices et du calcul matriciel. Avec son contemporain, l'Irlandais Hamilton (1805-1865), il a été le chef de file de l'École des mathématiciens britanniques du XIXe siècle.

— *Matrice antisymétrique.* Une matrice est appelée antisymétrique lorsqu'elle est l'opposé de sa transposée : $A = -{}^tA$. Une matrice antisymétrique est nécessairement carrée. Exemple : soit A et ${}^tA$ deux matrices dont l'une est la transposée de l'autre, par exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tA = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} . \qquad (12)$$

On constate que $A = -{}^tA$: donc A est antisymétrique.

— *Matrice diagonale.* Une matrice carrée dont tous les termes sont nuls sauf les termes diagonaux est une matrice diagonale. Exemple :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

est une matrice carrée d'ordre 3 ; c'est une matrice diagonale.

— *Matrice de permutation.* On appelle ainsi une matrice carrée telle que, dans chaque ligne et dans chaque colonne, tous les éléments sont nuls, à l'exception d'un seul, égal à 1.

— *Matrice triangulaire.* C'est une matrice carrée dont tous les éléments situés d'un même côté de la diagonale principale sont nuls. Exemple :

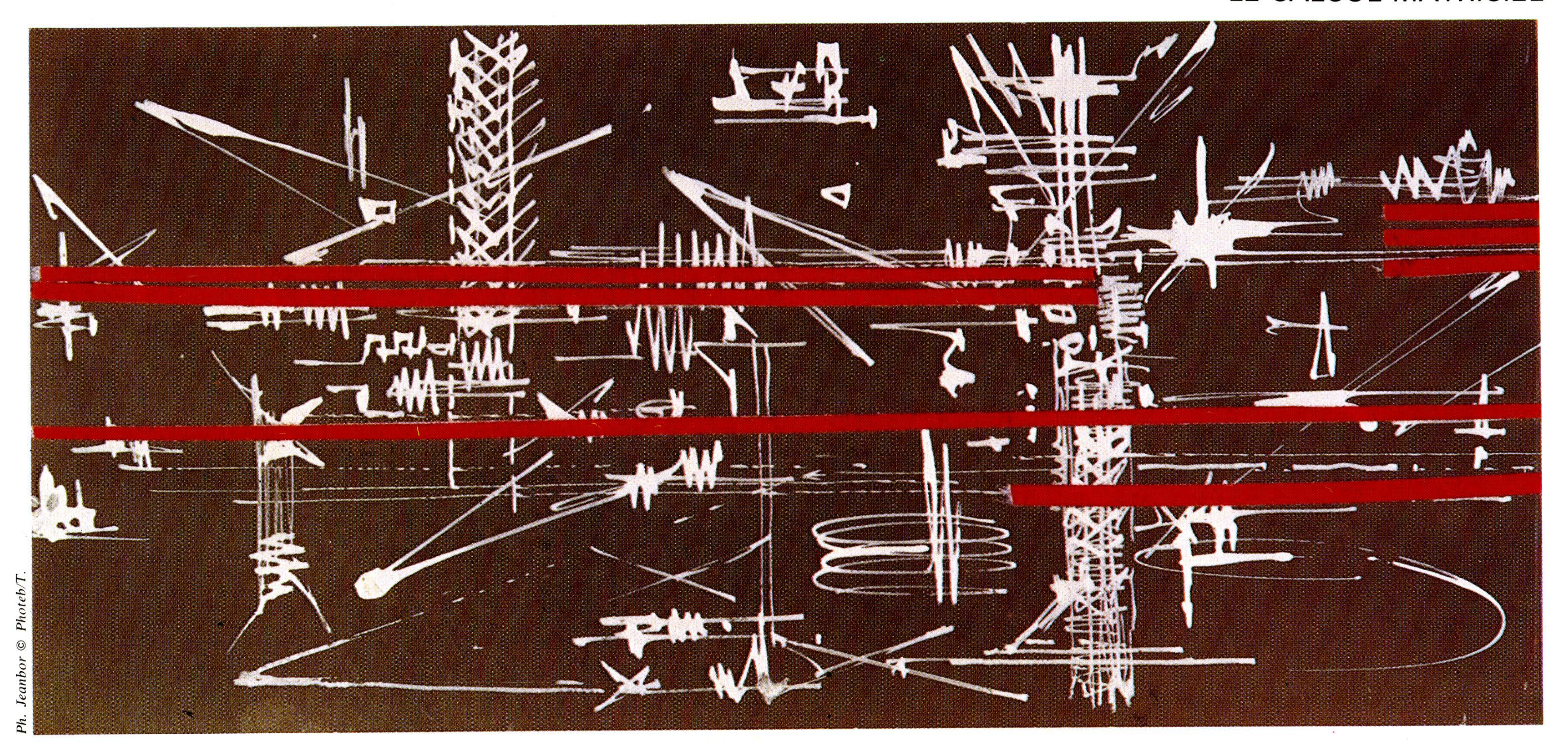
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} . \qquad (14)$$

A est une matrice carrée d'ordre 3 triangulaire.

● *Déterminant d'une matrice carrée.* Le déterminant d'une matrice carrée est une fonction de ses éléments, calculée selon les règles énoncées p. 59 ; les éléments du déterminant sont les éléments de la matrice. Voir aussi à la même page la définition du *mineur* d'un élément a_{ij} et du cofacteur A_{ij} relatif à cet élément.

Opérations sur les matrices.

● *Addition.* La somme $C = A + B$ de deux matrices de mêmes dimensions $m \times n$ est une matrice C, de dimensions $m \times n$, et telle que chacun de ses éléments c_{ij} est la somme des éléments de même indice des



***Les mathématiques ne sont pas un jeu abstrait de l'esprit. Elles supposent, chez les plus grands créateurs, une puissance d'invention qui tient du lyrisme et, parfois, de l'illumination. C'est pourquoi il nous a semblé justifié de demander au grand peintre qu'est Georges Mathieu (né en 1921), créateur de l'*abstraction lyrique*, mais aussi philosophe, admirateur de la* Caractéristique universelle *leibnizienne, de réaliser cet* Hommage à la notion de matrice.**

matrices A et B :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} . \qquad (15)$$

Par exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 2 & 1 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \qquad (16)$$

• *Multiplication par un scalaire* λ. Soit λ un élément du corps K auquel appartiennent les éléments de la matrice A (corps des réels ou corps des complexes) ; la matrice λA est constituée d'éléments qui sont les produits λa_{ij} des éléments a_{ij} de la matrice A. Exemple :

$$-5 \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -25 & -15 \\ 5 & 0 & -40 \end{bmatrix} . \qquad (17)$$

• *Produit scalaire d'une matrice ligne par une matrice colonne.* Considérons les deux matrices :

$$A = [a_1 \, a_2 \ldots a_i \ldots a_n] \qquad (18)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_i \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} . \qquad (19)$$

La première est une matrice ligne à n éléments et la seconde une matrice colonne à n éléments. On appelle *produit scalaire* de ces deux matrices le nombre p tel que :

$$p = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_i b_i + \cdots + a_n b_n , \qquad (20)$$

ou, en employant le symbole Σ :

$$p = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i . \qquad (21)$$

Il faut bien noter que le produit scalaire p est un *nombre* appartenant au corps K sur lequel sont construites les matrices (réelles ou complexes) objets du calcul : c'est une combinaison linéaire des éléments a_i et b_i des deux matrices proposées.

Voici un exemple trivial du produit scalaire. Supposons qu'une entreprise vende quatre types d'articles dont les prix unitaires respectifs sont 3, 5, 10 et 25 F. Le catalogue des prix est une matrice ligne :

$$A = [3 \; 5 \; 10 \; 25] . \qquad (22)$$

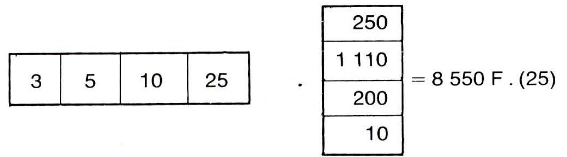
Imaginons qu'un client remplisse un bon de commande pour 250 articles du premier type, 1 100 articles du second type, 200 articles du troisième type et 10 articles du quatrième type. Son bulletin de commande peut être considéré comme une matrice colonne :

$$B = \begin{bmatrix} 250 \\ 1\,110 \\ 200 \\ 10 \end{bmatrix} . \qquad (23)$$

La somme totale qu'il devra payer est le produit scalaire $A \cdot B$, c'est-à-dire :

$$A \cdot B = 3 \times 250 + 5 \times 1\,110 + 10 \times 200 + 25 \times 10 = 8\,550 \text{ F} . \qquad (24)$$

La facture peut être disposée de la sorte :



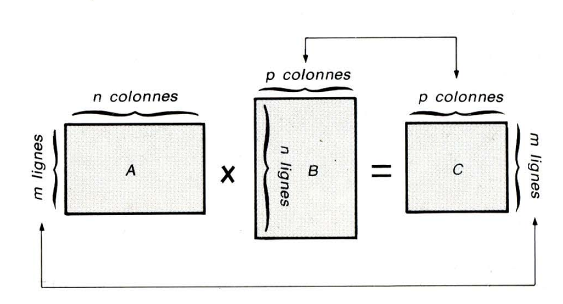
$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 10 & 25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 250 \\ 1\,110 \\ 200 \\ 10 \end{bmatrix} = 8\,550 \text{ F} . \qquad (25)$$

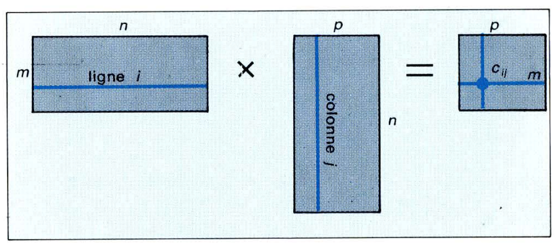
• *Multiplication des matrices.* Soit maintenant une (m, n) matrice A et une (n, p) matrice B. On notera que le *nombre de colonnes* n de la matrice A est égal au *nombre de lignes* de la matrice B. On peut construire une (m, p) matrice C à m lignes et p colonnes, telle qu'un élément quelconque c_{ij} de cette matrice soit le produit scalaire de la ligne i de la matrice A par la colonne j de la matrice B. Cette matrice est appelée *produit matriciel* de A par B :

$$C = AB . \qquad (26)$$

On dit aussi que A multiplie B *à gauche*, ou que B multiplie A *à droite.* Ou encore que A *prémultiplie* B et que B *postmultiplie* A.

— Précisons cette définition par deux schémas : le premier donne les *dimensions* du produit matriciel $AB = C$; le second indique comment on calcule l'élément c_{ij} du produit.





Le produit matriciel $C = AB$.
I - Dimensions du produit : la matrice C possède m lignes (comme la matrice A) et p colonnes (comme la matrice B). Le produit n'est possible que si le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B : c'est la condition de dimensions du produit.
II - Calcul de c_{ij} : un élément c_{ij} du produit C est le produit scalaire de la ligne i de la matrice A par la colonne j de la matrice B.

— Exemple : Soit les deux matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad (27)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (28)$$

LE CALCUL MATRICIEL

La matrice A possède quatre colonnes, la matrice B quatre lignes, donc la condition de dimensions du produit est satisfaite et le produit AB est possible. Il aura pour dimensions 3×2 (c'est-à-dire 3 lignes et 2 colonnes). On peut donc écrire C sous la forme :

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}. \qquad (29)$$

L'élément c_{11} est le produit scalaire de la première ligne de A par la première colonne de B, soit :

$$[1 \quad 2 \quad -3 \quad 4] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + 6 + 15 + 4 = 26. \qquad (30)$$

De même c_{12} est le produit scalaire de la ligne 1 de la matrice A par la colonne 2 de la matrice B :

$$[1 \quad 2 \quad -3 \quad 4] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 + 2 + 9 + 8 = 21. \qquad (31)$$

On calculerait de même les éléments c_{21}, c_{22}, c_{31} et c_{32}, et on trouverait finalement :

$$C = \begin{bmatrix} 26 & 21 \\ -12 & -5 \\ 15 & 6 \end{bmatrix}. \qquad (32)$$



Le calcul matriciel est une théorie mathématique très abstraite, élaborée par Sylvester et Cayley au milieu du XIXe siècle. Pendant longtemps, on a pu la considérer — chez les non-mathématiciens — comme un brillant jeu de l'esprit. Au XXe siècle, en revanche, on s'est aperçu que cet outil était d'une grande efficacité lorsqu'il s'agissait de calculer des réseaux électriques, de traduire les lois fondamentales de la physique quantique ou, plus prosaïquement, de mettre en forme des problèmes de comptabilité (comme le montre la photographie ci-contre, où l'on voit un technicien étudier un problème d'exportation de produits industriels à l'aide d'une représentation matricielle).

Ph. © C.I.I.-Honeywell Bull.

Propriétés des opérations sur les matrices.

● *Addition.*

— *Associativité et commutativité.* En vertu des propriétés de l'addition sur les réels (ou sur les complexes), l'addition matricielle est une opération associative et commutative.

— *Élément neutre.* En raison de la définition de la somme $A + B$, il est clair qu'une matrice dont tous les éléments sont nuls est un élément neutre pour l'addition. Par exemple :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}. \qquad (33)$$

Et, de même :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}. \qquad (34)$$

La matrice dont tous les éléments sont égaux à 0 est appelée *matrice nulle* et notée [0], ou 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté.

— *Matrices opposées.* Toute matrice A possède une opposée $-A$ telle que $A - A = [0]$.

Ces propriétés montrent que l'ensemble des (m, n) matrices a la structure d'un *groupe commutatif additif* (voir p. 40). La définition du produit par un scalaire munit en outre ce groupe d'une loi de composition externe sur le corps K (des réels ou des complexes) : l'ensemble des (m, n) matrices muni de l'addition et du produit par un scalaire est un *espace vectoriel sur* K (voir définition p. 47).

● *Multiplication.*

— *Associativité et distributivité.* La multiplication des matrices est une opération associative et distributive par rapport à l'addition. On démontre aisément ces propriétés, qui s'écrivent, pour toutes matrices A, B, C respectant les conditions de dimensions du produit matriciel :

$$(AB)\,C = A(BC) \quad \text{(associativité)}. \qquad (35)$$

$$A(B + C) = AB + AC \quad \text{(distributivité à droite)}. \qquad (36)$$

$$(A + B)\,C = AC + BC \quad \text{(distributivité à gauche)}. \qquad (37)$$

— *Commutativité.* Le produit matriciel n'est pas commutatif ; en général on a $AB \neq BA$. Considérons en effet le produit matriciel AB, et appelons (a, a') les dimensions de A et (b, b') celles de B. Le produit AB n'est possible que si la condition de dimensions est satisfaite, à savoir si :

$$a' = b, \qquad (38)$$

c'est-à-dire si les dimensions de B sont (a', b').

Soit maintenant le produit BA. Il n'est possible que si l'on a :

nombre de colonnes de B = nombre de lignes de A

c'est-à-dire si :

$$b' = a. \qquad (39)$$

Or le produit AB exige bien $a' = b$, mais non pas $b' = a$. Donc, en général, le produit BA n'est pas possible. Examinons maintenant le cas particulier où $b' = a$, qui permet de former le produit $BA = C'$, et demandons-nous si $C' = C$.

La question peut être examinée simplement en considérant les dimensions des produits C et C'. Pour cela écrivons les produits matriciels en indiquant sous les matrices leurs dimensions :

$$\underset{(a,\,a')}{A} \times \underset{(b,\,b')}{B} = \underset{(a,\,b')}{C}. \qquad (40)$$

Ce produit exige que $a' = b$. D'autre part, si $b' = a$, on peut écrire :

$$\underset{(b,\,b')}{B} \times \underset{(a,\,a')}{A} = \underset{(b,\,a')}{C'}. \qquad (41)$$

La matrice C' a pour dimensions (b, a'), soit, puisque $a' = b$, (b, b) ; la matrice C a pour dimensions (a, b'), soit, puisque $b' = a$, (b', b'). Les deux matrices C et C' n'ont pas les mêmes dimensions, elles sont donc différentes. Donc :

$$AB \neq BA. \qquad (42)$$

● *Élément neutre pour la multiplication.* Cherchons s'il existe un élément neutre pour la multiplication, c'est-à-dire une matrice unité. Comme le produit matriciel n'est pas commutatif, il faut distinguer AB (A prémultiplie B) de BA (A postmultiplie B), et chercher une matrice unité I pour la prémultiplication et une matrice unité I' pour la postmultiplication. Si ces matrices existent, on doit avoir :

$$IA = A\,; \quad AI' = A. \qquad (43)$$

Appelons $m \times n$ les dimensions de A. L'égalité $IA = A$ impose les conditions suivantes :

1 - Nombre de colonnes de I = nombre de lignes de $A = m$.

2 - Nombre de lignes de I = nombre de lignes du produit = nombre de lignes de $A = m$.

Autrement dit I est une matrice carrée d'ordre m, que nous noterons I_m.

3 - On peut démontrer que tous les éléments de cette matrice sont nuls, à l'exception des termes diagonaux qui sont égaux à 1 :

$$I_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \qquad (44)$$

On montre de même que la matrice I' est la matrice carrée d'ordre n, notée I_n dont tous les éléments non diagonaux sont nuls, et dont les éléments diagonaux sont tous égaux à l'unité.

— *Matrices inverses.* La définition du produit matriciel ne permet pas d'affirmer qu'une matrice A possède toujours une inverse A^{-1} telle que, par exemple, $AA^{-1} = I_m$. L'inversion des matrices ne peut être envisagée qu'à la condition de considérer uniquement des matrices carrées d'un ordre n déterminé.

— *Diviseurs de* 0. Deux matrices non nulles A et B peuvent avoir un produit nul, autrement dit on peut avoir :

$$A \neq [0], \quad B \neq [0] \quad \text{et} \quad AB = [0]. \qquad (45)$$

Les matrices A et B sont appelées des *diviseurs de* 0 (voir définition p. 42).

● *Conclusion.* L'ensemble des (m, n) matrices est un groupe pour l'addition, mais non pas pour la multiplication, puisque cette opération (loi de composition interne) n'est pas toujours possible et exige que soit vérifiée la condition de dimensions ; l'ensemble des (m, n) matrices ne possède donc pas la structure d'anneau, définie p. 41.

L'anneau des matrices carrées d'ordre *n*.

● *Structure.* Les matrices carrées d'ordre n sont des matrices à n lignes et n colonnes. Leur ensemble peut être muni de deux lois de composition interne : l'addition et la multiplication, définies comme précédemment. Les propriétés de ces deux lois confèrent à l'ensemble des matrices carrées d'ordre n la *structure d'anneau.* En effet :

1 - l'addition de deux matrices est toujours possible ; elle est associative et commutative ;

2 - il existe un élément neutre pour l'addition, la matrice nulle [0] ;

3 - toute matrice carrée A d'ordre n a une opposée $-A$ telle que $A - A = [0]$;

4 - la multiplication de deux matrices carrées quelconques d'ordre n est toujours possible (la condi-

tion de dimensions est toujours vérifiée) ; elle est associative et distributive par rapport à l'addition, *mais elle n'est pas commutative* : en général, $AB \neq BA$;

5 - l'élément neutre pour la multiplication est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1 ; on note cette matrice I_n et l'on a :

$$I_n A = AI_n = A. \tag{46}$$

L'existence de diviseurs de 0 (la relation $AB = 0$ n'exige pas qu'un des facteurs soit nul) montre que l'anneau des matrices carrées d'ordre *n n'est pas un anneau d'intégrité* (voir p. 42).

● *Propriétés particulières.*

— Si $AB = BA$, on dit que les matrices *commutent* ; si $AB = -BA$, on dit qu'elles *anticommutent.*

— Le déterminant du produit AB est égal au produit des déterminants de A et de B.

— Le produit $AAA \ldots A$ de p matrices A se désigne par A^p.

— S'il existe une matrice B telle que $AB = I_n$, B est dite *inverse à droite* de la matrice A ; s'il existe une matrice B' telle que $B'A = I_n$, B' est dite *inverse à gauche.* On démontre que :

1 - une matrice A ne saurait posséder deux inverses à droite (ou à gauche) distinctes ;

2 - si B est inverse à droite, elle est aussi inverse à gauche de A.

On peut donc écrire, par définition :

$$B = A^{-1}. \tag{47}$$

— Une matrice est dite *singulière* (ou *dégénérée*) si son déterminant est nul ; sinon, elle est dite *régulière* (non *dégénérée*). Une matrice singulière n'a pas d'inverse.

— λ étant un scalaire appartenant au corps K sur lequel sont construites les matrices carrées considérées, la matrice $A - \lambda I_n$ est appelée *matrice caractéristique en* λ de la matrice carrée A. Le polynôme $P(\lambda)$ égal au déterminant D de cette matrice est le *polynôme caractéristique en* λ de la matrice. Par exemple la matrice carrée :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \tag{48}$$

a pour matrice caractéristique en λ la matrice :

$$A - \lambda I_n = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \tag{49}$$

soit :

$$A - \lambda I_n = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 7 \\ 3 & -1-\lambda \end{bmatrix}. \tag{50}$$

Le déterminant de cette matrice est :

$$D = (3-\lambda)(-1-\lambda) - 21 = \lambda^2 - 2\lambda - 24. \tag{51}$$

Le polynôme $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 24$ est le polynôme caractéristique en λ de la matrice A.

— Les *valeurs propres* d'une matrice carrée sont les racines de son polynôme caractéristique, c'est-à-dire les valeurs de λ telles que la matrice $A - \lambda I_n$ soit singulière (= non inversible). Dans l'exemple précédent, le polynôme :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 24 \tag{52}$$

admet les racines $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 6$, qui sont les valeurs propres cherchées.

— Deux matrices carrées A et B d'ordre n sont *semblables* si, et seulement si, il existe une matrice carrée inversible P d'ordre n pour laquelle $B = PAP^{-1}$. Une matrice semblable à une matrice diagonale est dite *diagonalisable.*

● *Inversion des matrices.* Soit une matrice carrée A d'ordre n, non singulière ; pour déterminer son inverse A^{-1}, on procède comme suit :

1 - On construit la matrice A^* (lire : « A étoile »), appelée *matrice adjointe* de A, telle que l'élément A_{ji} soit le cofacteur de l'élément a_{ij} de la matrice A (voir la définition du cofacteur p. 59).

2 - On calcule le déterminant D de la matrice A.

3 - On construit la matrice A^{-1} en divisant par D tous les éléments de A^*.

Voir un exemple de calcul p. 141.

Quelques applications de la théorie des matrices.

Généralisation de la notion de nombre.

● *Nombres réels.* Considérons la matrice carrée

LE NOMBRE D'OR

Depuis l'Antiquité classique, mathématiciens, philosophes et artistes ont cru à l'existence d'un rapport privilégié qui fut appelé* nombre d'or *par les artistes italiens de la Renaissance. Une tradition considérait que le nombre d'or x devait être racine de l'équation :

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1+x}$$

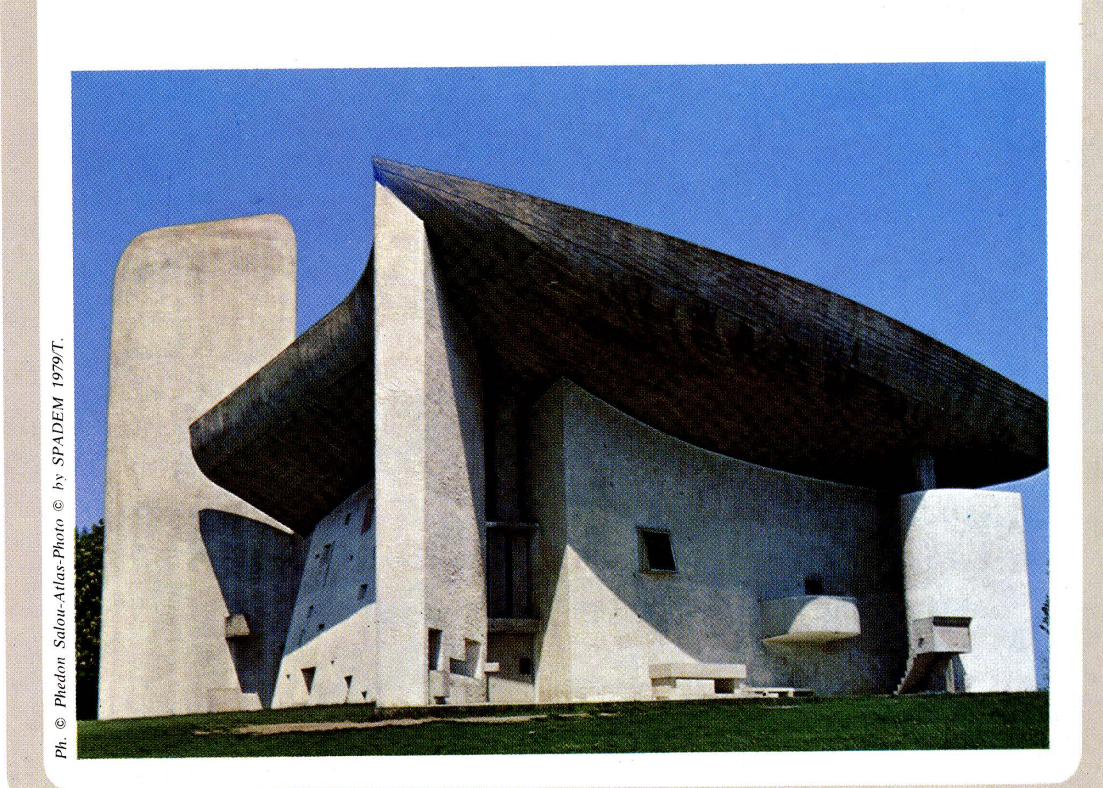
soit

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$= 1{,}618033\ldots$$

Cette notion du nombre d'or a aussi hanté l'imagination des artistes modernes, comme Salvador Dali, dans le tableau intitulé* Demi-tasse géante volante, avec annexe inexplicable de cinq mètres de longueur *(1932-1935) (tous les objets placés dans le tableau s'inscrivent dans des rectangles dont les cotés ont pour rapport le nombre d'or ; en partant de l'anse de la tasse, il est possible de développer une spirale logarithmique parfaite). Les architectes contemporains ont retrouvé une notion voisine du nombre d'or, le modulor de Le Corbusier (ci-dessous la* Chapelle de Ronchamp*).





d'ordre 2 et la matrice unité :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Soit a un réel ; on peut l'écrire sous la forme :

$$aI = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}. \quad (2)$$

● *Nombres complexes.* Soit les matrices carrées d'ordre 2 notées $[z]$ qui sont de la forme :

$$[z] = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad (3)$$

a et b étant des réels. Il est facile de montrer, en appliquant les règles du calcul matriciel qui viennent d'être évoquées, que :

$$[z] + [z'] = \begin{bmatrix} a + a' & -(b + b') \\ b + b' & a + a' \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[z]\,[z'] = \begin{bmatrix} aa' - bb' & -(ab' + ba') \\ ab' + ba' & aa' - bb' \end{bmatrix} \quad (5)$$

et que $[z]^{-1}$ est toujours calculable et égal à :

$$[z]^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Posons :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

On montre facilement que :

$$J^2 = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -I, \quad (8)$$

et que $[z]$ peut se mettre sous la forme :

$$[z] = aI + bJ. \quad (9)$$

Les matrices $[z]$ constituent un ensemble ayant la structure de *corps* (voir p. 43) ; on les appelle *nombres complexes*. En posant par définition :

$$[J] = \mathrm{i} \quad \text{et} \quad [I] = 1, \quad (10)$$

les nombres complexes $[z]$ sont de la forme $a + b\mathrm{i}$.

● *Matrices à éléments complexes.* On calcule sur les matrices à éléments complexes comme sur les matrices à éléments réels, avec la convention supplémentaire $\mathrm{i}^2 = -1$. On retiendra les définitions suivantes :

— La *matrice conjuguée* de A se note $\bar{A}$; elle s'obtient en remplaçant les éléments complexes z_{ij} de la matrice A par leurs conjugués respectifs (par exemple $1 - \mathrm{i}$ par $1 + \mathrm{i}$, etc.).

— La transposée de $\bar{A}$ est la *matrice associée* de la matrice A ; on peut la noter ${}^t\bar{A}$ ou A^* (« A étoile »).

— Si une matrice carrée vérifie la relation ${}^t\bar{A} = A$, elle est dite *hermitienne*.

Résolution des systèmes linéaires.

● *Système à deux inconnues.* Soit le système linéaire :

$$\begin{cases} ax + by = c\,; \\ a'x + b'y = c'. \end{cases} \quad (11)$$

Posons :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Le système (11) peut s'écrire matriciellement sous la forme :

$$AX = C, \quad (13)$$

d'où l'on tire :

$$X = A^{-1}C. \quad (14)$$

La résolution du système (11) revient à trouver l'inverse A^{-1} de la matrice A, appelée aussi *matrice des coefficients*.

● *Système à n inconnues.* Utilisons la notation indicielle, et appelons $x_1, x_2, \dots, x_n$ les inconnues. Le système s'écrit :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\,; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\,; \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (15)$$

La matrice des coefficients est $A = [a_{ij}]$; celle des inconnues est $X = [x_i]$ (c'est une matrice colonne). Les seconds membres forment la matrice ligne $B = [b_i]$. Le système (15) s'écrit matriciellement :

$$AX = B \quad (16)$$

et il admet comme solution :

$$X = A^{-1}B, \quad (17)$$

si A n'est pas singulière. Le problème se réduit donc à l'inversion de la matrice carrée A d'ordre n.

Substitutions.

Une *matrice de substitutions* est une matrice carrée dont chaque ligne et chaque colonne possède un élément et un seul égal à 1, tous les autres éléments étant nuls.

Soit un ensemble ordonné (a, b, c, d) que nous pouvons considérer comme une matrice colonne à quatre lignes ou une matrice ligne à quatre colonnes :

$$A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = [a\ b\ c\ d]. \quad (18)$$

Définissons une substitution particulière par la matrice S telle que :

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

(S est une matrice carrée d'ordre 4). Le lecteur vérifiera aisément que l'on a :

$$SA = \begin{bmatrix} c \\ a \\ b \\ d \end{bmatrix} \quad (20)$$

et :

$$AS = [c\ \ b\ \ d\ \ a]. \quad (21)$$

Autrement dit la prémultiplication par S opère une substitution de lignes dans A, et la postmultiplication une substitution de colonnes.

Transformations géométriques.

Le lecteur se reportera à la page 98 où l'on a décrit matriciellement les symétries et les rotations dans le plan.

Formes algébriques.

Définition.

On appelle *forme algébrique* un polynôme dont tous les termes sont de même degré par rapport aux variables. Un tel polynôme est dit aussi *homogène*. Selon leur degré on distingue des *formes linéaires* (premier degré), *quadratiques* (deuxième degré), *cubiques* (troisième degré), etc. La forme est dite *binaire* s'il y a deux variables, *ternaire* s'il y en a trois, etc.

● *Exemples.*

— Le polynôme $ax^2 + by + c$ n'est pas une forme algébrique, puisque ses trois termes sont respectivement du second degré en x, du premier degré en y et de degré zéro en x et y ; ce n'est pas un polynôme homogène.

— Le polynôme $f = ax^2 + byz + cy^2$ est une forme algébrique, puisque chaque terme est du second degré par rapport aux trois variables (x, y, z) : avec la terminologie définie précédemment, on précisera qu'il s'agit d'une *forme ternaire quadratique*.

— Le polynôme :

$$f = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \quad (1)$$

est une forme linéaire à n variables $(x_1, x_2, \dots x_n)$.

— Le polynôme :

$$f = ax + by \quad (2)$$

est une forme binaire linéaire ; on l'appelle aussi une forme *bilinéaire* (deux variables du premier degré).

● *L'intérêt de l'étude des formes algébriques est multiple.*

1 - Les formes algébriques servent au traitement analytique des problèmes de *géométrie projective* (voir p. 87).

2 - La résolution des équations fait intervenir des formes algébriques.

3 - La recherche des « lieux géométriques » (courbe, surface, famille de courbes, etc.), en géométrie analytique (voir p. 150), conduit à utiliser des formes algébriques.

4 - On les retrouve aussi en théorie des nombres (représentation d'un nombre par une forme quadratique), comme on l'a vu p. 32.

Etc.

Formes équivalentes, invariances.

● *Transformations linéaires.* Considérons une forme algébrique f de variables $x_1, x_2, \dots x_n$. On appelle *transformation linéaire* de la forme f l'opération qui consiste à remplacer les variables x_i par des variables x_i' reliées aux anciennes par une combinaison linéaire. La nouvelle forme f' obtenue est dite *transformée* de f.

Par exemple, soit la forme binaire quadratique $f = x^2 - y^2$ et considérons la transformation linéaire :

$$\begin{cases} x = 3x' + 8y'\,; \\ y = 4x' + 6y'. \end{cases} \quad (3)$$

La forme f s'écrit :

$$f = (3x' + 8y')^2 - (4x' + 6y')^2 = -7x'^2 + 28y'^2. \quad (4)$$

La forme $f' = -7x'^2 + 28y'^2$ est *équivalente* à la forme $f = x^2 - y^2$, par la transformation (3).

D'une manière générale une transformation linéaire qui change les variables $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en $(x_1', x_2', \dots, x_n')$ est de la forme :

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \cdots + a_{1n}x_n'\,; \\ x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + \cdots + a_{2n}x_n'\,; \\ \vdots \\ x_n = a_{n1}x_1' + a_{n2}x_2' + \cdots + a_{nn}x_n'. \end{cases} \quad (5)$$

Cette transformation, définie par les coefficients indexés a_{ij}, substitue à la forme $f(x_1, \dots x_n)$ une forme $f'(x_1', \dots x_n')$ qui lui est équivalente.

● *Expression vectorielle et matricielle.* Nous avons dit, page 48, qu'une suite de nombres $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ était un *vecteur*. Nous pouvons donc dire que la transformation linéaire (5) change le vecteur x de composantes $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en un vecteur $\boldsymbol{x}'$, de composantes $(x_1', x_2', \dots, x_n')$.

D'autre part appelons $\boldsymbol{A}_1$ le vecteur de composantes $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$. Le deuxième membre de la première équation (5) n'est autre que le *produit scalaire* $\boldsymbol{A}_1 . \boldsymbol{x}_i'$ (revoir la définition du produit scalaire de deux vecteurs au n° **512.5, G,** *c* et ci-dessus, au paragrateurs p. 48 et p. 61).

En appelant de même $\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \dots, \boldsymbol{A}_n$ les vecteurs analogues à $\boldsymbol{A}_1$, la transformation linéaire (5) s'écrit simplement :

$$x_i = \boldsymbol{A}_i . \boldsymbol{x}_i'. \quad (6)$$

C'est-à-dire qu'une variable x_i quelconque est le produit scalaire des vecteurs $\boldsymbol{A}_i$ et $\boldsymbol{x}_i'$.

● *Formes équivalentes.* Deux formes qui se correspondent par une transformation linéaire sont équivalentes. On peut se demander alors ce qu'il advient des coefficients de la forme transformée. Dans l'exemple (3) ci-dessus, la forme f avait pour coefficients $+1$ et -1 ; elle est transformée par les formules (3) en une forme f' de coefficients -7 et 28. Comme la transformation est linéaire, nous sommes certains que f et f' sont équivalentes.

Prenons maintenant le problème à l'envers : étant donné deux formes f et f', peut-on dire qu'elles sont équivalentes d'après l'examen de leurs coefficients ? Par exemple, $f' = 5x'^2 - 3y'^2$ est-elle équivalente à $f = x^2 - y^2$? Pour résoudre ce problème il faut trouver une transformation linéaire :

$$\begin{cases} x = ax' + by' \\ y = cx' + dy' \end{cases} \quad (7)$$

qui permette de passer de f à f', c'est-à-dire il faut déterminer les coefficients a, b, c et d du système (7). Le problème est relativement simple pour une forme binaire, linéaire ou quadratique ; il devient rapidement compliqué, lorsque le nombre de variables et le degré de la forme augmentent.

● *Invariants.* Toute fonction des coefficients (ou des variables et des coefficients) qui reste identiquement égale pour toutes les formes équivalentes d'un système, est appelée un *invariant*. L'étude des invariants des divers types de formes algébriques est un chapitre très important de la théorie des formes algébriques.

Formes linéaires.

● *Écriture vectorielle.* Le polynôme f de la relation (1) ci-dessus est, on l'a dit, une forme linéaire des n indéterminées (variables) $x_1, x_2, ..., x_n$. Au lieu de l'écrire sous la forme (1), nous pouvons nous contenter d'énumérer les coefficients du polynôme f, c'est-à-dire de définir f par le vecteur à n dimensions :

$$\boldsymbol{f} = (a_1, a_2, ..., a_n) . \qquad (8)$$

Avec cette remarque, nous pouvons combiner les formes linéaires comme des vecteurs. Soit par exemple deux formes linéaires :

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_a = (a_1, a_2, ..., a_n) ; \\ \boldsymbol{f}_b = (b_1, b_2, ..., b_n) . \end{cases} \qquad (9)$$

On obtient la forme linéaire : $\boldsymbol{f}_s = \boldsymbol{f}_a + \boldsymbol{f}_b$ et les formes $\lambda \boldsymbol{f}_a$ et $\lambda \boldsymbol{f}_b$ par application des lois du calcul vectoriel expliquées p. 47 :

$$\boldsymbol{f}_s = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n) . \qquad (10)$$

$$\begin{cases} \lambda \boldsymbol{f}_a = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n) ; \\ \lambda \boldsymbol{f}_b = (\lambda b_1, \lambda b_2, ..., \lambda b_n) . \end{cases} \qquad (11)$$

Les m formes linéaires $f_a, f_b, ..., f_n$ seront dites *linéairement dépendantes* ou *linéairement indépendantes* selon que les vecteurs qui les représentent sont eux-mêmes linéairement dépendants ou linéairement indépendants.

● *Écriture vectorielle d'un système homogène.* Un système de n équations du premier degré est dit *homogène* si le second membre de chaque équation est nul. Il s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = 0 ; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = 0 ; \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n = 0 . \end{cases} \qquad (12)$$

Appelons $\boldsymbol{x}$ le vecteur de composantes $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_n$ les vecteurs représentant les coefficients des n équations. Le système (12) peut s'écrire vectoriellement de la façon suivante :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} . \boldsymbol{A}_1 = 0 \\ \boldsymbol{x} . \boldsymbol{A}_2 = 0 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x} . \boldsymbol{A}_n = 0 \end{cases} \qquad (13)$$

puisque chaque équation développe le produit scalaire des vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{A}_i$ (voir p. 48). Le problème revient donc à déterminer un vecteur $\boldsymbol{x}$ orthogonal à tous les vecteurs $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_n$.

Formes quadratiques.

● *Exemple.* En géométrie analytique, on montre qu'une conique (c'est-à-dire un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole) peut être représentée par une équation de la forme :

$$f = Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 , \qquad (14)$$

dans laquelle A, B, C sont des coefficients caractéristiques de la courbe, x et y les coordonnées d'un point quelconque de la courbe.

L'équation (14) définit une forme binaire quadratique (deux variables : x et y ; tous les termes sont du second degré en xy). D'autre part on montre que f peut se mettre sous la forme équivalente :

$$f = A' \, x'^2 + C' \, y'^2 \qquad (15)$$

par une transformation linéaire convenable des variables (géométriquement, cette transformation consiste en une rotation des axes de coordonnées autour de l'origine ; voir p. 99).

La forme (15) est appelée *forme canonique* de l'équation d'une conique.

Nous allons étudier ici les formes quadratiques en général, c'est-à-dire les polynômes f à n indéterminées $x_1, x_2, ..., x_n$, dont tous les termes sont soit de la forme x_i^2 ($i = 1, 2, ..., n$) ou $x_i x_j$ ($i \neq j$).

● *Notation.* Nous appellerons a_{ij} les coefficients des termes en $x_i x_j$, et a_{ii} les coefficients des termes en x_i^2.

— Une forme binaire quadratique s'écrira donc :

$$f = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 , \qquad (16)$$

expression que l'on comparera avec (14).

— Une forme ternaire quadratique s'écrira :

$$f = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{22} x_2^2 + a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 . \qquad (17)$$

En appelant x, y, z les variables, et A, B, C, D, E, F les coefficients, f s'écrirait sous la forme :

$$f = Ax^2 + Bxy + Cxz + Dy^2 + Eyz + Fz^2 . \qquad (18)$$

— Une forme quadratique à n indéterminées s'écrit :

$$f = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \cdots + a_{22} x_2^2 + a_{23} x_2 x_3 + \cdots + a_{nn} x_n^2 , \qquad (19)$$

ou encore, en utilisant le symbole des sommes :

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_i x_j , \qquad (20)$$

en convenant que si $i = j$, $x_i x_j = x_i^2$.

● *Expression matricielle.* Les coefficients a_{ij} forment une matrice carrée $A = [a_{ij}]$ d'ordre n, appelée *matrice de la forme quadratique n*. Le rang de A est appelé rang de f. Si ce rang est égal à n, c'est-à-dire si toutes les lignes et toutes les colonnes sont linéairement indépendantes, la matrice est non-singulière. D'autre part, comme $a_{ij} = a_{ji}$, A est une matrice symétrique (voir éventuellement les définitions relatives aux matrices p. 60). Posons :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (21)$$

et considérons sa transposée :

$${}^tX = [x_1 \, x_2 ... \, x_n] ; \qquad (22)$$

On montre que la forme (19) peut aussi s'écrire $f = {}^tXAX$.

● *Forme canonique.* Il est possible de trouver une transformation linéaire qui change les indéterminées $(x_1, x_2, ..., x_n)$ en $(y_1, y_2, ..., y_n)$, de sorte que la forme quadratique se présente sous la forme :

$$F = b_1 \, y_1^2 + b_2 \, y_2^2 + \cdots + b_n \, y_n^2 . \qquad (23)$$

Cette forme F est la *forme canonique* des formes quadratiques f. La matrice T qui change X en Y est non-singulière.

La réduction à la forme canonique est un exercice assez fastidieux que nous n'illustrerons pas ici. On procède en général de proche en proche, par une série de transformations linéaires qui font apparaître les carrés des indéterminées. Ainsi la forme quadratique

$$f = 2\,xy - 6\,yz + 2\,xz$$

se réduit à la forme canonique

$$F = \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} + 6\,z'^2$$

par la matrice de transformation :

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \qquad (24)$$

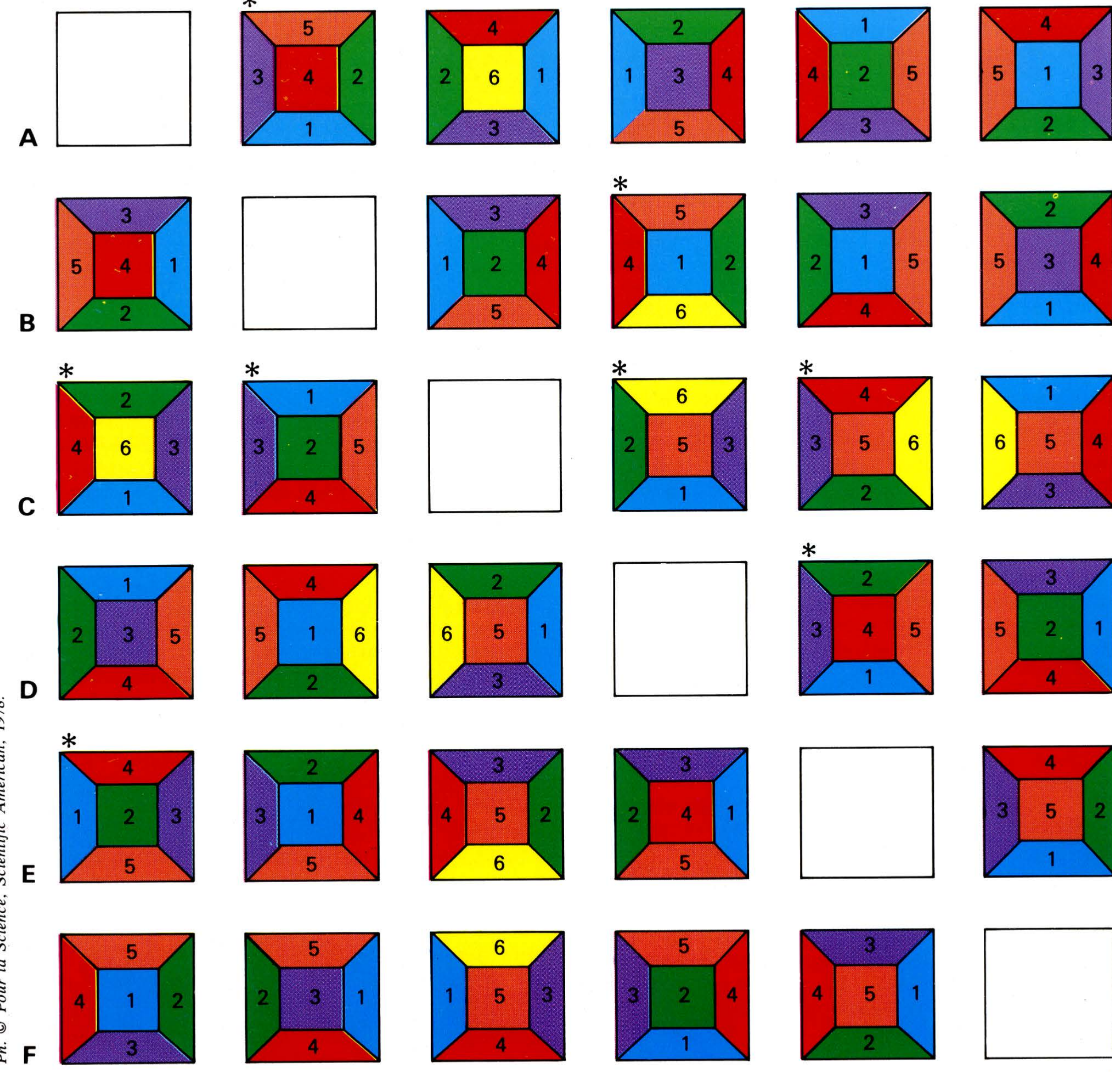
On notera qu'une forme quadratique a plusieurs formes canoniques, qui dépendent de la transformation T utilisée.

● *Formes normales.* Si la forme quadratique est complexe, on montre qu'il existe une forme canonique dont tous les coefficients sont égaux à 1, c'est-à-dire qui s'écrit d'une manière générale :

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2 . \qquad (25)$$

Si la forme quadratique est réelle, on peut trouver une forme canonique telle que tous les coefficients soient égaux à $+1$, à -1 ou à 0. De telles formes canoniques sont dites *formes normales*.

● *Formes quadratiques positives.* Une forme quadratique f est dite *définie positive* si sa forme normale est la somme des carrés des variables avec les coefficients $+1$, ou encore si f est de rang n. On peut démontrer le théorème suivant, en considérant le déterminant de la matrice des coefficients d'une forme



6 × 6 matrice destinée à résoudre le problème-jeu des 30 cubes colorés, qui est un jeu mathématique classique (d'après Scientific American, *septembre 1978).*

quadratique : pour qu'une forme quadratique f de n variables à coefficients réels soit une forme définie positive, il faut et il suffit que tous ses mineurs principaux soient positifs.

Tenseurs.

Remarques historiques.

La notion de *tenseur* et l'*analyse tensorielle* qui lui est associée ont une origine à la fois pratique et théorique.

Par « pratique », nous entendons ici les besoins des physiciens. Ceux-ci, lorsque les règles du calcul vectoriel furent bien établies, se sont largement servis de ces êtres mathématiques pour représenter divers aspects des réalités physiques et ils ont contribué au développement de l'*analyse vectorielle* en introduisant les notions de *flux*, de *divergence*, de *rotationnel*, etc. A ces travaux de physique mathématique sont associés les noms de Stokes, Maxwell, Heaviside, Gibbs, Lorentz. Parallèlement, les mathématiciens ont précisé la théorie et l'axiomatique de l'analyse vectorielle (diffusion des travaux de Riemann et de Grassmann, à partir de 1870). A la fin du XIXe siècle, l'étude des tensions à l'intérieur d'un solide déformé a conduit les physiciens à étudier un système de six nombres, susceptible de varier en même temps que les coordonnées d'un point, et que Voigt, auteur de travaux de physique cristalline, nomma un *tenseur* (1898). Le terme fut repris par Gibbs (1902), et les physico-mathématiciens de cette époque utilisèrent ce concept pour étudier la statique des milieux continus, et précisèrent les lois du calcul tensoriel.

Par « théorique » il faut entendre les recherches effectuées par les mathématiciens dans le domaine de la *géométrie différentielle*, c'est-à-dire de la géométrie qui fait appel au calcul différentiel et au calcul des dérivées pour étudier des notions telles que celle de *courbure* par exemple. Ces travaux remontent à Riemann (1854) et à Christoffel (1869) ; ils ont donné naissance à une théorie générale appelée *calcul différentiel absolu*, ou, comme on dit de nos jours, *analyse tensorielle* explicitée par l'Italien G. Ricci (1884), puis Levi-Civita (1901).

L'analyse tensorielle fournit l'algorithme nécessaire à l'exposition de la théorie de la relativité générale (Einstein, 1916) et se révèle un outil de choix pour décrire certaines théories physiques (mécanique quantique, mécanique des fluides, théorie de l'élasticité, etc.). La théorie elle-même s'est précisée en 1917 (introduction de la notion de translation dans la géométrie riemannienne par Levi-Civita et Schouten), 1918 (espaces à connexions affines de Schouten et H. Weyl) et 1936 (variétés différentielles, Whitney).

De quoi s'agit-il ?

Le calcul tensoriel est une théorie trop abstraite pour être résumée dans le cadre de cet ouvrage. On retiendra ici qu'un *tenseur* est un tableau de « nombres » (ou d'éléments abstraits) qui dépend d'un système de coordonnées qui se transforment selon des règles déterminées.

Considérons par exemple deux points P et Q dans un espace à n dimensions ; appelons x_i les coordonnées de P et y_k celles de Q, i et k prenant toutes les valeurs de 1 à n. Le tableau de tous les produits $x_i y_k$ est un *tenseur*, dont chaque valeur de $x_i y_k$ est une composante. La notion peut être généralisée ; elle fait alors l'objet du *calcul tensoriel*, dont les applications en physique mathématique et en mathématiques pures sont nombreuses et fécondes.

Voici comment on peut définir, d'une manière générale, la notion de tenseur. Considérons deux espaces vectoriels sur un corps K, notés E et E^* ; appelons $\boldsymbol{v}$ un vecteur de E, $\boldsymbol{v}^*$ un vecteur de E^* ; les vecteurs nuls des deux espaces seront notés $\boldsymbol{O}$ et $\boldsymbol{O}^*$. Si les deux conditions suivantes sont satisfaites, à savoir :

1 - on sait faire correspondre à tout couple $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}^*)$ un scalaire $k \in K$ appelé *produit scalaire* des vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{v}^*$ (lorsque $k = 0$, les vecteurs sont dits *orthogonaux*) ;

2 - $\boldsymbol{O}$ est le seul vecteur de E qui soit orthogonal à tout vecteur $\boldsymbol{v}^*$ de E^*, et $\boldsymbol{O}^*$ est le seul vecteur de E^* qui soit orthogonal à tout vecteur $\boldsymbol{v}$ de E ;

Alors les espaces E et E^* sont dits *duals*. Cela dit, soit p espaces $E_1, E_2, ..., E_p$ de dimensions finies sur un corps K et considérons le produit cartésien des duals $E_1^* \times E_2^* \times ... \times E_p^*$. L'espace vectoriel des formes p-linéaires sur ce produit est appelé *espace produit tensoriel* des espaces $E_1, E_2, ..., E_p$ et chaque élément de cet espace est appelé un *tenseur*. Le produit tensoriel des espaces $E_1, ..., E_p$ se note par le symbole $\otimes$.

POLYNÔMES ET THÉORIE DES ÉQUATIONS.

Après l'algèbre des structures — qui est la forme la plus générale de l'algèbre qui conditionne toutes les autres — et l'algèbre linéaire — qui est l'outil par excellence des branches les plus importantes des mathématiques — il nous reste à présenter l'algèbre classique, dont l'objet est principalement la théorie des équations. Nous y inclurons l'étude des polynômes et celle des fractions rationnelles.

Les polynômes.

Un exemple trivial.

Plaçons-nous dans l'ensemble $\mathbb{R}$, qui est celui de l'algèbre élémentaire et appelons x un réel quelconque (ce qui s'écrit, rappelons-le, $x \in \mathbb{R}$). Voici un exemple de calcul susceptible d'être effectué sur les nombres tels que x.

Supposons que x désigne une *longueur indéterminée* (mesurée en mètres) ; alors x^2 désignera la surface d'un carré de côté x et x^3 le volume d'un cube d'arête x.

Imaginons qu'une personne achète :

— une corde dont la longueur vaut trois fois la longueur x, c'est-à-dire $3\,x$ mètres, et dont le prix est de 2 francs le mètre ; cette corde coûte donc :

$$3\,x \times 2 = 6\,x \text{ francs ;}$$

— un panneau de contre-plaqué de surface $2\,x^2$ (en mètres carrés), au prix de 12 francs le mètre carré ; ce panneau coûte donc : $2\,x^2 \times 12 = 24\,x^2$ francs ;

— un tonneau de vin de capacité égale à x^3 (en mètres cubes), au prix de 2 francs le litre (c'est-à-dire de 2 000 francs le mètre cube, puisqu'il y a 1 000 litres dans un mètre cube) ; coût : $2\,000\,x^3$ francs.

Après ces achats, il lui reste 50 francs. On demande d'exprimer la somme que cette personne possédait initialement. Il est bien évident que cette somme dépend de x et qu'on ne peut la connaître, puisque x est indéterminé ; néanmoins on peut l'exprimer en francs sous la forme

$$50 + 6\,x + 24\,x^2 + 2\,000\,x^3 . \quad (1)$$

Une expression telle que (1) s'appelle un *polynôme à une indéterminée* (l'indéterminée est x) ; on la représente souvent par $P(x)$ qui se lit « P de x » (P est l'initiale du mot « polynôme »).

Les achats d'une seconde personne conduiraient à établir, par exemple, le polynôme

$$P_1(x) = 30 + 2\,x - 15\,x^2 + 50\,x^3 , \quad (2)$$

le signe « − » devant $15\,x^2$ signifiant une dette équivalente à la somme $15\,x^2$ francs. Pour une autre personne on pourrait avoir :

$$P_2(x) = 15 - 2\,x + 3\,x^2 , \quad (3)$$

etc.

Ce qui distingue les polynômes P, P_1, P_2, ..., ce n'est pas la présence de l'indéterminée x à la puissance 1, à la puissance 2, etc., c'est l'ensemble des *coefficients* :

(50, 6, 24, 2 000) pour le premier polynôme ;
(30, 2, − 15, 50) pour le deuxième polynôme ;
(15, − 2, 3) pour le troisième polynôme.

Enfin, on peut, bien entendu, envisager des opérations sur les polynômes telles que $P + P_1$, ou $P \times P_1$.

Ces remarques vont nous conduire à une définition un peu plus générale des polynômes. Dans ce qui suit, x définira toujours la grandeur indéterminée sur laquelle on calcule, et les coefficients seront notés à l'aide de lettres minuscules comme a, b, c, ... ou — afin de ne pas épuiser trop vite l'alphabet — par des lettres minuscules affectées d'un *indice*, c'est-à-dire d'un nombre entier (0, 1, 2, ...) écrit en petits caractères en bas et à droite d'une lettre :

a_1 se lit « *a un* » ou « *a indice* 1 ».

La notation indicielle, que nous avons déjà rencontrée, effraye parfois les non-mathématiciens ; elle n'a pourtant rien de bien mystérieux : c'est simplement un moyen commode de multiplier à l'infini les lettres de l'alphabet.

Polynômes dans le corps des réels.

● *Monômes.* Considérons le corps, $\mathbb{R}$, des réels et un élément quelconque, x, appartenant à $\mathbb{R}$. A tout x on peut associer un élément ax^n, a étant un réel déterminé et n un entier. Autrement dit, on considère l'application :

$$x \to ax^n , \quad x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} . \quad (4)$$

Une expression telle que ax^n s'appelle un *monôme*. En voici quelques exemples :

$$3\,x^5\,(a = 3, n = 5), \ \frac{\sqrt{2}}{5}\,x^7\left(a = \frac{\sqrt{2}}{5}, n = 7\right), \quad -\frac{1}{3}\,x^3\left(a = -\frac{1}{3}, n = 3\right) \text{ etc.} \quad (5)$$

Le nombre n définit le *degré* du monôme : les trois monômes ci-dessus sont respectivement du cinquième, du septième et du troisième degré. La convention $x^0 = 1$ pour tout x nous conduit à considérer le réel a comme un monôme de degré zéro ($a = ax^0$).

● *Polynômes.* Un polynôme est la somme d'un nombre fini de monômes ; sa valeur pour x s'écrit $P(x)$. On écrit généralement un polynôme en l'*ordonnant*, c'est-à-dire en classant ses termes (les monômes) par ordre croissant ou décroissant de degrés (on utilise souvent l'ordre *croissant* pour les exposés théoriques, l'ordre *décroissant* pour les calculs). Le *degré d'un polynôme* est le degré du monôme de plus haut degré. Un polynôme de degré n s'écrit, par exemple :

$$P(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n\,x^n \ (a_n \neq 0). \quad (6)$$

On peut aussi écrire, en abrégé, avec le signe Σ (*sigma*) qui indique une somme :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i\,x^i , \quad (7)$$

qui se lit : « somme de $a_i\,x^i$ de $i = 0$ à n » et qui signifie qu'on obtient les termes successifs du polynôme $P(x)$ en remplaçant i (l'indice général) par toutes les valeurs entières 0, 1, 2, 3, ..., n.

Habituons-nous à cette notation très usuelle en mathématiques. Écrivons par exemple le polynôme :

$$P(\omega) = \sum_{i=0}^{i=n} \lambda_i\,\omega^i , \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad i = \{0, 1, 2 \ldots n\} \in \mathbb{N} . \quad (8)$$

Nous avons choisi à dessein des lettres grecques : ω (*omēga*) et λ (*lambda*) pour familiariser le lecteur avec les notations usuelles. L'expression précédente signifie qu'on considère un polynôme dont la variable est le nombre réel (indéterminé) ω, et dont les coefficients sont $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$. Le terme de degré zéro ($i = 0$) est le monôme $\lambda_0\,\omega^0 = \lambda_0$ (puisque $\omega^0 = 1$ par définition). Le terme de degré 1 est $\lambda_1\,\omega^1 = \lambda_1\,\omega$; celui de degré 2, $\lambda_2\,\omega^2$; et ainsi de suite jusqu'à $\lambda_n\,\omega^n$, terme de degré n. On a donc :

$$P(\omega) = \sum_{i=0}^{i=n} \lambda_i\,\omega^i = \lambda_0 + \lambda_1\,\omega + \lambda_2\,\omega^2 + \cdots + \lambda_n\,\omega^n . \quad (9)$$

Léopold Kronecker (1823-1891), mathématicien allemand dont les travaux ont concerné principalement la théorie des nombres et l'algèbre (théorie des corps de nombres algébriques).



• *Polynômes identiques.* Deux polynômes sont dits *identiques* si, après réduction, leurs coefficients homologues sont égaux deux à deux. Par exemple les polynômes :

$$P(x) = 5 - x + 2x^2 \quad \text{et} \quad Q(x) = a - (a+b)x + 2x^2$$

sont identiques à la condition que :

$$a = 5 \quad \text{et} \quad (a+b) = 1\,,$$

soit $b = 1 - 5 = -4$.

• *Addition.* La somme de deux polynômes est un polynôme dont chaque coefficient est la somme des coefficients correspondants des deux polynômes considérés. Par exemple :

$$P(x) = 5 - x + 2x^2, \qquad Q(x) = 1 - 7x^2 + 12x^3$$

ont respectivement comme coefficients :

$$(5, -1, 2) \quad \text{et} \quad (1, 0, -7, 12)\,,$$

le nombre 0 indiquant que $Q(x)$ n'a pas de terme du premier degré. Les coefficients de $S(x) = P(x) + Q(x)$ sont :

$$(5+1, -1+0, 2-7, 12) = (6, -1, -5, 12)\,;$$

on a donc :

$$S(x) = 6 - x - 5x^2 + 12x^3\,. \qquad (10)$$

On vérifie sans peine que :

— l'addition des polynômes est commutative et associative ;

— il existe un *polynôme neutre p* tel que : $P(x) + p = P(x)$; les coefficients de p sont : (0, 0, 0, ..., 0) ; on dit que p est *identiquement nul* ;

— à chaque polynôme $P(x)$ correspond un opposé $-P(x)$, obtenu en changeant de signe les coefficients de $P(x)$. Par exemple, l'opposé de :

$$P(x) = 2 - 5x + x^2$$

est :

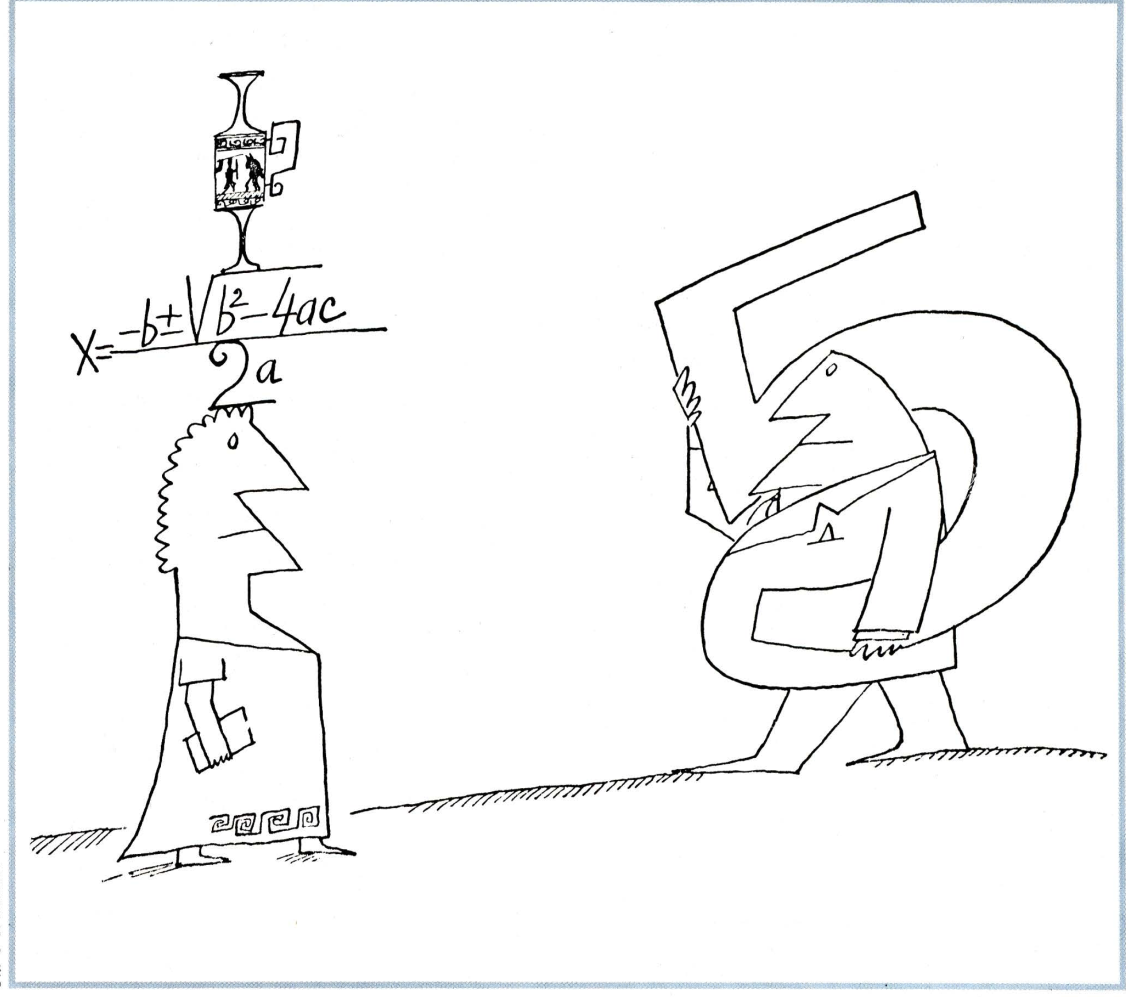
$$-P(x) = -2 + 5x - x^2\,.$$

• *Multiplication.* Le produit de deux polynômes s'obtient en multipliant chaque terme de l'un par tous les termes de l'autre et en formant la somme algébrique des produits partiels obtenus. Le résultat est un polynôme dont le degré est égal à la somme des degrés des polynômes multipliés (voir la disposition du calcul p. 140). La multiplication est associative, commutative, distributive par rapport à l'addition ; l'élément neutre est le polynôme équivalent à 1, de coefficients (1, 0, 0, ..., 0).

• *Soustraction.* Cette opération se ramène à l'addition : pour retrancher un polynôme $Q(x)$ d'un polynôme $P(x)$, on ajoute à $P(x)$ l'opposé de $Q(x)$.

• *Division.* C'est l'opération inverse de la multiplication ; elle est étudiée ci-après, p. 70.

• *Multiplication par un réel.* Un polynôme $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ peut être multiplié par un nombre réel quelconque λ (*lambda*). On obtient un polynôme dont les coefficients sont λa_0, λa_1, ..., λa_n.



Ph. © X-D.R./T.

Allégorie de la rencontre du connu et de l'inconnu. ***Dessin de Saul Steinberg. (The New Yorker Magazine, Inc., 1962.)***

Nécessité d'une généralisation.

En algèbre élémentaire, on enseigne à calculer sur les polynômes réels, dont nous venons de parler. Quand on donne à x des valeurs réelles, le polynôme $P(x)$ prend lui-même des valeurs réelles correspondantes, qu'on écrit $P(5)$ pour $x = 5$ par exemple, $P(a)$ pour $x = a$. L'établissement d'une telle correspondance fait songer à l'idée de fonction :

$$x \to P(x)\,. \qquad (11)$$

Or nous avons vu que ce qui caractérise un polynôme, c'est l'ensemble de ses coefficients (qui, en algèbre élémentaire, sont des nombres réels et, très souvent, des entiers relatifs). On peut donc convenir, une fois pour toutes, d'écrire un polynôme à une indéterminée sous la forme :

$$P = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n; 0, 0, 0, ...)\,, \qquad (12)$$

a_0 étant le coefficient du terme de degré 0 (appelé aussi *terme constant*) ;

a_1 étant le coefficient du terme de degré 1 ;

a_2 étant le coefficient du terme de degré 2 ;

... ;

a_n étant le coefficient du terme de degré n.

Les coefficients des termes de degré supérieur à n sont nuls. Ainsi le polynôme du cinquième degré en x :

$$P(x) = 1 + x^2 - x^3 - x^4 + x^5\,,$$

s'écrit aussi :

$$P = (1, 0, 1, -1, -1, 1, 0, 0, ...)$$

(il n'y a pas de terme du premier degré, donc $a_1 = 0$).

Autrement dit, un *polynôme* peut être défini comme une suite infinie d'éléments dont tous les termes au-delà du rang n sont nuls (dans l'exemple qui précède : tous les termes au-delà du rang 5 sont nuls). En algèbre élémentaire (celle qu'on enseigne dans les collèges et les lycées), les éléments en question sont des nombres réels (corps $\mathbb{R}$) ou des relatifs (anneau $\mathbb{Z}$). Le fait que l'ensemble des éléments a_0, a_1, ... ait une structure d'anneau permet l'addition et la multiplication de ces éléments selon les règles connues.

Il est assez naturel de généraliser la notion de polynôme et d'appeler *polynôme* à *une indéterminée*, ou encore *polynôme formel*, toute suite de la forme :

$$P = (a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0, ...)\,,$$

un élément a_i quelconque appartenant à un anneau commutatif A qui n'est pas nécessairement l'anneau, $\mathbb{Z}$, des relatifs ou le corps, $\mathbb{R}$, des réels, mais un ensemble d'éléments quelconques. Les polynômes de l'algèbre élémentaire, sur lesquels des générations d'écoliers ont appris à calculer, se présentent alors comme un *cas particulier* des polynômes en général, dont nous allons maintenant étudier les propriétés.

Les polynômes formels.

• *Définitions :*

1 - *Polynôme.* Soit un anneau A dont les éléments sont représentés par la lettre a munie d'un indice et dont l'élément neutre pour l'addition, dit *élément nul*, est noté par le symbole 0 (qui se lit « zéro »). Toute suite infinie telle que $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n, 0, 0, ...)$, a_n désignant le dernier élément non neutre de la suite, est appelée *polynôme formel* et désignée par $P = [a_i]$, a_i désignant le terme général de la suite considérée (on obtient les termes particuliers en faisant successivement $i = 0$, $i = 1$, ..., $i = n$).

2 - *Degré d'un polynôme non nul.* L'entier n qui affecte le dernier coefficient non nul s'appelle le degré du polynôme ; on écrit symboliquement $d^\circ P = n$ (lire : « degré de $P = n$ »).

3 - Par définition deux polynômes sont égaux (identiques) si tous leurs coefficients sont égaux.

4 - *Monôme.* On appelle monôme un polynôme dont tous les éléments sont neutres sauf un seul.

Un ensemble de polynômes formels sera désigné par la lettre $\mathcal{P}$. La structure de l'ensemble $\mathcal{P}$ dépend des opérations définies sur les polynômes P.

• *Opérations dans l'ensemble* $\mathcal{P}$. Ces opérations sont résumées ci-dessous. Soient deux polynômes $P = [a_i]$ et $Q = [b_i]$ dont les coefficients, a_i et b_i, appartiennent à un anneau A (revoir éventuellement la structure d'anneau pp. 41-42). On peut définir dans cet ensemble deux lois de composition interne (addition et multiplication des polynômes) et une loi de composition externe (multiplication d'un polynôme par un scalaire) :

1 - *Addition.* Définition : $P + Q = [a_i + b_i]$. Propriétés : opération commutative, admettant comme élément neutre le polynôme identiquement nul (0, 0, 0, ..., 0) ; chaque $P = [a_i]$ a un opposé : $-P = [-a_i]$.

2 - *Multiplication par un scalaire interne* $\lambda \in A$. Définition : $\lambda P = [\lambda a_i]$. Propriétés : $(\lambda + \mu)\ P = \lambda P + \mu P$; $\lambda(P + Q) = \lambda P + \lambda Q$; $\lambda(\mu P) = (\lambda\mu)\ P$.

3 - *Produit de deux polynômes.* Définition : $PQ = [c_i]$, avec $c_i = \Sigma\, a_t b_s$, où $t + s = i$ (voir ci-dessous l'explication de cette formule). $d^\circ(PQ) = d^\circ P + d^\circ Q$. Propriétés : opération commutative ; associative ; distributive par rapport à l'addition ; admettant pour élément neutre le polynôme (1, 0, 0, ..., 0), *polynôme unité*.

Explication de la formule $c_i = \sum_{t+s=i} a_t b_s$. Soient, pour fixer les idées, les polynômes $P = [a_i] = (a_0, a_1, a_2, 0, 0)$ et $Q = [b_i] = (b_0, b_1, b_2, 0, 0, ...)$. Calculons les coefficients du produit $PQ = [c_i]$ en faisant successivement $i = 0, 1, 2, ...$ Comme P et Q comptent chacun trois éléments, on ne peut avoir que $t = 0$, 1, ou 2 et $s = 0$, 1, ou 2, donc $i = t + s = 0, 1, 2, 3$ ou 4. On a donc successivement :

$$i = 0 \quad t = 0 \Rightarrow s = 0 \quad \text{et } c_0 = a_0 b_0\,;$$

$$i = 1 \quad \left\{\begin{matrix} t = 0 \Rightarrow s = 1 \\ t = 1 \Rightarrow s = 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{et } c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0\,;$$

$$i = 2 \quad \left\{\begin{matrix} t = 0 \Rightarrow s = 2 \\ t = 1 \Rightarrow s = 1 \\ t = 2 \Rightarrow s = 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{et } c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0\,;$$

$$i = 3 \quad \left\{\begin{matrix} t = 1 \Rightarrow s = 2 \\ t = 2 \Rightarrow s = 1 \end{matrix}\right\} \quad \text{et } c_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1\,;$$

$$i = 4 \quad t = 2 \Rightarrow s = 2 \quad \text{et } c_4 = a_2 b_2\,;$$

soit

$$PQ = (a_0\,b_0,\ a_0\,b_1 + a_1\,b_0,\ a_0\,b_2 + a_1\,b_1 + a_2\,b_0,\ a_1\,b_2 + a_2\,b_1,\ a_2\,b_2)\,.$$

On remarque que $d^0(PQ) = 2 + 2 = 4$.

— *Structure de l'ensemble* $\mathcal{P}$. L'existence des opérations 1 et 3 définies ci-dessus confère à l'ensemble $\mathcal{P}$ la structure d'*anneau* ; on parle d'un *anneau de polynômes*. Si les coefficients sont pris dans un corps K, l'ensemble $\mathcal{P}$ est un espace vectoriel sur K (voir p. 47). Si on se limite à des polynômes de degré au plus égal à n, cet espace est à $(n + 1)$ dimensions, puisqu'il y a $(n + 1)$ termes dans un polynôme de degré n.

Considérons donc un anneau de polynômes sur un corps K et désignons par x le polynôme $(0, 1, 0, 0...)$. En appliquant la règle donnant le produit de deux polynômes, on voit que $x^2 = (0, 0, 1, 0...)$, $x^3 = (0, 0, 0, 1, 0...)$ et, notant 1 le polynôme $(1, 0, 0...)$, on voit que le polynôme de coefficients $a_0, a_1, a_2 ... a_n$ s'écrit :

$$a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 ... + a_n\,x^n\,. \qquad (13)$$

On peut alors lui associer une fonction, dite *fonction polynôme*, qui au nombre $x \in K$ associe le nombre :

$$a_0 + a_1\,x + \cdots + a_n\,x^n\,. \qquad (14)$$

L'anneau des polynômes tels que P s'appelle *anneau des polynômes à une indéterminée sur* K et se note $K[x]$. Voici quelques cas particuliers d'anneaux de ce type, qui nous font retrouver — à titre d'exemple particulier — l'algèbre élémentaire.

1 - L'anneau $\mathbb{C}[x]$ est composé des polynômes à coefficients a_i complexes et dont la variable est complexe.

2 - L'anneau $\mathbb{R}[x]$ comprend les polynômes à coefficients réels et dont la variable est réelle : c'est l'anneau étudié en algèbre élémentaire et rencontré plus haut (voir p. 66).

3 - L'anneau $\mathbb{Q}[x]$ comprend les polynômes à coefficients rationnels dont la variable est rationnelle. $\mathbb{Q}[x]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}[x]$, qui est lui-même un sous-anneau de $\mathbb{C}[x]$.

● *Intégrité.* Nous avons défini p. 42, ce qu'on appelle un *anneau d'intégrité*. Rappelons cette définition : c'est un anneau dans lequel l'égalité :

$$ac = bc\,,$$

entraîne l'égalité $a = b$ pour tout $c \neq 0$ (0 étant l'élément neutre pour l'addition), propriété appelée *loi de simplification pour le produit*. Cette propriété peut aussi s'énoncer : si l'égalité $ab = 0$, avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, est possible, alors la loi de simplification ne peut s'appliquer (ce qui signifie : le produit de deux facteurs non nuls ne peut être nul). En général les anneaux dont on se sert usuellement pour construire les polynômes sont des anneaux d'intégrité ; ils ont, en outre, un élément neutre pour la multiplication, ce qui en fait des *domaines d'intégrité*. Dans ce cas l'anneau $\mathcal{P}$ construit sur de tels domaines est lui-même un domaine d'intégrité.

Division euclidienne.

Nous raisonnerons, dans ce qui suit, sur des polynômes construits sur un corps K et constituant un domaine d'intégrité. L'ensemble de ces polynômes sera dénommé $K[x]$; mais la lettre K ne doit pas induire le lecteur en erreur : en général, lorsque K est un corps, l'anneau $K[x]$ *n'est pas* un corps. Si le lecteur trouve ce qui suit trop abstrait, il peut remplacer tout polynôme A, B, ... de l'anneau considéré par un polynôme à termes réels : mais il se privera alors de la généralité de la théorie.

D'autre part, pour étudier ce qu'on appelle la *division euclidienne des polynômes*, nous écrirons ceux-ci, non pas dans l'ordre utilisé jusqu'ici :

$$a_0 - a_1\,x^1 + \cdots + a_n\,x^n\,,$$

c'est-à-dire l'ordre des puissances croissantes de x, mais dans l'*ordre des puissances décroissantes* :

$$a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$$

(c'est l'ordre utilisé en algèbre élémentaire).

● *Division euclidienne des polynômes.* On démontre le théorème suivant : étant donné, dans un anneau $K[x]$, un polynôme A appelé *dividende* et un polynôme B appelé *diviseur*, distinct du polynôme identiquement nul, il existe, et d'une seule façon, deux polynômes Q et R appartenant à l'anneau K, appelés respectivement *quotient* et *reste* de la division de A par B, tels que :

$$A = BQ + R, \qquad (15)$$

avec $d^0\,R < d^0\,B$ ou $R = 0$.

La recherche des polynômes Q et R s'appelle la *division euclidienne* de A par B. Lorsque $R = 0$, l'équation précédente s'écrit $A = BQ$, et l'on dit que B est un diviseur de A (ou que A est un multiple de B).

● *Disposition pratique.* Pour diviser le polynôme A par le polynôme B on détermine les termes successifs de Q (par degrés décroissants) en formant la suite des restes partiels A_1, A_2, ... jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste tel que $d^0\,R < d^0\,B$ ou $R = 0$, ce qui indique que la division est terminée. Voici le détail des opérations sur un exemple, avec :

$$A = -\,x^4 + 5\,x^3 + x^2 + 1, \quad B = 2\,x^3 + x - 1\,.$$

1 - On pose la division comme une division numérique, en laissant des blancs au dividende, éventuellement, pour les degrés manquants (ici : un blanc, que nous avons signalé par un petit carré, à la place du terme en x qui manque dans A) :

$$\begin{array}{l|l} -\,x^4 + 5\,x^3 + x^2 + \square + 1 & 2\,x^3 + x - 1 \\ \hline \end{array}$$

2 - On divise le premier terme de A (soit $-\,x^4$) par le premier terme de B (soit $2\,x^3$) et on inscrit le quotient sous la ligne horizontale. Ici, on obtient : $-\,x^4/2\,x^3 = -\,x/2$, et l'on écrit :

$$\begin{array}{l|l} -\,x^4 + 5\,x^3 + x^2 + \square + 1 & 2\,x^3 + x - 1 \\ \cline{2-2} & -\dfrac{x}{2} \end{array}$$

3 - On multiplie — toujours comme dans une division ordinaire — le diviseur B par le terme $-\,x/2$, ce qui donne le polynôme : $-\,x^4 - x^2/2 + x/2$, et l'on soustrait ce polynôme de A, ce qui donne le premier reste partiel A_1. Pour effectuer la soustraction, on a intérêt à écrire le polynôme $-\,x^4 - x^2/2 + x/2$ *sous* le polynôme A, en changeant les signes de tous ses termes ; le polynôme devient alors :

$$x^4 + x^2/2 - x/2 :$$

$$\begin{array}{lcl|l} A & = & -\,x^4 + 5\,x^3 + x^2 \quad + \square \quad + 1 & 2\,x^3 + x - 1 \\ \cline{4-4} & & x^4 \qquad\qquad + \dfrac{x^2}{2} \quad - \dfrac{x}{2} & -\dfrac{x}{2} \\ \cline{1-3} A_1 & = & 0 + 5\,x^3 + \dfrac{3\,x^2}{2} - \dfrac{x}{2} \quad + 1 & \end{array}$$

4 - On refait les opérations 2 et 3 en considérant le premier reste partiel A_1 comme un nouveau dividende. Le terme obtenu ici au quotient est $5\,x^3/2\,x^3 = 5/2$, qu'on inscrit à la suite de $-\,x/2$; la multiplication par B, puis la soustraction de A_1 donne le deuxième reste partiel A_2 :

$$\begin{array}{lcl|l} A & & -\,x^4 + 5\,x^3 + x^2 \quad + \square \quad + 1 & 2\,x^3 + x - 1 \\ \cline{4-4} & & x^4 \qquad\qquad + \dfrac{x^2}{2} \quad - \dfrac{x}{2} & -\dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2} \\ \cline{1-3} A_1 & = & 0 + 5\,x^3 + \dfrac{3\,x^2}{2} - \dfrac{x}{2} \quad + 1 & \\ & & -\,5\,x^3 \qquad\qquad - \dfrac{5\,x}{2} + \dfrac{5}{2} & \\ \cline{1-3} A_2 & = & \dfrac{3\,x^2}{2} - 3\,x + \dfrac{7}{2} & \end{array}$$

5 - Le reste A_2 est de degré 2 (son terme de plus haut degré est, en effet, $3\,x^2/2$) ; c'est donc le reste R cherché et l'opération est terminée. On a $Q = -\,x/2 + 5/2$ et l'on peut écrire $A = BQ + R$, c'est-à-dire :

$$(-\,x^4 + 5\,x^3 + x^2 + 1) =$$
$$= (2\,x^3 + x - 1)\left(-\frac{x}{2} + \frac{5}{2}\right) + \frac{3\,x^2}{2} - 3\,x + \frac{7}{2}\,.$$

Le quotient Q et le reste R s'écrivent aussi (pour faire apparaître des coefficients entiers) :

$$Q = -\frac{1}{2}(x - 5) \quad \text{et} \quad R = \frac{1}{2}(3\,x^2 - 6\,x + 7)\,.$$

On trouvera énoncées quelques conséquences fondamentales relatives à l'existence d'un couple unique de polynômes tels que Q et R p. 141.

Racines d'un polynôme.

● *Définition.* Soit un polynôme P appartenant à l'anneau $K[x]$. Pour fixer les idées nous supposerons



Ph. © Archives Photeb/T.

Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) : il fut, avec Diderot, l'animateur de l'Encyclopédie, mais aussi un mathématicien, qui s'est notamment illustré par ses efforts pour démontrer le théorème fondamental de l'algèbre, en 1746 (ce théorème sera démontré complètement, pour la première fois, quelques années plus tard, par Gauss).

que le corps K est le corps des complexes. On appelle *racine* de ce polynôme toute valeur $x \in K$ pour laquelle ce polynôme prend la valeur 0. Par exemple :

— Le polynôme $A(x) = 3\,x^2 - 5\,x + 2$ s'annule pour les valeurs $x_1 = 1$ et $x_2 = 2/3$ (il suffit de remplacer x par x_1 ou par x_2 et de faire les calculs pour le vérifier). On peut donc écrire $A(1) = A(2/3) = 0$. Les nombres 1 et 2/3 sont les *racines* du polynôme $A(x)$; on remarque qu'elles sont toutes deux réelles.

— Le polynôme $B(x) = x^2 - 2\,x + 2$ s'annule pour $x_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $x_2 = 1 - \mathrm{i}$. Ici aussi, nous laissons au lecteur le soin de le vérifier. On peut donc écrire, comme précédemment, $B(1 + \mathrm{i}) = B(1 - \mathrm{i}) = 0$: les deux nombres $1 \pm \mathrm{i}$ sont les racines du polynôme $B(x)$. On remarque qu'il s'agit de deux nombres complexes conjugués.

● *Division par* $x - a$. On démontre le théorème suivant : le reste de la division d'un polynôme par $x - a$ s'obtient en remplaçant x par a dans ce polynôme. Donc : une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme soit divisible par $x - a$ est que a soit une racine de ce polynôme : en effet, si un polynôme $A(x)$ est divisible par $x - a$, cela signifie que le reste de la division de $A(x)$ est nul, or, d'après le théorème précédent, ce reste a pour valeur $A(a)$. La condition $A(a) = 0$ exprime que a est une racine du polynôme $A(x)$.

● *Zéros d'un polynôme.* Soit $P(x)$ un polynôme quelconque et a une racine de ce polynôme. Dans ce cas, en vertu de ce qu'on vient de dire, $P(x)$ est divisible par $x - a$ et l'on peut écrire :

$$P(x) = (x - a)^p\,Q(x)\,. \qquad (16)$$

a est appelé le *zéro d'ordre* p du polynôme $P(x)$. Si $p = 1$, a est une *racine simple* du polynôme ; si $p = 2$, a est une *racine double* du polynôme ; si $p = 3$, a est une *racine triple* du polynôme ; etc. On démontre qu'un polynôme de degré n possède au plus n zéros distincts. Par exemple considérons les polynômes :

$$P_1(x) = (x - 1)\,(x + 2)\,Q(x)$$

et

$$P_2(x) = (x - 1)^2\,Q'(x)\,. \qquad (17)$$

$P_1(x)$ est divisible par $x - 1$ et par $x + 2$; il admet donc comme racines $x_1 = 1$ et $x_2 = -\,2$; ces deux racines sont des *racines simples*, et 1 et $-\,2$ sont appelés des *zéros d'ordre 1*. D'autre part, le polynôme $P_2(x)$ est divisible par $x - 1$ deux fois de suite, mais il n'admet qu'une seule racine $x = 1$, qu'on appelle une *racine double* : 1 est ici un *zéro d'ordre 2*.

● *Factorisation.* Soit P un polynôme construit sur le corps K ; si l'on peut mettre ce polynôme sous la forme :

$$P = ABC \dots N, \qquad (18)$$

$A, B, C, \dots, N$ étant des polynômes (dont aucun n'est une constante) de l'anneau $K[x]$, tous de degré inférieur à celui de P, on dit encore qu'on a décomposé le polynôme P en facteurs, ou encore qu'on l'a *factorisé*. Lorsque la décomposition n'est pas possible, le polynôme P est dit *indécomposable*.

Un exemple très simple est celui d'un polynôme du deuxième degré tel que $P = x^2 - 1$, qui peut aussi s'écrire, en utilisant une identité bien connue donnant la factorisation d'une différence de carrés : $P = (x+1)(x-1)$. P a été décomposé en un produit de deux polynômes, A et B, tous deux du premier degré, c'est-à-dire d'un degré inférieur au degré de P. Un polynôme tel que $A = x + 1$ est indécomposable, quel que soit le corps qui a servi à construire l'anneau considéré : lorsqu'on est parvenu à mettre un polynôme P sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré, on dit que la décomposition du polynôme est *complète*.

● *Le caractère décomposable ou indécomposable d'un polynôme* dépend essentiellement du corps de base choisi (sauf s'il s'agit d'un polynôme du premier degré, qui est toujours indécomposable). Par exemple, le polynôme $P = x^2 + 1$ est indécomposable sur le corps des réels. En effet, s'il existait une décomposition possible, elle devrait conduire à un produit de deux polynômes du premier degré de la forme

$$x^2 + 1 = (x-a)(x-b),$$

ce qui signifierait que P est divisible par $(x-a)$ et par $(x-b)$, autrement dit que a et b sont des racines de P. Or, un carré n'étant jamais négatif dans le corps des réels, une expression comme a^2+1 ou b^2+1 n'est jamais nulle (on ne peut pas avoir $a^2 = -1$), ce qui interdit à P d'avoir des racines réelles. Le polynôme x^2+1 est donc *indécomposable sur le corps* $\mathbb{R}$.

En revanche, sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes, la décomposition est possible. En effet le polynôme x^2+1 admet deux racines complexes conjuguées :

$$z = x + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad \bar{z} = x - \mathrm{i},$$

et l'on peut écrire $x^2 + 1 = (x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})$.

La question de la décomposition des polynômes sur les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ est très importante : nous la retrouverons et la préciserons en étudiant la résolution des équations algébriques, p. 71.

Les fractions rationnelles.

Définition générale.

● *Considérons l'anneau des polynômes*, $\mathcal{P} = \{A, B, \dots\}$, construit sur un corps quelconque K. Nous avons vu (ci-contre p. 68) qu'un polynôme A est *divisible* par un polynôme B s'il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$. Si ce polynôme n'existe pas, la division de A par B donne un reste, R, tel que :

$$A = BQ + R, \quad d^0 R < d^0 B.$$

Nous nous trouvons donc limités, dans $\mathcal{P}$, comme nous l'avions été dans $\mathbb{Z}$, où la division de l'entier a par l'entier b n'est pas toujours possible et impose d'écrire :

$$a = bq + r, \quad r < b.$$

Pour passer outre à cette impossibilité, nous avons construit une extension de $\mathbb{Z}$; en d'autres termes, nous avons ajouté à l'anneau des entiers relatifs les *fractions*, considérées comme des couples d'entiers (x, x') et généralement désignées par x/x'.

● *On peut procéder de même avec les polynômes* et agrandir l'anneau $K[x]$ des polynômes construits sur le corps K en un *corps* à l'aide des définitions suivantes.

— Soient A et B deux polynômes de l'anneau $K[x]$. On considère les couples (A, B), qui peuvent être aussi notés A/B. Le premier terme du couple, A, s'appellera le *numérateur*, le second terme du couple le *dénominateur*. Un couple tel que (A, B) sera appelé une *fraction rationnelle*.

— Deux couples A/B et A'/B' sont égaux si, et seulement si : $AB' = BA'$.

— La somme $\dfrac{A}{B} + \dfrac{A'}{B'}$ est égale à

$$\frac{A}{B} + \frac{A'}{B'} = \frac{AB' + BA'}{BB'}. \qquad (1)$$

— Le produit de deux couples est

$$\frac{A}{B} \times \frac{A'}{B'} = \frac{AA'}{BB'}. \qquad (2)$$

On démontre que l'ensemble des couples distincts A/B forme un *corps* qui admet l'élément neutre $0/A$ pour l'addition, et $A/A = 1/1$ pour la multiplication. Tout élément non nul A/B a un *inverse*, B/A. Un polynôme A de l'anneau $K[x]$ fait partie de ce corps si on l'écrit $A = A/1$. Ainsi A/B peut être considéré comme le *quotient exact* de A par B.

Exemples dans le corps des réels.

Si le lecteur a eu le courage de nous suivre jusqu'ici, il a pu constater que le calcul sur les polynômes se faisant aisément sans qu'on ait besoin de préciser dans quel corps on se plaçait (sauf pour la factorisation). Nous prendrons cependant nos exemples dans le corps des réels, car — en analyse notamment — on se place souvent dans cette perspective. Considérons donc les polynômes suivants, x désignant un nombre réel :

$$A = x^2 + 2x + 1, \quad A' = 3x + 5,$$
$$B = x - 1, \quad B' = x^2 - 1,$$

et les fractions rationnelles

$$\frac{A}{B} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}, \quad \frac{A'}{B'} = \frac{3x + 5}{x^2 - 1}.$$

● *Addition.* Pour additionner A/B et A'/B', nous allons appliquer la règle donnée dans le cadre de la définition ci-dessus, et écrire :

$$\frac{A}{B} + \frac{A'}{B'} = \frac{AB' + BA'}{BB'} = \frac{(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 1) + (x - 1)(3x + 5)}{(x - 1)(x^2 - 1)}; \qquad (3)$$

on effectuerait ensuite toutes les opérations : multiplication de $(x^2 + 2x + 1)$ par $(x^2 - 1)$, etc., et l'on obtiendrait le résultat sous la forme d'une fraction rationnelle C/D. Pour simplifier les calculs, on peut procéder autrement, en *remarquant* que B et B' ont un facteur commun, $(x - 1)$, puisque :

$$B = x - 1 \quad \text{et} \quad B' = (x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1). \qquad (4)$$

Ainsi donc, $B' = B(x + 1)$. Opérons donc de la sorte :

— remplaçons $\dfrac{A}{B}$ par $\dfrac{A(x+1)}{B(x+1)} = \dfrac{A(x+1)}{B'}$ (cela revient à multiplier $\dfrac{A}{B}$ par $\dfrac{x+1}{x+1}$, c'est-à-dire par 1) ;

— la somme $\dfrac{A}{B} + \dfrac{A'}{B'}$ devient :

$$\frac{A(x+1)}{B'} + \frac{A'}{B'} = \frac{A(x+1) + A'}{B'} = \frac{(x^2 + 2x + 1)(x + 1) + (3x + 5)}{(x^2 - 1)}. \qquad (5)$$

Les calculs à effectuer sont moins nombreux et moins longs que dans le premier cas. L'exemple qui précède est très simple ; dans la pratique, le problème est parfois compliqué et exige des calculateurs une certaine « gymnastique intellectuelle » qu'ils perfectionnent en faisant de nombreux (... et ennuyeux !) exercices.

● *Simplification des fractions rationnelles.* Soit une fraction rationnelle A/B dont le numérateur et le dénominateur peuvent se mettre sous la forme d'un produit de facteurs :

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1 . A_2 . A_3 . \dots A_n}{B_1 . B_2 . B_3 . \dots B_n}. \qquad (6)$$

On obtient une fraction rationnelle égale à A/B en éliminant les facteurs qui sont communs au numérateur et au dénominateur. Par exemple, la fraction

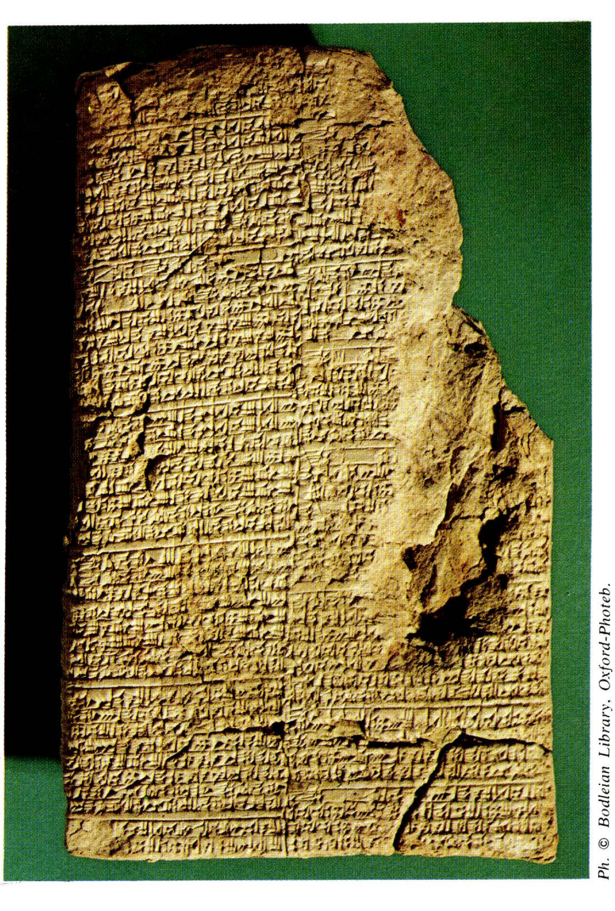
$$\frac{A}{B} = \frac{(x+1)(x^2 - 5x + 9)(x^3 - x^2 - x - 1)}{(x+1)(x^3 + 2x^2 - x - 1)} \qquad (7)$$

est égale à

$$\frac{A'}{B'} = \frac{(x^2 - 5x + 9)(x^3 - x^2 - x - 1)}{(x^3 + 2x^2 - x - 1)};$$

on a divisé le numérateur et le dénominateur par $(x+1)$, ce qui revient à diviser la fraction par 1, c'est-à-dire à la laisser identique.

Ce sont les Babyloniens qui, au IIe millénaire av. J.-C. (et peut-être même plus tôt), ont découvert les méthodes de résolution des équations du premier et du deuxième degré. La tablette cunéiforme ci-dessous (à gauche) contient plusieurs problèmes du second degré, résolus par la formule classique $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, en ne retenant que les solutions positives. Le savoir babylonien a été ignoré des mathématiciens grecs ; il a été retrouvé (?) par Diophante, au IVe siècle de notre ère, et transmis à l'Occident moderne par le mathématicien arabe al-Ḫārizmī (fin VIIIe siècle-début IXe siècle), dans un traité célèbre dont on voit ci-dessous à droite un manuscrit de 1342.





● *Multiplication et division.* Les deux opérations se correspondent, puisque l'on a :

$$\frac{A}{B}:\frac{A'}{B'}=\frac{A}{B}\times\frac{B'}{A'}. \qquad (8)$$

● *Principe général du calcul sur les fractions rationnelles dans* $\mathbb{R}$. Il est recommandé de procéder systématiquement de la manière suivante :

1° - écrire les deux termes de chaque fraction sous la forme d'un produit de facteurs ;

2° - simplifier la fraction rationnelle en supprimant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur ;

3° - effectuer les calculs demandés et exprimer le résultat sous la forme d'une fraction rationnelle dont les deux termes sont factorisés.

Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.

● *Décomposition sur le corps des réels.*

Soit à décomposer la fraction rationnelle $\frac{A}{B}$, A et B étant deux polynômes en x premiers entre eux, en éléments simples. On est conduit, dans la pratique, à considérer plusieurs cas.

1 - *B ne contient qu'un facteur irréductible du second degré.*

On pose *a priori* la décomposition et l'on cherche les coefficients des numérateurs des fractions simples en utilisant les relations d'identité.

Exemple : décomposer $\frac{4}{x(x^2+4)}$. On pose *a priori* :

$$\frac{4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}. \qquad (9)$$

Pour déterminer A, B et C, on peut réduire au même dénominateur les deux fractions du second membre et identifier les deux numérateurs ; il vient :

$$4=A(x^2+4)+x(Bx+C)=(A+B)\,x^2+Cx+4\,A, \qquad (10)$$

d'où, en identifiant :

$A+B=0$ (le coefficient du terme en x^2 est nul à gauche),

$C=0$ (le coefficient du terme en x est nul à gauche), et $4\,A=4$,

ce qui donne : $A=1$, $B=-1$ et $C=0$;

$$\text{donc : } \frac{4}{x(x^2+4)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}. \qquad (11)$$

2 - *B contient un facteur du second degré seulement, mais répété.*

Cela signifie que ce facteur est de la forme $(x^2+px+q)^n$. La fraction rationnelle peut être décomposée en n éléments simples comme précédemment.

Exemple : décomposer la fraction $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$.

On pose :

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}, \qquad (12)$$

et l'on obtient, après calculs, l'identité :

$$1=(A+B)\,x^4+Cx^3+(2\,A+B+D)\,x^2+(C+E)\,x+A, \qquad (13)$$

d'où l'on tire :

$$A=1,\ B=-1,\ C=E=0 \text{ et } D=-1,$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{(x^2+1)^2}. \qquad (14)$$

● *Décomposition sur le corps des complexes.*

Sur ce corps, le dénominateur de la fraction rationnelle à décomposer est toujours décomposable en un produit de facteurs du premier degré (théorème fondamental de l'algèbre). On obtiendra donc des éléments simples de la forme $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$, a étant une racine, réelle ou complexe, du dénominateur.

On dit aussi que a est un *pôle* (complexe ou réel) pour la fraction considérée.

Exemple : décomposer en éléments simples la fraction

$$\frac{1}{x^3-1}.$$

Le dénominateur admet trois racines, 1, j, $j^2=\bar{j}$; on a immédiatement :

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{j}{x-j}+\frac{\bar{j}}{x-\bar{j}}\right). \qquad (15)$$

Si la fraction est réelle, on peut grouper les éléments simples dont les numérateurs sont complexes conjugués : cela permet parfois d'obtenir la décomposition sur le corps des réels. Ainsi, dans l'exemple précédent, on a :

$$\frac{j}{x-j}+\frac{\bar{j}}{x-\bar{j}}=\frac{(j+\bar{j})\,x-2j\bar{j}}{x^2-(j+\bar{j})\,x+j\bar{j}} \qquad (16)$$

et, comme $j\,\bar{j}=1$ et $j+\bar{j}=-1$, on obtient :

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}\right) \qquad (17)$$

Les équations algébriques.

Qu'est-ce qu'une mise en équation ?

● *Un conte oriental.* Il était une fois, il y a cinq mille ans, un méchant gouverneur qui dirigeait le grenier d'une ville située dans le pays des Sumériens, à proximité du golfe Persique. Il était fort craint des scribes, à qui il demandait régulièrement l'état du trésor, car le roi de la ville était dépensier et le trésor était toujours vide ; pis encore, ce roi avait des dettes, car il empruntait au roi d'une ville voisine des sacs de grains pour payer les salaires de ses fonctionnaires. Aussi, lorsque le gouverneur du grenier royal demandait au scribe chargé de tenir les comptes : « Combien reste-t-il de sacs de grains dans le grenier ? », le scribe répondait toujours : « Il n'y a plus de sacs et, en outre, nous devons trois sacs (ou cinq sacs, ou dix sacs, cela dépendait) à la ville voisine. » Irrité de cet état de choses, le gouverneur, dont l'esprit était faible, prit la décision de condamner à mort tout scribe qui aurait l'audace de lui répondre que le roi avait une dette de tant de sacs de grains. Après qu'on eut ainsi empalé une demi-douzaine de scribes-comptables, plus personne ne voulait remplir cette dangereuse fonction. Il se trouva cependant quelqu'un pour faire acte de candidature et, à ses amis qui lui disaient : « Toi aussi tu seras supplicié », il répondait, d'un air entendu, que pareille mésaventure ne lui arriverait jamais. Une fois en place, il eut l'occasion de recevoir la visite du gouverneur, qui lui posa la question fatale : « Combien reste-t-il de sacs de grains dans le grenier ? », en ajoutant la menace suivante : « Si tu me réponds que nous avons des dettes, tu seras empalé, et si tu mens, tu seras aussi empalé. » Le scribe, sans se démonter, lui répondit : « Puissant gouverneur, trois fois le nombre de sacs qu'il y a dans ce grenier plus sept sacs, cela donne le même résultat que si l'on ajoutait quinze sacs au nombre de sacs de ce grenier multiplié par cinq. Voilà ce que tu possèdes ! » Comme beaucoup de fonctionnaires autoritaires et cruels, le gouverneur était bête et il ne comprit pas la réponse du scribe. Néanmoins, comme celui-ci n'avait pas parlé de dettes, il décida de ne pas l'empaler pour ce motif et se rendit dans le grenier pour vérifier si ce que lui avait dit le comptable était vrai. Quelle ne fut pas sa stupeur de constater que le grenier était vide et que les livres de comptes mentionnaient que le roi avait une dette de quatre sacs de grains à l'égard de la ville voisine ! Il retourna auprès du scribe et lui dit : « Tu ne m'as pas annoncé de dettes, soit, mais tu as menti, je vais donc te faire exécuter. » Le scribe se défendit en souriant et expliqua au gouverneur : « Pas du tout, je ne t'ai pas menti. Voici comment s'explique ma réponse. Le roi doit bien quatre sacs à la ville voisine ; si tu multiplies cette dette par trois, cela fait douze sacs de dette et si tu fais entrer sept sacs dans le grenier, il ne restera plus que cinq sacs de dette ; par ailleurs, quatre sacs de dette multipliés par cinq, cela fait vingt sacs de dette ; si tu ajoutes à ces vingt sacs de dette quinze sacs de crédit, cela ne fait plus que cinq sacs de dette, c'est-à-dire le même nombre de sacs de dette que tout à l'heure. Je ne t'ai donc pas menti, et je t'ai fait savoir qu'il y avait quatre sacs de dette sans cependant te le dire directement : je ne dois pas être condamné. » Et c'est ainsi que la vie de ce scribe avisé fut sauvée grâce à sa subtile invention, à laquelle les mathématiciens donnèrent plus tard le nom de *théorie des équations.*

Bien entendu, cela est un conte. Reprenons point par point les affirmations du scribe et traduisons-les dans notre langage actuel.

— Il ne veut pas énoncer le nombre de sacs de grains qui reste dans le grenier ; appelons donc ce nombre x et déclarons que c'est une quantité inconnue (ou, plus brièvement, une *inconnue*). Convenons que si x est positif il s'agit de sacs de grains entassés dans le grenier et que si x est négatif il s'agit de sacs de grains dus à la ville voisine.

— Trois fois le nombre de sacs plus sept sacs, cela s'écrit $3\,x+7$.

— Cinq fois le nombre de sacs plus quinze sacs, cela s'écrit $5\,x+15$.

— Dire que les deux quantités sont égales, cela s'écrit :

$$3\,x+7=5\,x+15,$$

égalité qui n'est vérifiée que pour une seule valeur de x, la valeur $x=-4$. En effet, les deux membres de l'égalité prennent la même valeur si l'on remplace x par -4 :

$$3\times(-4)+7=-12+7=-5,$$
$$5\times(-4)+15=-20+15=-5.$$

Une égalité comme celle qui est posée par le scribe, vérifiée seulement pour certaines valeurs de l'inconnue x, s'appelle une *équation* ; chercher x à partir de cette équation, cela s'appelle *résoudre l'équation* et la valeur trouvée, $x=-4$, est la *racine* ou la *solution* de l'équation considérée. Nous remarquons que la solution trouvée est négative : autrement dit le scribe aurait été dans l'*impossibilité* de répondre comme il l'a fait s'il avait ignoré l'existence des nombres négatifs. Cela nous montre que, selon l'ensemble de nombres considéré, une équation peut être *possible* dans un ensemble et *impossible* dans un autre.

● *Définitions.* Soyons plus rigoureux et précisons dès maintenant quelques définitions.

1 - Nous nous placerons d'emblée dans l'ensemble $\mathbb{C}$, des nombres complexes.

Avec cette convention préliminaire, *toutes les opérations élémentaires* sont possibles ; par exemple :

$$3-5=-2,\quad 3:7=\frac{3}{7},$$
$$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2,\quad \sqrt{-9}=\sqrt{9\,i^2}=\pm 3\ .$$

2 - Une égalité de la forme $A=B$ entre deux expressions contenant des combinaisons de nombres appartenant à l'ensemble $\mathbb{C}$, ces nombres étant, soit écrits sous forme numérique, soit sous forme de lettres, peut être :

— soit toujours vraie, quelles que soient les valeurs données aux lettres figurant dans A et B ; on l'appellera alors une *identité* ;

— soit vraie pour certaines valeurs seulement données aux lettres figurant dans A et B ; on l'appellera alors une *équation.* Par exemple l'égalité

$$(a+b)^2=a^2+2\,ab+b^2$$

Cardan a publié dans son* Ars magna *(Le grand art) la méthode générale de résolution des équations du troisième degré.

HIERONYMI CARDANI

cubis, æquatur 80, quod R^m p^m æquabitur R R^a, 622080 quadratorum p:80, & in prima æquatione æstimatio rei manifeste est 2, dux igit R R^a 80 in se, fit R R^a 6400, diuide per 2, æstimationem relati & 6 cuborum æqlium 80, exibit R R^a 200, æstimatio rei, quando R^m p^m æquatur R R^a 622080 quadratorum p:80, ut uero facilior intellectus omnium horũ sit, uigintiquatuor

cub. & q̃d' æq̃l' n° in cub. æq̃l' re & n°.
cub. æq̃l' q̃d' & n° in cub. & res æq̃l n°.
cub. & n° æq̃l' q̃d' in cub. & n^m æq̃l' rebus
q̃d q̃d. & cub. æq̃l' n° in q̃d q̃d. æq̃l' reb' & n°.
q̃d'q̃d. & n° æq̃l' cu. in q̃d'q̃d. & n^m æq̃l' rebus.
q̃d'q̃d. æq̃l' cu. & n° in q̃d'q̃d. & res æq̃l' n°.
R^m p^m & q̃d'q̃d. æq̃l' n° in R^m p^m æq̃l' reb. & n°.
R^m p^m æq̃le q̃d q̃d. & n° in R^m p^m & res æq̃l n°.
R^m p^m & n° æq̃l' q̃d'q̃d. in R^m p^m & n^m æq̃l' reb°.
R^m p^m & cu. æq̃l' n° in R^m p^m æq̃l q̃d. & n°.
R^m p^m æq̃l cu. & n° in R^m p^m & q̃d. æq̃l' n°.
R^m p^m & n° æq̃l cu. in R^m p^m & n^m æq̃l q̃d.

transmutationes subiungam, ex quibus alias discere licebit. hic namq; duodecim sunt conuersiones, totidemq; econtra, uelut si cubus & quadratum æquantur numero, conuertetur capitulum, in cubum æqualẽ rebus & numero, at econtra, si cubus æqualis sit rebus & numero, cubus & quadrata numero etiam æqualia erunt.

DEMONSTRATIO.

Vt uero eiusmodi sit aliqua, exempli causa, demonstratio, ponatur parallelepipedum A B constans ex A C cubo, & D B numero, æquale autem totum hoc q̃dratis A D lineæ. Igitur cum ipsum cõstet ex D C in A B, constabit etiam ex A M in quadratum D C, igitur A M est numerus quadratorũ, inter M D & D A, sint continue proportionales, E proximior A D, & F G proximior D M, q̃dratum autem F G sit G H, & sit G K superficies, æqualis ei quæ ex E in A M, compleatur autem corpus G K, secundum altitudinem F G, erit igitur ex 15ª 6ⁱ elementorum A M ad F K, ut F G ad E, igitur ex 11ª 5ⁱ eiusdem, A M ad F K, ut M D ad F G, seu F H. at ex 19ª 5ⁱ elementorum erit A M ad F K, ut A D ad K H, ex 11ª igitur eiusdem, M D ad F H, ut A D ad K H, quare cum sit M D, ad F H, ut F H ad E, &



Bibliothèque Nationale, Paris. Ph. Jeanbor © Photeb/T.



Ph. Documenta, Milan © Photeb/T.

***Le génie mathématique est souvent précoce. Évariste Galois (à gauche), refusé au concours d'entrée à l'École Polytechnique en 1830, expulsé de l'École Normale Supérieure en 1831 pour avoir participé à la lutte menée par les démocrates contre la Monarchie de Juillet, est mort tragiquement, à la suite d'un duel au pistolet, à l'âge de 21 ans, non sans avoir écrit, dans la nuit précédant ce duel, une* Lettre à Auguste Chevalier *qui est un génial testament scientifique, dans lequel il résume ses idées sur la théorie des équations algébriques, idées qui sont à la base de l'algèbre moderne. — Niels Henrik Abel (1802-1829), mathématicien norvégien, a montré que les équations algébriques d'un degré supérieur à quatre n'avaient pas de solution algébrique générale et a découvert d'importantes propriétés relatives aux fonctions elliptiques et à une classe d'équations appelées* équations abéliennes.**

est une identité, car on peut donner à a et b n'importe quelle valeur sans l'altérer. Par contre, l'égalité

$$3x + 7 = 5x + 15$$

n'est vraie que pour $x = -4$; pour toute autre valeur de x elle n'est plus vérifiée : c'est une *équation*. L'expression située à gauche du signe « = » s'appelle le *premier membre* de l'équation, ou *membre de gauche* ; l'expression écrite à droite du signe « = » est le *deuxième membre* de l'équation, ou *membre de droite*.

3 - Dans chaque membre figurent un ou plusieurs termes (complexes, ou, dans certains cas particuliers, réels) :

— Les uns sont des quantités inconnues, que l'on demande de calculer compte tenu de l'équation proposée. On désigne habituellement ces inconnues par les lettres de la fin de l'alphabet : x, y, z par exemple. S'il n'existe qu'une inconnue (x), l'équation est dite *à une inconnue* ; s'il y en a deux, il s'agit d'une équation *à deux inconnues* ; s'il y en a n, il s'agit d'une équation *à n inconnues*.

— Les autres sont des quantités connues ; on les appelle des *coefficients*. Ils peuvent être, soit des nombres (*coefficients numériques*), soit des lettres (*coefficients littéraux* ou *paramètres*). Dans le cas des coefficients littéraux, la ou les solutions de l'équation proposée s'expriment en fonction de ces coefficients. Par exemple l'équation

$$x + m = 3$$

a pour solution

$$x = 3 - m.$$

4 - Résoudre une équation, c'est trouver la valeur des inconnues en fonction des quantités connues. Pour certains types d'équations, on a établi une *formule de résolution* qui permet de trouver rapidement les solutions. Le ou les nombres qui, mis à la place de l'inconnue, vérifient l'équation donnée sont appelés les *racines* ou les *solutions* de l'équation. Par exemple, dans l'exemple du scribe, $x = -4$ est racine de l'équation proposée.

5 - Il peut arriver qu'on ait à résoudre plusieurs équations dans lesquelles figurent plusieurs inconnues : ces équations forment un *système d'équations*.

6 - On appelle *degré* d'une équation par rapport à une inconnue x le plus haut degré de puissance de x dans l'équation considérée. L'équation du scribe est une équation du premier degré en x.

7 - Deux équations qui admettent les mêmes solutions sont dites *équivalentes* : on peut remplacer l'une par l'autre dans les calculs.

Résolution d'une équation.

● *Théorèmes généraux.* Pour résoudre une équation, on fait usage de théorèmes généraux qui sont les conséquences de la structure du corps des complexes (et, *a fortiori*, de celui des réels). Si l'on se plaçait dans un autre ensemble, par exemple dans un espace vectoriel à n dimensions, ou dans l'anneau des matrices carrées d'ordre n, etc., ces théorèmes ne seraient pas nécessairement vrais. En nous limitant au corps des complexes, nous ne traitons que des équations dites *algébriques*. Ces théorèmes généraux sont connus de tous les écoliers, et nous nous contenterons de les résumer en quelques formules. Nous partirons d'une équation algébrique $A = B$.

$$1 - A = B \Leftrightarrow A + C = B + C. \quad (8)$$

2 - Corollaire : on peut faire passer un terme d'un membre d'une équation dans l'autre à la condition de changer son signe.

$$3 - A = B \Leftrightarrow AC = BC, \quad C \neq 0. \quad (9)$$

4 - Corollaire : le théorème précédent permet de réaliser l'opération qui s'appelle « chasser les dénominateurs ». Par exemple l'équation :

$$\frac{3x}{5} - 1 = 2x - \frac{3}{2} \quad (10)$$

est équivalente à :

$$6x - 2 = 20x - 15, \quad (11)$$

si l'on multiplie les deux membres de l'équation (10) par 10, qui est le PPCM de 5 et de 2.

$$5 - [A = B, C = D] \Rightarrow \begin{cases} A \pm C = B \pm D ; \\ AC = BD ; \\ \dfrac{A}{C} = \dfrac{B}{D}. \end{cases} \quad (12)$$

● *Équation du premier degré à une inconnue.* Sous sa forme entière générale, cette équation s'écrit :

$$ax + b = 0. \quad (13)$$

— Si $a \neq 0$, l'équation admet une racine et une seule : $x = -b/a$.

— Si $a = 0$ et $b \neq 0$, l'équation s'écrit $0x = -b$. Or il n'existe aucune valeur de x dont le produit par 0 soit un nombre $-b \neq 0$; l'équation (13) n'a donc pas de racine : elle est dite *impossible*.

— Si $a = 0$ et $b = 0$, l'équation s'écrit $0x = 0$, et elle est vraie quelle que soit la valeur de x : elle admet une infinité de solutions. Elle est dite *indéterminée*.

● *Équations du n-ième degré, $n \leqslant 4$.* Sous leur forme entière générale, ces équations s'écrivent :

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 ; \\ ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 ; \\ ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Ce sont, respectivement, les équations du deuxième,

troisième et quatrième degré. La méthode générale de résolution des équations du deuxième degré a été découverte par les mathématiciens de l'ancienne Mésopotamie, 2000 ans (et peut-être davantage) avant notre ère. La formule de résolution de l'équation du troisième degré a été trouvée par les algébristes italiens de la Renaissance qui ont inventé, pour ce faire, les nombres imaginaires : Scipione Del Ferro a trouvé la solution de l'équation $x^3 + px + q = 0$ (ce qui est un cas particulier de la forme générale ci-dessus), à la fin du XVe siècle ; cette solution a été retrouvée par Tartaglia en 1535, qui la communiqua à Cardan ; celui-ci s'en servit pour établir la formule de résolution générale de l'équation du troisième degré (1539). La formule générale de résolution de l'équation du quatrième degré a été établie par Ferrari, disciple de Cardan, en 1555.

— La résolution de l'équation du second degré consiste à factoriser le trinôme $ax^2 + bx + c$ en le mettant sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$. Les racines (réelles ou complexes) de l'équation sont alors $x = x_1$ et $x = x_2$, conformément à ce qu'on a expliqué p. 68. La formule de résolution donnant x_1 et x_2 est la suivante :

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (15)$$

La quantité $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelée *discriminant* de l'équation ; elle joue un rôle important dans sa discussion, qui se résume aux trois cas suivants lorsque les coefficients a, b et c sont réels :

1 - si $\Delta > 0$, x_1 et x_2 sont des racines réelles distinctes ;

2 - si $\Delta = 0$, x_1 et x_2 sont confondus en une *racine double* $\alpha = -b/2a$;

3 - si $\Delta < 0$, x_1 et x_2 sont deux racines complexes conjuguées de la forme $p \pm qi$.

— Pour résoudre l'équation du troisième degré, on remplace l'inconnue x par l'inconnue auxiliaire $z = +b/3a$. L'équation générale est alors équivalente à l'équation $z^3 + pz + q = 0$, qui admet, selon les cas, trois racines complexes, une racine réelle et deux racines complexes, ou trois racines réelles (certaines de ces racines pouvant être confondues en racines doubles ou triples).

— La méthode de Ferrari pour résoudre l'équation du quatrième degré ressemble à la méthode employée pour l'équation du deuxième degré : c'est une factorisation qui conduit à remplacer l'équation donnée par le produit de deux équations du deuxième degré en x :

$$(Ax^2 + Bx + C)(A'x^2 + B'x + C'). \qquad (16)$$

Cette équation a donc quatre racines, réelles ou complexes, distinctes ou confondues (deux racines par facteur du second degré).

Le lecteur trouvera le détail des calculs p. 142.

● *Relations entre les coefficients et les racines d'une équation.*

— *Second degré.* On démontre aisément les relations $x_1 + x_2 = S = -b/a$ et $x_1 x_2 = P = c/a$. La connaissance de P et S, calculables à partir des coefficients a, b et c de l'équation, permet de prévoir la nature des racines, ainsi que leur ordre, sans avoir besoin de calculer ces racines elles-mêmes (c'est ce qu'on appelle « séparer les racines d'une équation »). Par exemple, dans le cas où a, b et c sont réels :

— si $P < 0$, cela signifie que les deux racines sont de signes contraires, et toutes deux réelles ;

— si $P = 0$, cela signifie que l'une des racines est nulle, $x_1 = 0$; l'autre racine, x_2, est donc égale à $S = -b/a$;

— si $P > 0$, cela signifie que les deux racines ont même signe si elles sont réelles, ou qu'elles sont complexes conjuguées (on tranche entre ces deux cas par l'examen du signe de Δ).

D'autre part, si l'on connaît le signe du produit P, le signe de la somme nous renseignera sur l'ordre de ces racines.

L'étude du signe des racines est facilitée par le *théorème de Descartes* examiné plus loin.

— D'une façon générale, un polynôme de degré n et de coefficients $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$, pouvant se mettre sous la forme :

$$a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ désignant les racines, complexes ou réelles, du polynôme, la somme, S, et le produit, P, de ces racines sont :

$$S = x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$P = x_1 x_2 \dots x_n = \begin{cases} \dfrac{a_0}{a_n} & \text{si } n \text{ est pair}, \\ -\dfrac{a_0}{a_n} & \text{si } n \text{ est impair}. \end{cases}$$

On établit aussi que la somme des produits des racines prises deux à deux est :

$$R = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_i x_j + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}.$$

— *Expressions symétriques.* Considérons les deux expressions A et B fonctions des variables x et y :

$$A = x + y \quad \text{et} \quad B = xy.$$

Il est bien évident que, en vertu de la commutativité des opérations fondamentales, ces deux fonctions prennent la même valeur si l'on substitue x à y et y à x. D'une manière générale, on appelle *fonction symétrique entière* de p variables un polynôme de ces variables qui reste identique dans une substitution quelconque sur ces variables. Les fonctions P, S et R définies plus haut sont des fonctions symétriques des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, c'est-à-dire des racines du polynôme de degré n : on appelle ces fonctions les *polynômes symétriques fondamentaux* par rapport à n variables. On démontre qu'un polynôme symétrique quelconque s'exprime en fonction de P, S, R pour les variables considérées.

L'intérêt des expressions symétriques est de permettre de ramener l'étude d'un polynôme B à celle d'un polynôme A plus simple.

Comment aller plus loin ?

Les mathématiciens cherchèrent tout naturellement à résoudre les équations d'un degré supérieur à quatre (équations du cinquième degré, du sixième degré, ..., du n-ième degré). Cette étude avait un double intérêt :

— théorique, car il aurait été satisfaisant pour l'esprit de trouver une méthode générale de résolution pour toutes les équations à une inconnue, quel que soit leur degré ;

— pratique, car les progrès des sciences physiques exigeaient qu'on puisse calculer des quantités inconnues figurant dans des expressions de degré 5, 6, ..., n.

Il n'est pas question, dans le cadre de ce livre, d'examiner en détail les tentatives successives qui ont abouti au *théorème d'Abel* et aux théories de Galois. Il nous a cependant semblé fort instructif d'en tracer les principales étapes, ce qui permettra au lecteur de « boucler la boucle » et de comprendre comment l'on est passé de la résolution des équations — thème favori de l'algèbre classique — à la théorie des ensembles et à l'algèbre moderne.

● *Les préliminaires.* Comme les mathématiciens ne parvenaient pas à trouver des méthodes générales de résolution pour des équations d'un degré supérieur à cinq, ils ont tenté de répondre à certaines questions préliminaires telles que :

— combien une équation possède-t-elle de racines positives ?

— combien une équation possède-t-elle de racines réelles ou complexes ?

— étant donné deux nombres α et β, combien y a-t-il de racines d'une équation donnée qui sont comprises entre α et β (problème de la *séparation* des racines d'une équation) ?

— etc.

De ce point de vue, les deux théorèmes fondamentaux, aperçus dès le XVIIe siècle, sont le *théorème de Descartes* et le *théorème fondamental de l'algèbre* (Gauss-D'Alembert).

— *Le théorème de Descartes.* Ce théorème concerne le nombre de racines positives que peut avoir une équation de la forme

$$P(x) = 0,$$

$P(x)$ étant un polynôme de degré n à *coefficients réels.* Il s'énonce ainsi :

Dans toute équation algébrique à coefficients réels, $P(x) = 0$, le nombre des racines positives de l'équation est au plus égal au nombre des *variations de signe* du premier membre ; lorsque le nombre des racines positives est différent du nombre des variations de signe du premier membre, la différence de ces deux nombres est toujours un nombre pair.

Par *variation de signe* il faut entendre le fait, pour deux coefficients consécutifs, d'être de signes différents. Par exemple l'équation :

$$3x^2 - 5x + 1 = 0,$$

présente deux variations de signe, puisque les signes de ses coefficients sont « + », « − » et « + ». D'après le théorème de Descartes, cette équation doit avoir au plus deux racines positives (ici, avec $\Delta = 13 > 0$ et un produit $P = x_1 x_2 = 1/3 > 0$, il y a donc deux racines positives).

De même, l'équation :

$$x^5 + x^4 - 3x^3 - x^2 - 5x - 1 = 0$$

ne présente qu'une seule *variation de signe* (entre les termes $+x^4$ et $-3x^3$) : elle ne peut donc avoir qu'une seule racine positive.

— *Le théorème de Gauss-D'Alembert.* Nous l'avons déjà rencontré ; on l'appelle souvent le *théorème fondamental de l'algèbre.* En fait, énoncé par Girard vers 1625, il n'a reçu qu'une démonstration incomplète de la part de D'Alembert (1746). La première démonstration complète a été établie par Gauss (1799). Par la suite, d'autres démonstrations furent données, notamment par Cauchy, Weierstrass, Kronecker.

Le théorème de Gauss-D'Alembert s'énonce ainsi :

« Toute équation algébrique de degré n possède au moins une racine (complexe ou réelle). »

On en déduit le corollaire suivant (appelé parfois — à tort — théorème de Gauss-D'Alembert) :

« Toute équation algébrique de degré n a n racines (réelles ou complexes) et tout polynôme $P(x)$ se décompose d'une seule façon en un produit de facteurs du premier degré. »

Nous avons vu que ce théorème s'applique, relativement facilement, aux polynômes de degré inférieur ou égal à quatre. Pour les polynômes dont le degré est supérieur à quatre, le théorème est encore vrai, mais — en général — les règles du calcul algébrique sont insuffisantes pour en permettre l'application.

● *Le théorème de Rolle.* Le Français Michel Rolle (1652-1749) a cherché à résoudre les équations par un procédé appelé « méthode des cascades ». Le théorème qui porte son nom concerne les *racines réelles* d'une équation $P(x) = 0$ à *coefficients réels* (Rolle appartenait aux générations de mathématiciens effrayés par les nombres « imaginaires »). Supposons qu'une équation $P(x) = 0$ ait plusieurs racines réelles, qu'on écrira, par ordre croissant :

$$x_1, x_2, x_3, \dots,$$

et considérons deux racines consécutives, par exemple x_2 et x_3. Le théorème de Rolle consiste à dire qu'il existe, entre x_2 et x_3, un *nombre impair* (1, 3, 5, ...) de racines de l'équation dérivée :

$$P'(x) = 0.$$

Nous n'avons pas encore défini, ici, la notion de *dérivée* : c'est en effet une notion qui est du domaine de l'*analyse* et non pas de l'*algèbre*. Pour ceux de nos lecteurs qui l'ignorent, disons brièvement qu'on peut calculer, à partir d'un polynôme $P(x)$, un autre polynôme appelé *polynôme dérivé*, noté $P'(x)$, par des procédés simples de calcul (voir p. 114).

Supposons qu'on ait à résoudre une équation $P(x) = 0$ et qu'on sache résoudre $P'(x) = 0$; soit x'_1, x'_2, pour fixer les idées, les racines réelles de $P'(x) = 0$; nous sommes certains que deux racines réelles consécutives de $P(x) = 0$, x_2 et x_3 par exemple, *ne peuvent pas* encadrer x'_1 et x'_2, puisqu'il ne peut y avoir qu'un



Charles Sturm (1803-1855) : mathématicien français d'origine suisse, auteur de la démonstration du théorème qui porte son nom, et qui permet de déterminer le nombre des racines réelles d'une équation algébrique, comprises entre deux limites données.

nombre impair de racines de $P'(x) = 0$ entre x_2 et x_3. Ainsi donc on devra avoir :

— soit l'ordre croissant

$$x_1\ x'_1\ x_2\ x'_2\ x_3\ ;$$

— soit l'ordre croissant

$$x_2\ x'_1\ x_3\ x'_2\ x_4\ .$$

Autrement dit, il existe une seule racine réelle de $P(x)$ qui ait une valeur comprise entre x'_1 et x'_2.

● *Le théorème de Sturm.* En fait, le théorème de Rolle est très utile, car on peut encadrer x_2 entre x'_1 et x'_2, puis encadrer x'_1 et x'_2 par les racines du polynôme dérivé de $P'(x)$, et ainsi de suite : tel est le principe de la méthode en cascade, qui cerne, de plus en plus, la racine x_2, comme un tireur approche de plus en plus de sa cible en tirant un coup au-delà, un coup en deçà, et ainsi de suite. Mais la méthode de Rolle n'est possible que si l'on sait résoudre $P'(x) = 0$. Sinon, pour fixer le nombre de racines réelles d'une équation et les séparer, il faut faire appel à un théorème un peu plus compliqué appelé *théorème de Sturm* (mathématicien français, d'origine suisse), exposé en 1829, par son auteur dans son *Mémoire sur la résolution des équations numériques*. La méthode consiste à associer à une équation $P(x) = 0$ de degré n une suite de fonctions appelées *fonctions de Sturm* de degrés décroissants de n à 0 et à étudier les signes pris par ces fonctions pour deux valeurs particulières, α et β, de la variable x. Si la suite présente, pour $x = \alpha$, p variations de signe, et pour $x = \beta$ $(\beta > \alpha)$, q variations de signe, Sturm démontre qu'il existe alors $p - q$ racines réelles de $P(x) = 0$ comprises entre α et β.

● *Le théorème d'Abel.* A vrai dire, on se doutait bien, au début du XIXe siècle, que les équations générales de degré supérieur à quatre étaient impossibles à résoudre par les seuls moyens du calcul algébrique. Un médecin italien de Bologne, Paolo Ruffini (1765-1822), avait tenté de le montrer, en 1798, dans sa *Théorie générale des équations* ; mais sa démonstration était incomplète. C'est alors que le jeune mathématicien norvégien Abel (1802-1829) découvrit le théorème qui porte son nom (en 1824 ; il était âgé de 22 ans).

Qu'est-ce que *résoudre algébriquement* une équation algébrique de degré n ? se demande Abel. C'est exprimer ses racines, x_1, x_2, x_3, ..., x_n, en fonction de ses coefficients a_n, a_{n-1}, ..., a_0, ces fonctions ne comportant que des *opérations algébriques* sur ces coefficients, c'est-à-dire les opérations définissant la structure du corps, $\mathbb{C}$, des complexes. Or ces opérations et les opérations qui en découlent sont au nombre de six :

— l'addition et son opposée, la soustraction (qui est une addition déguisée) ;

— la multiplication et l'élévation à une puissance entière m (qui est une multiplication m fois répétée) ;

— la division, qui se réduit à la multiplication par un inverse ;

— l'extraction de racines.

Cette dernière opération, de beaucoup la plus difficile à réaliser techniquement, impose l'usage des *radicaux*, c'est-à-dire du signe $\sqrt{\ }$

Nous avons vu que les équations de degré inférieur ou égal à quatre admettent, dans le cas le plus général, 1, 2, 3 ou 4 racines, selon leur degré ; ces racines, réelles ou complexes, sont calculables uniquement à l'aide des opérations précédentes, c'est-à-dire qu'on peut les exprimer notamment en utilisant deux radicaux : $\sqrt[2]{\ }$ et $\sqrt[3]{\ }$, qui se lisent respectivement « racine carrée de », et « racine cubique de ». Soit maintenant une équation de degré n, par exemple du cinquième degré, pour fixer les idées ; elle admet (théorème de Gauss-D'Alembert) cinq racines (que nous ne savons pas calculer dans le cas général) :

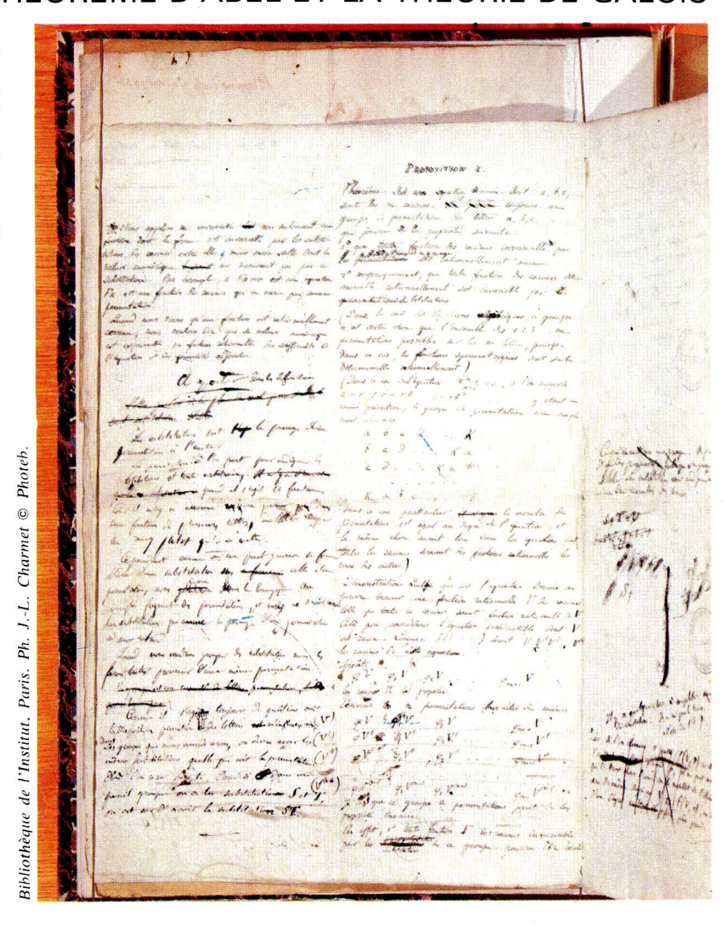
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\ .$$

Abel a démontré que, si l'on pouvait exprimer ces racines par des radicaux cubiques $\sqrt[3]{\ }$ (comme dans la formule de Cardan pour une équation du troisième degré), ces radicaux devraient être équivalents à des *fonctions rationnelles* (c'est-à-dire ne faisant intervenir aucun radical) des racines, de la forme

$$\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)\ ,$$

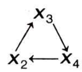
dont l'expression explicite importe peu ici, mais qui doivent avoir la *propriété suivante* : si l'on opère une *permutation circulaire de trois lettres seulement*, *ces fonctions restent invariables.*

Une permutation circulaire entre trois lettres, x_2, x_3 et x_4 par exemple, se réalise en plaçant ces trois lettres aux sommets d'un triangle et en les lisant en tournant



Fragment manuscrit de Galois (folio 3b), extrait du* Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux. *Ce fameux premier mémoire, datant de 1830, a été écrit sur trois feuilles doubles de format 25 × 38 cm, réunies et cousues en un livret de six feuillets, soit 12 pages, dont la première porte le titre et l'avertissement et dont la dernière est blanche. Le texte du mémoire est à droite ; à gauche, dans la marge, E. Galois a introduit des notes, additions et corrections.

toujours dans le même sens à partir de l'une d'elles :



Par exemple :

— en partant de x_2 on a la permutation : $x_2\ x_3\ x_4$;

— en partant de x_3 on a la permutation : $x_3\ x_4\ x_2$;

— en partant de x_4 on a la permutation : $x_4\ x_2\ x_3$.

On devrait donc avoir, par exemple, en encadrant les racines sur lesquelles on envisage une permutation circulaire :

$$\varphi(x_1,\ \boxed{x_2,\ x_3,\ x_4},\ x_5) = \varphi(x_1,\ \boxed{x_4,\ x_2,\ x_3},\ x_5)\ .$$

Abel a aussi montré que le même raisonnement s'applique à un radical cinquième, $\sqrt[5]{\ }$, si l'on considère une permutation circulaire de cinq racines, etc., et à un radical d'indice p = un nombre premier, pour une permutation circulaire portant sur p racines.

Or, et cela nous conduit à l'énoncé du théorème d'Abel, si x_1, x_2, ... sont des fonctions algébriques des coefficients, on peut montrer que les fonctions φ ne restent pas invariables quand on opère sur ces racines des permutations circulaires dans les conditions qui viennent d'être énoncées.

Conclusion : il n'y a pas de fonctions φ qui respectent ces conditions d'invariabilité, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de radicaux susceptibles d'exprimer x_1, x_2, ... D'où le *théorème d'Abel* :

« Il est impossible de résoudre algébriquement les équations générales d'un degré supérieur à quatre. »

Ce théorème — dont la démonstration fut améliorée, ultérieurement, par Wantzel (1845) — tire en principe un trait sous l'algèbre classique, considérée comme l'art de résoudre des équations.

● *Un nouveau point de départ.* Faut-il donc refermer tous les livres d'algèbre, effacer les tableaux noirs et se diriger vers d'autres domaines mathématiques, comme l'analyse par exemple ? Certes non, car, si l'on considère, au lieu des équations générales de degré n, des équations particulières, on constate aisément que certaines d'entre elles sont résolubles. Il est donc utile, étant donné une équation, de pouvoir reconnaître *a priori*, par l'examen de certains de ses caractères, si elle est résoluble ou non par radicaux. Or, bien avant que le théorème d'Abel n'eût été démontré, Lagrange avait proposé une méthode d'approche des équations générales, fondée sur la recherche d'une *équation secondaire (résolvante)* conduisant à la résolution de l'équation proposée. Cette méthode a comme point de départ la théorie des substitutions, opérations par lesquelles on passe, par exemple, d'une suite $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ à une suite $(x_2,\ x_3,\ x_1)$; ce n'est pas le lieu ici de l'expliquer, mais il apparaissait à Lagrange qu'une équation est résoluble algébriquement si certaines substitutions entre ses racines sont possibles sous certaines conditions données. On a vu, d'ailleurs, que le théorème d'Abel fait usage de cette théorie des substitutions.

C'est à Galois (1811-1832) que devait revenir le mérite de la solution générale du problème. Celui-ci posa la question en ces termes : « Chercher, pour chaque équation, un ensemble de substitutions relatif à ses racines et qui soit en rapport : 1° avec la nature intime de l'équation ; 2° avec le fait qu'elle est ou non résoluble par d'autres équations secondaires. »

Ainsi la théorie des équations algébriques débouche-t-elle, avec les travaux de Galois, sur la théorie des *groupes de substitutions* dont nous avons indiqué quelques aspects p. 24 et qui devait être approfondie, au XIXe siècle, par Gauss, Cauchy, Serret, Kronecker, Bertrand, Hermite, puis par Jordan. Il devait s'en dégager peu à peu l'idée que la *structure* d'un ensemble (de coefficients, de racines, de polynômes, de nombres, ... ou de n'importe quels éléments) était plus importante à connaître (donc à définir) que les éléments de cet ensemble.

Or on parvenait, à peu près à la même époque (c'est-à-dire entre 1850 et 1870), aux mêmes conclusions en ce qui concerne d'autres domaines mathématiques :

— à propos de la définition générale des « nombres » et des opérations qu'on peut faire sur des éléments autres que des réels ou des complexes ;

— à propos des opérations effectuées sur les figures géométriques et qu'on appelle des *transformations* ;

— à propos des relations qui existent entre certains axiomes (comme l'axiome des parallèles dit « axiome d'Euclide ») et un groupe particulier de transformations : invention par Lobačevskij (1829), Bolyaï (1833) et Riemann (1854) des *géométries non euclidiennes* ;

— à propos de maints problèmes d'analyse restés jusqu'alors en suspens.

Toutes ces questions devaient être groupées en un corps de doctrines cohérent, dominé par la théorie des ensembles (élaborée par Cantor entre 1872 et 1895), et former l'*algèbre moderne*, dont le premier exposé synthétique fut proposé en 1910 par Steinitz.



W. Kandinsky (1866-1944), l'un des créateurs de l'art abstrait, s'est librement inspiré, à partir de 1920, de la géométrie. Ci-dessus : **Pointes en arc** ***(1927).***

QU'EST-CE QUE LA GÉOMÉTRIE ?

La géométrie et les géométries.

Le point de départ.

La géométrie a d'abord été la science de la *mesure des étendues* (du grec *gē* = « terre » ; *metron* = « mesure »). Ce que les premiers géomètres — égyptiens, mésopotamiens, grecs — ont cherché à mesurer, c'est l'étendue d'une ligne (sa longueur), droite ou courbe, l'étendue d'une surface (son *aire*) limitée par des lignes, l'étendue d'une partie de l'espace à trois dimensions (son *volume*).

A partir du VIe siècle av. J.-C., dans les colonies grecques d'Ionie, des personnages, historiques ou semi-légendaires, comme Thalès ou Pythagore, et leurs disciples immédiats ont transformé ces techniques d'arpentage en une discipline « libérale » comme le dit dans un texte célèbre Proclus, qui fut, au Ve siècle de notre ère, le premier historien des mathématiques (voir p. 1) :

> « ... *[Après Thalès et ses successeurs immédiats] Pythagore transforma cette étude [= la géométrie] et en fit un enseignement* libéral *car il remonta aux principes supérieurs et rechercha les théorèmes abstraitement et par l'intelligence pure...*).

Il faut interpréter « libéral » comme « libéré des préoccupations utilitaires », à savoir celles de l'arpenteur ou de l'architecte. De fait, ce sont les membres des sectes pythagoriciennes, répandues à travers le monde grec ancien, depuis les îles de l'Asie-mineure jusqu'à la Sicile, qui ont remplacé l'idée pratique de *mesure* par l'idée plus générale de *relation.* De sorte que la première théorie géométrique de l'histoire s'est présentée comme l'étude abstraite, à l'aide du seul raisonnement, des *relations de position* et des *relations métriques.* Exemples de relations de position : la droite D est parallèle à la droite D' ; la droite D est perpendiculaire à la droite D' ; la droite D est tangente au cercle C ; les courbes C et C' se coupent en un point M ; etc. Exemples de relations métriques : le segment AB est triple du segment AC ; le triangle ABC est égal (= superposable sans déformation) au triangle $A'B'C'$; l'aire du cercle de rayon R est égale à πR^2 ; le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit ; etc.

Les méthodes.

Pour établir les relations de position et les relations métriques qui existent entre des figures que nous nommons pour l'instant : points, lignes, surfaces, volumes, sans trop nous interroger sur leur définition, les mathématiciens ont fait appel à des méthodes très diverses. L'invention de ces méthodes est en général l'œuvre d'un savant (ou d'une École) cherchant à résoudre un problème laissé en suspens par les méthodes en usage à un instant donné ; puis de nouvelles méthodes se révèlent un instrument puissant, applicable à d'autres problèmes que celui ou ceux pour lesquels elles ont été inventées. Il en résulte alors une nouvelle *géométrie*, à propos de laquelle d'autres problèmes se présentent, et ainsi de suite. De ce point de vue, l'histoire de la géométrie est bien différente de celle de l'algèbre. Cette dernière est, nous l'avons vu, une généralisation progressive de la théorie des nombres : elle se déroule selon une ligne bien régulière, et ne connaît que peu d'arborisations. Au contraire, l'histoire de la géométrie est comparable à ces fusées qui s'élancent dans les airs, qui éclatent en une gerbe d'étincelles, et dont chaque étincelle explose à son tour et ainsi de suite. L'évolution de la géométrie est analogue à celle d'un végétal dont les arborisations se multiplieraient indéfiniment.

● *La méthode expérimentale.* Ce fut la méthode des *géomètres-arpenteurs* antérieurs aux pythagoriciens. Nous la citons ici pour mémoire. Avec la règle, le compas et les instruments qui en dérivent (équerre, rapporteur), on peut étudier les figures géométriques expérimentalement. En mesurant à l'aide d'un rapporteur les angles d'un triangle dessinés sur une feuille de papier, on *constate* que leur somme est égale à 180°, aux erreurs de mesure près. En traçant deux perpendiculaires à une même ligne droite sur le sable et en prolongeant ces perpendiculaires sur plusieurs dizaines de mètres, on *constate* qu'elles ne se coupent pas. Ce sont là des observations banales, sur lesquelles on peut se fonder pour dire : la somme des angles d'un triangle est égale à 180°, deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles. Mais le savoir ainsi énoncé n'est pas certain : il n'est que probable, et nous n'avons aucune raison de penser que les propriétés énoncées sont vraies dans tous les cas possibles.

● *La méthode hypothético-déductive* est la méthode géométrique classique, mise au point par les anciens Grecs et qui atteint à une sorte de perfection dans les *Éléments* rédigés par Euclide, professeur de mathématiques au *Musée* d'Alexandrie, vers 300 av. J.-C.

La méthode démonstrative euclidienne est bien connue de tous les écoliers : à partir d'un ensemble de propositions considérées comme fondamentales, on peut, par le pur jeu du raisonnement, démontrer de proche en proche des propositions appelées *théorèmes*, en respectant les règles de la logique formelle, à savoir principalement que deux propositions contradictoires ne peuvent être vraies ou fausses en même temps (principe dit de *non-contradiction*, entraînant l'*exclusion* d'une troisième proposition possible). Les propositions dont on part sont appelées des *hypothèses*, celles auxquelles on parvient par la déduction sont des *conclusions.*

Le contenu des *Éléments* d'Euclide peut se résumer comme suit.

1 - L'œuvre comprend treize *Livres*, à travers lesquels sont réparties diverses propositions concernant la géométrie plane (ligne droite, triangles, polygones, cercle), la géométrie dans l'espace et la théorie des nombres.

2 - Chaque Livre commence par des *définitions*, d'où l'on tire, par combinaison avec d'autres définitions préalablement données et avec des propositions antérieurement démontrées, de nouvelles propositions.

3 - Le Livre I contient, outre les définitions relatives aux objets les plus généraux de la géométrie (point, ligne, surface, plan, angles, cercle, polygone, droites parallèles) six « demandes » — ou « postulats » — parmi lesquelles la proposition connue sous le nom de « postulat d'Euclide » sur laquelle nous reviendrons plus loin, et neuf « notions communes » concernant l'égalité et l'inégalité des grandeurs et l'axiome que « le tout est plus grand que la partie ».

● *La méthode analytique* a été inventée au XVIIe siècle par Fermat et par Descartes (1637). Elle consiste principalement à traduire une réalité géométrique par des nombres réels ou par des relations entre ces nombres.

— L'idée fondamentale a été l'introduction des *coordonnées d'un point* (voir p. 95). Au XVIIe siècle, ce n'était pas une idée neuve, car elle avait déjà été utilisée vers 1350 par Nicole Oresme, évêque de Lisieux, mathématicien et astronome d'une grande originalité. Toutefois cette notion n'avait été ni retenue, ni exploitée par les mathématiciens de la Renaissance.

— Un point du plan est donc défini par deux nombres (x, y) qui sont ses coordonnées, un point de l'espace à trois dimensions est représenté par trois nombres (x, y, z) qui sont ses coordonnées spatiales. Une *courbe algébrique* est un ensemble de points dont les coordonnées vérifient une relation de la forme $f(x, y) = 0$ ou $f(x, y, z) = 0$, selon que l'on se place dans le plan ou dans l'espace, et qu'on appelle *équation* de la courbe. Une propriété telle que « les courbes C et C' se coupent en un point M » se traduit en géométrie analytique par : « les équations $f(x, y) = 0$ et $g(x, y) = 0$ ont une solution commune (x_0, y_0), coordonnées du point M ».

La création de la géométrie analytique a été rendue nécessaire par les nombreuses imperfections de la géométrie traditionnelle, imperfections que jusqu'alors les mathématiciens n'avaient pu surmonter.

1 - En effet la géométrie euclidienne n'est pas une géométrie *générale*, en ce sens qu'elle exige, pour chaque cas de figure, une nouvelle démonstration. Pour démontrer, par exemple, qu'une droite est parallèle à une autre, il faut faire de longs raisonnements en combinant les données du problème, et, très souvent, « avoir l'idée » d'une construction permettant de faire progresser la démonstration, etc.

2 - Dès que le problème devient un peu compliqué (par exemple si l'on considère des courbes aux formes non usuelles et construites autrement qu'à l'aide de la règle et du compas), la géométrie pure devient rapidement impuissante et, depuis Euclide, on ne comptait plus les questions posées et auxquelles il n'avait pas été donné de réponse.

3 - En particulier, la géométrie euclidienne classique ne propose aucune méthode générale pour résoudre les problèmes de « lieux géométriques », c'est-à-dire de la détermination d'une courbe dont tous les points doivent satisfaire à une condition nécessaire et suffisante donnée.

Or l'algèbre, avec ses symboles et ses mécanismes de calcul perfectionnés, tels qu'on les connaissait enfin au début du XVIIe siècle, passionnait alors les esprits. C'est pourquoi Fermat et Descartes eurent l'idée de *traduire* en langage algébrique (c'est-à-dire en *équations*) les problèmes de géométrie et de profiter ainsi des automatismes algébriques.

Toutefois, jusqu'à la fin du XVIIe siècle, l'invention de Descartes se limita à être « l'application de l'algèbre à la géométrie », c'est-à-dire qu'elle n'ouvrit pas de nouveaux domaines aux recherches des mathématiciens. Dans le courant du XVIIIe siècle, les mathématiciens ont perfectionné la méthode cartésienne et leurs travaux ont été à l'origine de la géométrie analytique moderne. En quoi consistaient ces perfectionnements ? Principalement en ceci :

1 - extension de la géométrie analytique plane de Descartes à l'espace (c'est-à-dire à l'étude de systèmes de coordonnées à trois dimensions) ;

2 - étude systématique des courbes planes algébriques.

En effet, jusqu'à la fin du XVIIe siècle, la géométrie analytique ne sert guère qu'à l'étude de la droite, du cercle, et des coniques (ellipse, parabole, hyperbole). C'est Newton qui fit franchir le pas à la géométrie

L'arpentage, ***l'art de mesurer la superficie des terres, n'a que de très lointains rapports avec la*** **géométrie**, ***art de raisonner sur des notions abstraites, définies par des axiomes. Ci-dessous : extrait du*** **Traité d'arpentage** ***d'Arnaud de Villeneuve (XVe siècle).***



analytique en utilisant ces méthodes pour étudier les courbes du troisième degré (cubiques) ; ses successeurs entreprirent l'étude analytique des courbes de degré supérieur, et l'œuvre la plus marquante du XVIIIe siècle, en l'espèce, est sans doute l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, publiée à Genève, en 1750, par Cramer, dont nous avons déjà rencontré le nom à propos de la théorie algébrique des déterminants (voir p. 58). Le perfectionnement des méthodes analytiques est dû principalement à Lagrange, qui parvint à simplifier les calculs et à améliorer les notations, et à Monge, dont les cours à l'École Polytechnique, en 1795, sont le premier exposé d'ensemble de la géométrie analytique moderne.

● *La méthode infinitésimale et différentielle* est une approche différente des problèmes géométriques. Elle est née à la fin du XVIIIe siècle, lorsque Monge, après Euler, cherche à étudier les propriétés des courbes qui ne peuvent être abordées par la simple étude algébrique. Ces propriétés concernent essentiellement la notion de courbure (des lignes et des surfaces), et des problèmes relatifs aux tangentes, aux normales, aux sous-tangentes à une courbe.

Pour résoudre les questions qui se posent en ce domaine, il est nécessaire de faire intervenir un outil nouveau, différent de l'algèbre classique : le calcul différentiel et intégral et l'analyse, qui ont été les deux grandes théories mathématiques élaborées au cours du XVIIIe siècle, depuis les travaux de Leibniz et de Newton.

● *La méthode projective*, née avec les travaux de Poncelet (1812-1814) et Steiner (1832), utilise à la fois les méthodes de la géométrie pure, de la géométrie analytique et de la géométrie différentielle. Elle consiste essentiellement à se demander ce que deviennent les propriétés d'une figure lorsqu'on transforme celle-ci selon des règles bien déterminées. Nous en expliquerons les principaux aspects ci-après (p. 87), mais il nous faut noter ici que la fécondité de cette méthode a été double.

1 - D'une part, elle a fait apparaître des propriétés nouvelles des figures, et a donné l'occasion aux méthodes analytique et différentielle de se développer pour s'adapter à l'étude de ces propriétés (au terme de cette évolution se situe la géométrie considérée comme une combinatoire abstraite : la *géométrie algébrique*).

2 - D'autre part, elle a attiré l'attention des mathématiciens sur le fait qu'il n'y a pas *une* géométrie (par exemple la géométrie d'Euclide, augmentée de toutes les propositions découvertes grâce à la géométrie analytique, à la géométrie infinitésimale et à la géométrie différentielle), mais *des* géométries.

Ce sont ces géométries que Felix Klein a classées dans son célèbre *Programme d'Erlangen* (1872), en se fondant sur la *théorie des groupes*, qui remonte, comme on l'a dit p. 73, aux travaux de Galois (1830).

Définition de la géométrie.

● *Notion de transformation.* Considérons une courbe C dans l'espace « ordinaire » à trois dimensions comme une figure formée d'un ensemble de points M (nous admettrons que les notions de « point » ou de « figure » sont intuitives). Convenons de définir une *transformation* T comme l'opération qui remplace un point M de l'espace par un point M' du même espace, selon des règles bien déterminées. En appliquant cette transformation à tous les points M de C, on obtient une courbe C', constituée par tous les points M' déduits des points M, qui est la *transformée de* C *par* T. Nous pouvons écrire, géométriquement :

$$\begin{cases} M \xrightarrow{T} M' \,; \\ C \xrightarrow{T} C' \,. \end{cases} \tag{1}$$

On peut aussi écrire analytiquement, en appelant (x, y, z) les coordonnées du point M et $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la courbe C :

$$\begin{cases} (x, y, z) \xrightarrow{T} (x', y', z') \,; \\ f(x, y, z) = 0 \xrightarrow{T} g(x', y', z') = 0 \,. \end{cases} \tag{2}$$

Nous pouvons étudier les propriétés de la courbe C' par les moyens de la géométrie pure, mais il est plus commode, en général, d'aborder le problème analytiquement en étudiant l'équation $g(x', y', z') = 0$. On peut aussi aborder, grâce au calcul différentiel et intégral, les problèmes relatifs à la courbure et aux tangentes de la courbe C'.

En comparant les courbes C et C', on observera que certaines propriétés sont conservées au cours de la transformation T (peu importe lesquelles pour l'instant) : on les nomme, pour cette raison, des *propriétés invariantes* et les formes mathématiques qui les traduisent (équations, formes algébriques, fonctions, etc.) sont les *invariants* de la transformation.

● *L'ensemble* $\mathcal{T}$ *de toutes les transformations* T possède une structure qui dépend, évidemment, de la nature de cette transformation. Appelons *produit* de deux transformations T_1 et T_2 la transformation obtenue en faisant subir à une figure F la transformation T_1 *puis* la transformation T_2. Nous désignerons ce produit par le signe « $\perp$ », comme nous l'avons fait en théorie des ensembles et en algèbre des structures : le produit de deux transformations est une *loi de composition* sur l'ensemble $\mathcal{T}$ des transformations telles que T. Supposons maintenant que l'on puisse démontrer les propositions suivantes.

1 - Le produit de deux transformations T_1 et T_2 appartenant à $\mathcal{T}$ est une troisième transformation $T_3 \in \mathcal{T}$ (autrement dit : l'opération « produit » est une loi de composition interne, au sens défini en algèbre des structures, p. 37).

2 - Ce produit est associatif, c'est-à-dire que quelles que soient T_1, T_2, T_3 appartenant à l'ensemble $\mathcal{T}$, on a :

$$(T_1 \perp T_2) \perp T_3 = T_1 \perp (T_2 \perp T_3) \,. \tag{3}$$

3 - Il existe une transformation T_0, appelée *transformation identique*, telle que :

$$T_0 \perp T = T \perp T_0 = T \,. \tag{4}$$

Autrement dit : T_0 est l'*élément neutre* pour la loi de composition interne « $\perp$ ».

4 - A chaque transformation T appartenant à l'ensemble $\mathcal{T}$ on peut faire correspondre une transformation appartenant au même ensemble, notée T^{-1}, telle que :

$$T \perp T^{-1} = T^{-1} \perp T = T_0 \,. \tag{5}$$

Autrement dit : toute transformation T possède une inverse T^{-1} dans l'ensemble $\mathcal{T}$.

Ces quatre propriétés sont celles qui caractérisent un ensemble à *structure de groupe* (voir p. 40). Si elles sont vérifiées, nous dirons donc que les transformations T constituent un *groupe de transformations* G.

● *Définition générale d'une géométrie.* Ne parlons plus de points ni de figures, car ces notions intuitives n'ont pas encore été définies. Contentons-nous d'appeler *éléments* les objets d'un ensemble que nous nous proposons d'étudier. On appelle *géométrie de groupe fondamental* G l'étude des propriétés des éléments d'un ensemble qui restent invariantes pour un groupe de transformations G.

Les géométries.

Les êtres géométriques sur lesquels nous raisonnons géométriquement peuvent être définis par des *axiomes* (voir ci-après p. 78). Nous admettrons ici que leur ensemble possède la structure d'*espace vectoriel* sur un corps K, à n dimensions. Le cas le plus simple est celui où il s'agit d'un espace vectoriel à deux dimensions sur le corps $\mathbb{R}$ des réels, à savoir l'espace $\mathbb{R}^2$. Nous avons expliqué, p. 48, que cet espace (= ensemble) n'était autre que le plan à deux dimensions de la géométrie euclidienne classique : chaque point du plan est défini par un vecteur à deux composantes (x, y), le mot « vecteur » étant pris en son sens général (p. 47). Les figures de $\mathbb{R}^2$ sont les *figures planes*. On peut les étudier par le raisonnement géométrique pur ou par le calcul (géométrie analytique). Un exemple un peu plus compliqué est celui de l'espace à trois dimensions sur $\mathbb{R}$. C'est l'ensemble des points de l'espace « ordinaire », chaque point étant un vecteur à trois composantes (x, y, z) ; les figures dans $\mathbb{R}^3$ sont des figures planes (cas particulier) ou des *figures gauches* et des *solides* (cube, sphère, etc.). On peut les étudier soit par le raisonnement géométrique, soit par des méthodes analytiques.

Rien ne nous interdit d'aller plus loin, et d'étudier les propriétés d'un espace vectoriel à n dimensions $\mathbb{R}^n$. Chaque « point » de cet espace est un ensemble de n nombres réels $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dont on ne peut plus donner une image physique (alors qu'un point dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$ peut être « dessiné »). Les propriétés des figures n-dimensionnelles peuvent être étudiées par le calcul ou par le raisonnement géométrique, mais ce dernier est plus délicat à manier que le premier.

Bien entendu, rien ne nous empêche de considérer un espace vectoriel à n dimensions sur un corps autre que $\mathbb{R}$, c'est-à-dire des vecteurs dont les composantes sont des nombres complexes ou hypercomplexes (géométries complexe, hermitienne, quaternionienne, etc.). Il est à peine besoin de souligner que c'est ici le calcul et la combinatoire qui l'emportent sur le raisonnement géométrique.

Cela dit, quel que soit l'espace dans lequel nous nous plaçons, la géométrie de cet espace est définie par le groupe fondamental de transformations G qui laisse invariantes certaines propriétés des figures. D'où une classification des géométries, proposée par Felix Klein en 1872.

● *La géométrie projective* étudie les propriétés qui sont conservées dans une transformation appartenant au *groupe projectif*. Les transformations de ce groupe peuvent être définies comme faisant correspondre à des points alignés A, B, C, ... des points A', B', C', ... qui sont eux aussi alignés. Le groupe projectif conserve la *colinéarité*.

La notion de « points alignés » est intuitive pour les points du plan $\mathbb{R}^2$ ou de l'espace $\mathbb{R}^3$. Dans l'espace n-dimensionnel K^n, la notion d'alignement se définit par des relations entre les composantes des vecteurs (= des points) alignés.

● *La géométrie affine* étudie les propriétés qui sont conservées dans tout changement de repère (le système de coordonnées), c'est-à-dire dans toute transformation linéaire des coordonnées. On peut montrer que le *groupe des transformations affines* est un sous-groupe du groupe projectif ; les propriétés invariantes pour les transformations de ce sous-groupe sont des propriétés *affines.* Les transformations affines sont aussi appelées *dilatations* quand elles ont lieu dans le plan $\mathbb{R}^2$ ou dans le plan $\mathbb{R}^3$ (ce sont des translations, des symétries et des homothéties).

En géométrie plane, les transformations affines laissent invariante une droite, dite *droite à l'infini* (c'est la droite privilégiée composée des points de rencontre de toutes les droites parallèles deux à deux dans le plan, en admettant que des droites parallèles se coupent à l'infini) ; cette droite privilégiée n'existe pas en géométrie projective. En géométrie dans l'espace, les transformations affines laissent invariant un plan dit *plan à l'infini*, qui n'existe pas en géométrie projective à trois dimensions. Dans un espace à n dimensions, les transformations affines laissent invariant un ensemble de points — c'est-à-dire un espace — à $(n - 1)$ dimensions.

Analytiquement, une transformation affine est définie par un système d'équations linéaires. Ainsi dans $\mathbb{R}^2$, un point (x, y) devient un point (x', y') tel que :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \,, \\ y' = a'x + b'y + c' \,, \end{cases} \tag{6}$$

avec $ab' - ba' \neq 0$.

Une transformation telle que (6) correspond à un changement de base dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$: les propriétés affines d'une figure sont donc celles qui sont indépendantes du choix du système de coordonnées. Par exemple, le fait qu'un point M soit le milieu d'un segment AB est une propriété affine, car elle est vraie dans tout système de coordonnées.

● *La géométrie métrique* est l'étude des propriétés conservées par les transformations du *groupe des déplacements*, à savoir la conservation des longueurs et des angles.

● *Géométrie euclidienne et géométrie non euclidienne.* La géométrie euclidienne affine est une



Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792-1856) : mathématicien russe qui construisit une géométrie rigoureuse en prenant un autre postulat que celui d'Euclide : « Par tout point hors d'une droite, on peut mener deux parallèles à cette droite. »



Euclide ***tel que l'a rêvé* Max Ernst. *(1945. Coll. J. et D. de Ménil.)***

géométrie particulière, dont le groupe de transformations est celui des similitudes qui laisse invariants deux points de la droite à l'infini. La géométrie euclidienne métrique est un cas particulier de la précédente.

Une géométrie dont les transformations du groupe principal admettent d'autres invariants est une *géométrie non euclidienne*. Par exemple, les transformations qui laissent invariante une ellipse ou une hyperbole définissent respectivement la *géométrie elliptique* et la *géométrie hyperbolique*, qui sont des exemples de géométries non euclidiennes.

● *Remarques.* Il s'en faut que la classification précédente n'épuise toutes les géométries. Voici trois exemples importants.

— *Les géométries cartaniennes* (du nom du mathématicien français Élie Cartan) sont caractérisées par un groupe fondamental *G* plus général que le groupe projectif et concernant ce qu'on nomme des *variétés.* Elles contiennent, à titre de cas particuliers, les géométries classées par Klein et la géométrie riemannienne, fondée sur la notion de distance.

— *La géométrie algébrique* fait intervenir le groupe des transformations dites *birationnelles.* Les composantes (x_1, x_2, ..., x_n) qui, dans les géométries de Klein ou dans celles de Cartan, varient d'une manière continue (c'est-à-dire peuvent prendre des valeurs irrationnelles), sont ici astreintes à être rationnelles. Les groupes fondamentaux ne sont donc pas continus.

Aperçu historique.

Nous avons déjà donné de nombreuses informations sur l'histoire de la géométrie grecque, et nous n'y reviendrons pas ici : nous fournirons quelques précisions sur l'évolution des principales branches de la géométrie. Nous recommandons au lecteur de se reporter à la p. 143 pour les définitions des principales notions évoquées.

La géométrie projective.

● *Les origines de la géométrie projective* remontent aux recherches de Desargues (1639). A l'époque, les géomètres (Cavalieri, Mydorge, etc.) s'intéressaient principalement aux coniques, en utilisant les vieilles méthodes du géomètre grec Apollonius (v. 200 av. J.-C.), auteur d'un traité fondamental sur ce sujet, largement commenté au Moyen Age et à la Renaissance. Desargues a étudié d'une manière très nouvelle la section d'une surface conique par un plan, en introduisant la transformation projective. Ses idées ont été reprises par Pascal (*Essay pour les Coniques*, 1640) et par La Hire. C'est Desargues qui introduisit le concept de point à l'infini sur une droite, en considérant un faisceau de droites parallèles comme un faisceau de droites se rejoignant à l'infini : un cylindre est alors un cône dont le sommet est à l'infini, etc. Deux notions très importantes sont impliquées par la théorie de Desargues.

1 - Desargues définit une transformation qui fait correspondre d'une manière biunivoque des points alignés et des droites concourantes ; cette transformation est appelée *involution.*

2 - Il prend en considération la notion d'*homologie* à propos des triangles : deux figures sont homologiques lorsqu'on peut les faire correspondre point par point de sorte que les droites qui passent par deux points homologues se rencontrent en un point fixe appelé *centre d'homologie.*

● *Au XVIIIe siècle*, la géométrie projective est encore dans les limbes, les mathématiciens semblant être dévorés par le calcul infinitésimal et par la géométrie analytique. Toutefois les problèmes de représentation des figures par des perspectives, bien connus des savants de la Renaissance italienne et flamande et des architectes, va connaître un renouveau très important avec les travaux de Monge (à partir de 1770, publiés synthétiquement dans sa *Géométrie descriptive* en 1799). Reprenant une méthode inaugurée par le peintre Dürer en 1525, Monge représente les figures à trois dimensions par deux projections, l'une sur un plan horizontal, l'autre sur un plan vertical (voir p. 91). Ce faisant, il est conduit à examiner comment se transforment les propriétés des figures au cours de ces projections, et quelles sont celles qui se conservent. L'intérêt pour ce genre de recherche va conditionner la naissance officielle de la géométrie projective, au début du siècle suivant.

● *Au XIXe siècle*, alors que les ambitions napoléoniennes mettent l'Europe à feu et à sang, la géométrie à la manière grecque semble définitivement classée parmi les objets de musée : on continue à l'enseigner aux enfants des écoles et aux collégiens, pour leur faire comprendre les rigueurs du raisonnement mathématique, mais les savants ne s'y intéressent plus. Déjà en 1781 le grand mathématicien Lagrange écrivait à D'Alembert, à propos de la géométrie :

> *« ... Il me semble ... que l'abîme est trop profond, et qu'à moins qu'on ne découvre de nouveaux filons, il faudra tôt ou tard l'abandonner... »,*

et il continue en déclarant que le temps n'est pas loin où les chaires de géométrie deviendront « ce que sont actuellement les chaires d'arabe dans les universités » : Euclide, pour Lagrange, il y a deux siècles, c'était déjà le « géomètre de papa ».

Cependant le nouveau filon prédit par le grand mathématicien vit le jour. C'est un élève de Monge, Poncelet, qui le découvrit. Participant comme officier à la campagne de Russie, il eut le bonheur d'être fait prisonnier par les Russes en 1812. Loin des canons, des retraites et des engelures, dans le calme de sa captivité, il eut tout le loisir de découvrir ce qu'il appela les *propriétés projectives des figures*, décrites dans un *Traité*, publié en 1822.

Poncelet, reprenant un certain nombre des concepts de Desargues, notamment la notion des éléments à l'infini, qu'il introduit systématiquement, définit la transformation par *polaires réciproques*, qui sera généralisée sous le nom de *corrélation*. Il fait apparaître le *principe de dualité* (voir ci-après, p. 87), et donne une place très importante aux transformations géométriques pour résoudre des problèmes de géométrie (en faisant subir à une figure une transformation déterminée, on la transforme dans une autre figure, sur laquelle on peut étudier plus commodément les propriétés cherchées : ainsi les propriétés des coniques peuvent se déduire de celles du cercle).

La méthode de Poncelet fut approfondie par Gergonne, Chasles (1852) en France, von Staudt (1856) et Steiner en Allemagne. Traduite en langage analytique, ce qu'on a appelé la *tendance projective en géométrie*, allait faire apparaître des propriétés nouvelles, non seulement en ce qui concerne les relations géométriques, mais aussi, ce qui est le plus remarquable, en ce qui concerne le langage analytique lui-même (travaux de Plücker sur les coordonnées homogènes, voir l'histoire de la géométrie analytique, p. 94). Signalons aussi, parmi les géomètres qui ont participé au développement de la géométrie projective après Poncelet : Möbius, Clifford, Cremona et Brianchon.

Dans la seconde moitié du XIXe siècle, la géométrie projective et l'analyse se complètent harmonieusement dans bien des domaines : la *méthode mixte* (Cayley, Sylvester, Hermite, Clebsch, Elie Cartan) se développe. Parallèlement la géométrie devient plus abstraite et se transforme en une *combinatoire.*

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE ET GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

● *Au XXe siècle*, le cadre de la géométrie projective s'élargit. On construit des géométries projectives sur des corps K de nombres autres que les nombres réels : ce sont les *géométries des groupes continus finis* de Lie, Killing et Elie Cartan. D'autre part diverses questions de géométrie infinitésimale (voir ci-dessous, *b*) donnent naissance à ce qu'on a appelé la *géométrie projective différentielle*, dans laquelle le groupe fondamental est le groupe projectif (travaux de Wilczynski, Fubini, Terracini, Bompiani, Segre, Bol, Godeaux, etc.).

La géométrie analytique.

L'histoire de la géométrie analytique, marquée essentiellement par les travaux de Descartes, Euler et Cramer et de Plücker est résumée p. 93, en guise d'introduction à l'étude de cette branche de la géométrie.

Géométrie infinitésimale et différentielle.

● *Une nouvelle classe de problèmes géométriques* est née avec l'étude analytique des courbes et des surfaces, au XVIIe et au XVIIIe siècles. En effet, la géométrie analytique classique peut répondre à des questions telles que :

— Quelle relation $f(x, y) = 0$ existe-t-il entre les coordonnées d'un point quelconque M sur une courbe C (notion d'équation d'une courbe) ?

— Quels sont les points d'intersection de deux courbes définies par leur équation ?

— Quel est le lieu géométrique — défini par son équation — des points M vérifiant certaines relations (affines ou métriques) ?

— Etc.

Mais, dès que les mathématiciens se sont trouvés en présence de courbes du second ordre (coniques), du troisième ordre (cubiques) ou d'un ordre supérieur, ils ont eu à se poser de nouvelles questions, du genre :

— Quelle est l'équation de la tangente et de la normale à une courbe en un point ?

— Quel est le *rayon de courbure* d'une courbe en un point ?

— Comment mesurer la surface limitée par un arc de courbe, l'axe des x et deux droites parallèles à l'axe des y ?

— Etc.

La solution de ces problèmes exige qu'on fasse intervenir de nouveaux concepts, en particulier ceux de *dérivée*, de *différentielle*, de *primitive* et d'*intégrale*. Ces concepts sont définis dans le cadre du *calcul différentiel et intégral* ou *calcul infinitésimal*, inventé à la fin du XVIIe siècle par Leibniz (en 1672) et Newton (dès 1669, mais ses travaux sur le calcul infinitésimal ne furent publiés que plusieurs années plus tard).

L'application de l'analyse à la géométrie constitue la *géométrie infinitésimale*.

Au XVIIIe siècle, la géométrie infinitésimale fut principalement l'œuvre d'Euler et de Monge. Ces auteurs ont défini, à l'aide des concepts créés par l'analyse, les notions de cercle osculateur, de développée et de développante, de rayon de courbure, de sphère osculatrice, etc. Monge (1775) étudie les surfaces développables en se fondant sur la discussion d'une équation aux dérivées partielles (voir à quoi correspond cette notion p. 118), et les problèmes de surface minimale. L'ensemble de ces découvertes est systématisée dans le traité de Monge intitulé *Application de l'analyse à la géométrie,* publié en 1807.

● *Au XIXe siècle*, Gauss montre comment la géométrie des surfaces peut être étudiée par le calcul infinitésimal (1827), en introduisant les *coordonnées curvilignes.* Cette méthode permet une étude élégante des lignes qui sont un plus court chemin entre deux points A et B d'une surface, et qu'on nomme des *géodésiques.* Au même mouvement de pensée appartiennent les travaux de Jacobi, Lamé (1837), Barré de Saint-Venant (1846), Weingarten, et de l'Ecole italienne (Brioschi, Cremona, etc.).

● *La géométrie différentielle* se développe à partir des travaux de Riemann (1854) et la frontière avec la géométrie infinitésimale est difficile à délimiter, car les deux disciplines se commandent l'une l'autre. L'objet de la géométrie différentielle est l'étude des propriétés des surfaces courbes et des variétés à plusieurs dimensions dans le *voisinage* d'un de ses éléments. Par exemple, une surface sphérique a toujours la même forme, au voisinage de tous ses points ; les autres surfaces ne possèdent pas cette propriété, de sorte que la plus courte distance entre deux points n'est pas la même selon la nature de la surface considérée.



Ph. Jeanbor © Photeb/T.

Cet enfant qui se regarde dans une glace et l'image que celle-ci renvoie sont deux figures (à trois dimensions) dans l'espace, égales, mais non superposables.

La géométrie différentielle est donc, du moins en ses débuts, une géométrie métrique. Au XIXe siècle, elle correspond aux travaux de Grassmann, Beltrami (sur les invariants différentiels), Christoffel, Lipschitz, Enneper et Lie (surface minimale), Darboux (systèmes triples orthogonaux), Bianchi, Henri Poincaré (propriétés des courbes définies par les équations différentielles, en 1881-1886). L'apport de la théorie des groupes fut décisif en ce domaine (travaux de Lie).

● *Au XXe siècle*, la géométrie infinitésimale se prolonge par la géométrie différentielle moderne, dans laquelle on peut distinguer deux tendances importantes : la géométrie *projective différentielle*, dans laquelle le groupe fondamental est le groupe projectif (Cotton, Elie Cartan, G. Fubini, Vicensini, C. Segre), et la *géométrie différentielle globale* (Ehresmann, S. Chern, Lichnerowicz), en rapport avec la topologie.

La géométrie algébrique.

La géométrie algébrique est une branche des mathématiques née au XIXe siècle (M. Noether, en 1871, Clebsch, en 1868, et l'École italienne de Cremona, C. Segre, Enriques, etc.). Elle s'est d'abord posé des problèmes relatifs à l'étude des branches d'une courbe algébrique au voisinage d'un point singulier. Ce problème imposa l'introduction d'un certain nombre de notions nouvelles : courbe adjointe, système linéaire de courbes planes, etc. Ces recherches furent étendues par Clebsch aux surfaces algébriques.

Au XXe siècle, la géométrie algébrique a été étendue aux variétés à plusieurs dimensions : recherche des variétés algébriques dépourvues de point singulier, étude des variétés algébriques dont les points ont des coordonnées qui sont des fonctions rationnelles de certains paramètres, etc. Plus récemment, la géométrie algébrique a fait l'objet des travaux de Chevalley, Zariski, A. Weil, etc.

Conclusion.

En guise de conclusion, nous aimerions citer ces réflexions de Bourbaki sur l'histoire de la géométrie :

> *« ... [après le programme d'Erlangen, en 1872] la géométrie classique — exceptions faites de la géométrie algébrique et de la géométrie différentielle, désormais constituées en sciences autonomes — se fane brusquement et perd tout son éclat... Pour le mathématicien professionnel, la mine est tarie, puisqu'il n'y a plus là de problèmes de structure susceptibles de retentir sur d'autres parties des mathématiques ; et ce chapitre de la théorie des groupes et des invariants peut être considéré comme clos jusqu'à nouvel ordre.*
>
> *Ainsi, après le programme d'Erlangen, les géométries euclidienne et non euclidienne, du point de vue purement algébrique, sont devenues de simples langages, plus ou moins commodes pour exprimer les résultats de la théorie des formes bilinéaires, dont les progrès vont de pair avec ceux de la théorie des invariants. »*

(N. Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann, 1969, pp. 171-172.)

LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Il n'est pas question, dans le cadre de ce livre, de décrire toutes les géométries élaborées depuis 2 500 ans par l'esprit humain. En particulier, les théories de la géométrie différentielle et de la géométrie algébrique sont d'un niveau trop élevé pour pouvoir être présentées avec quelque intérêt dans un exposé de vulgarisation comme celui-ci. Nous nous contenterons de rappeler ici quelques propriétés (affines, métriques et projectives) des figures dans l'espace $\mathbb{R}^3$, sous une forme axiomatique. Le lecteur trouvera en outre un résumé des principaux résultats de la géométrie euclidienne classique p. 143, dans lequel nous avons ajouté quelques indications historiques simples sur la naissance des géométries non euclidiennes.

Les axiomes de base de la géométrie plane.

L'image intuitive d'un plan est donnée par une feuille de papier rigide, étendue à l'infini, ou par la surface de l'eau tranquille. Dans un tel plan, on peut dessiner des points, des lignes droites, des lignes courbes et des figures composées de ces points et lignes. L'étude expérimentale de ces figures fait apparaître deux classes de propriétés :

— des propriétés qui restent invariantes lorsqu'on fait subir aux figures des transformations appartenant au groupe des *dilatations* (voir p. 76) ; ces propriétés sont dites *affines* et la géométrie qui les étudie est la *géométrie plane affine* ;

— des propriétés qui restent invariantes lorsqu'on fait subir aux figures des *déplacements* ; ce sont des propriétés *métriques* (c'est-à-dire relatives à la mesure des longueurs et des angles) et la géométrie qui les étudie est la *géométrie plane métrique.*

Par exemple, une propriété telle que : « le point M est le milieu du segment AB » reste vraie lorsqu'on « dilate » le segment AB par un procédé tel que l'agrandissement photographique : c'est une *propriété affine.* En revanche la propriété qui s'énonce : « le segment AB a une longueur égale à 3 cm » n'est pas conservée par la dilatation, ce n'est pas une propriété affine. Toutefois, si l'on se contente de « déplacer » le segment AB — matérialisé par une tige rigide — il est vérifié par l'expérience courante que sa longueur ne varie pas : la longueur d'un segment, c'est-à-dire la « distance » entre deux points du plan, est une propriété métrique. On notera encore les remarques suivantes :

1 - une propriété métrique est nécessairement affine, mais une propriété affine n'est pas nécessairement métrique ; par conséquent la géométrie métrique est un cas particulier de la géométrie affine ;

2 - l'expérience physique qui consiste à déplacer une règle ne conserve pas *rigoureusement* sa longueur ; la théorie de la relativité montre que cette longueur varie en fonction de la vitesse du déplacement *pendant* le déplacement (mais la règle retrouve sa longueur initiale au repos lorsqu'elle est au repos dans sa position finale).

La géométrie, en tant que branche des mathématiques, n'est pas une science expérimentale ; c'est une discipline qui *déduit* les propriétés des figures par le raisonnement pur, à partir de quelques axiomes fondamentaux, que nous allons rapidement passer en revue.

Axiomes d'existence (groupe E).

● *Énoncé.*

E_1 - On considère un ensemble, désigné par la lettre grecque Π (« pi majuscule ») et appelé *plan* (cette appellation n'est pas nécessaire si l'on fait de la géométrie abstraite ; elle facilite néanmoins l'énoncé des propositions). Les éléments de cet ensemble sont notés par des lettres minuscules, affectées ou non d'un indice : a, b, c, ..., a_1, b_1, ..., a_n, b_n, ... Pour la commodité des exposés, nous dirons « le point a » plutôt que « la lettre a ».

$\mathbf{E}_2$ - Il existe dans Π des sous-ensembles de points notés à l'aide de lettres majuscules affectées ou non d'un indice : *A*, *B*, *C*, ... ; ces parties de Π s'appellent des *droites* et forment un ensemble $\mathcal{D}$ inclus dans Π. On peut dire indifféremment :

« $A \subset \Pi$ » ou « *A* est une droite du plan Π »

(Le lecteur est prié de se reporter éventuellement au n° **512.1**, où sont expliqués les symboles de la théorie des ensembles.)

$\mathbf{E}_3$ - L'ensemble Π contient au moins deux droites.

$\mathbf{E}_4$ - Toute droite *A* contient au moins deux points.

● *Commentaires et notations.* L'idée fondamentale, c'est que Π est un *ensemble de points.* Tout sous-ensemble de Π est une *figure dans le plan* Π. L'axiome $\mathbf{E}_3$ est important, car il affirme qu'il existe au moins deux figures particulières dans Π (c'est-à-dire deux sous-ensembles de points), à savoir deux droites. Remarquer aussi le parallélisme des axiomes $\mathbf{E}_3$ et $\mathbf{E}_4$: tout plan comprend au moins deux droites, toute droite contient au moins deux points.

En principe, on pourrait continuer à utiliser ici les notations de la théorie des ensembles. Néanmoins on se sert parfois d'expressions différentes empruntées à l'expérience quotidienne. Précisons donc le vocabulaire :

Écriture conventionnelle	Signification
A, *B* et *C* sont des figures quelconques.	
$a \in \Pi$	Le point *a* est dans le plan Π.
$A \subset \Pi$	L'ensemble de points *A* (la figure *A*) est dans le plan Π.
$a \in A$	Le point *a* appartient à la figure *A* (est sur *A*). *A* passe par *a*.
$a \notin A$	Le point *a* est extérieur à *A*.
$A \cap B = C$	Les figures *A* et *B* se coupent selon la figure *C* ; *A* et *B* sont sécantes.
$A \cap B = \varnothing$	*A* est extérieur à *B*, *A* et *B* n'ont aucun point commun.
A, *B* et *C* sont des éléments de $\mathcal{D}$ (des droites).	
$a \in A$	Le point *a* est sur la droite *A* ; *A* passe par *a*.
$a \notin A$	Le point *a* n'est pas sur *A*.
$A \cap B = \{a\}$ $A \cap B = a$	Les droites *A* et *B* se coupent selon $\{a\}$ ou, abusivement : les droites *A* et *B* se coupent en *a* (ont pour intersection *a*).
$A \cap B = \varnothing$	Les droites *A* et *B* ne se rencontrent pas (ou : *sont strictement parallèles*).
$A = B$	Les droites *A* et *B* sont confondues.
$A = B$ ou $A \cap B = \varnothing$	Les droites *A* et *B* sont parallèles (ou $A \parallel B$).
$\{a, b\}$	*Bipoint* : figure formée par deux points ; ne pas confondre avec *segment* $[a, b]$ (voir ci-dessous).
$\{a, b, c\}$	*Tripoint* : figure passant par trois points ; ne pas confondre avec *triangle* ; *a*, *b* et *c* sont les *sommets* du tripoint.

Deux façons d'exprimer les relations fondamentales de la géométrie.

— *Remarque* : quand on écrit : $A \parallel B$, on envisage donc deux cas, $A \cap B = \varnothing$ et $A = B$. Dans le langage courant on distingue ces deux cas en disant :

— *A* et *B* sont *confondues* pour traduire $A = B$;

— *A* et *B* sont *parallèles au sens strict* pour traduire $A \cap B = \varnothing$.

Axiomes d'incidence (groupe I).

● *Énoncé.*

$\mathbf{I}_1$ - Par deux points *a* et *b* il passe une seule droite *D*, notée *D*(*a*, *b*).

$\mathbf{I}_2$ - Par tout point *a* il passe une parallèle et une seule à toute droite *A*.

● *Commentaires.* Ces axiomes sont, en principe, arbitraires. En fait, ils ont été choisis *pour convenir* à notre expérience physique quotidienne (fil tendu, rails, directions de deux fils à plomb suspendus à un même axe, etc.). En choisissant d'autres axiomes d'incidence, nous bâtirions d'autres géométries (riemanienne, etc.) qui conviennent à d'autres types d'ensembles de points, comme on en rencontre, par exemple, en physique relativiste.

L'axiome $\mathbf{I}_1$ permet de définir l'*alignement* de trois points : si un point *c*, distinct de *a* et *b*, appartient à l'ensemble *D*(*a*, *b*), alors *a*, *b* et *c* sont dits *alignés*.

L'axiome $\mathbf{I}_2$ est le fameux « postulat » d'Euclide. On l'avait baptisé ainsi, jadis, parce qu'on le considérait comme une proposition indispensable à la construction de la géométrie, mais indémontrable ; le maître demandait (*postulare* = « demander », en latin) à son disciple de l'accepter sans discussion. En déclarant que ce n'est pas un *postulat*, mais un *axiome*, on insiste sur son caractère arbitraire, c'est-à-dire sur le fait qu'on peut le refuser et le remplacer par un autre axiome (d'où une nouvelle géométrie). En langage « euclidien », un postulat est une manière de dire : « c'est cela ou rien » ; un axiome est une manière de dire : « c'est cela ou autre chose ».

Si nous choisissons I_2 comme axiome, nous ne dirons plus *A* est *une* parallèle à *B*, mais *A* est *la* parallèle à *B* (*menée de a* ou *issue de a*). Cette expression englobe le cas particulier où *a* appartient à *B* (qui entraîne $A = B$).

Axiome d'ordre (axiome O).

● *Énoncé.* Sur chaque droite *D* on peut définir deux relations d'ordre total (voir p. 17), opposées l'une de l'autre. Lorsqu'une droite *D* est munie d'une telle relation, on l'appelle une *droite orientée*.

● *Notation.* La relation d'ordre s'écrit : « $\leqslant$ » (lire : « antérieur à »). Le symbole « $<$ » signifie : « strictement antérieur à ». Par exemple :

— $a \leqslant b$ signifie : soit *a* antérieur au sens strict à *b* ; soit *a* confondu avec *b*.

— $a < b$ signifie : *a* ne peut jamais être confondu avec *b* (on dit aussi *a* est *à gauche* de *b*, ou *b* est *à droite* de *a*).

Si *a* est antérieur à *b*, on peut aussi dire que *b* est *postérieur* à *a* ou *vient après a*, ce qui s'écrit $\geqslant$ ou $>$, selon que la relation est générale ou stricte.

● *Remarque fondamentale.* Les axiomes d'existence et d'incidence posent qu'une droite contient au moins deux points, et que deux points définissent une droite ; mais ils ne précisent pas si une droite possède plus de deux points. Dans ce qui suit, nous n'avons donc pas le droit de dire qu'il existe toujours plus de deux points sur une droite, mais, par contre, nous avons le choix de présenter ce fait comme une *hypothèse.* Nous poserons plus loin l'axiome suivant : il existe une infinité de points sur une droite.

● *Commentaire.* Soit une droite *D* définie par deux points *a* et *b* (axiome $\mathbf{I}_1$). Un *intervalle* sur cette droite est un ensemble de points de cette droite, dite aussi *support* de l'intervalle en question. Il peut exister plusieurs types d'intervalles sur une droite orientée *D*(*a*, *b*).

— Le *segment* $[a, b]$ est l'*intervalle fermé* des points *x* appartenant à *D* tels que $a \leqslant x \leqslant b$. Si $a = b$, on a $[a, b] = \{a\}$, c'est-à-dire que le segment se réduit au point *a* ; si $a \neq b$, le segment $[a, b]$ comprend d'autres points que *a*. La droite *D* étant orientée, le segment $[a, b]$ est lui-même orienté.

— Un segment privé de ses extrémités s'écrit $]a, b[$; c'est l'ensemble des points *x* qui vérifient la relation d'ordre strict $a < x < b$. Si l'ensemble $]a, b[$ n'est pas vide, on dit que *x* est entre *a* et *b*.

— Un segment privé d'une de ses extrémités est dit *intervalle semi-ouvert* (à gauche ou à droite) et noté $]a, b]$ s'il est privé de *a*, $[a, b[$ s'il est privé de *b*. Tout point *x* appartenant à cet intervalle est tel que :

$$a < x \leqslant b \text{ pour }]a, b] \text{ et } a \leqslant x < b \text{ pour } [a, b[.$$

Dans tous les cas *D* est le *support* de l'intervalle considéré, *a* et *b* sont les *extrémités* de cet intervalle.

● *Deux définitions importantes* sont liées à l'existence de l'*axiome d'ordre* qui traduit, simplement, l'expérience que nous avons, quand nous *dessinons* l'image d'une droite, de passer d'un point donné à un autre, situé à droite du premier quand nous la traçons de la gauche vers la droite (c'est-à-dire dans le sens de l'écriture commune en Occident).

— *Notion de demi-droite.* Soit une droite *D* et un point *a* tel que *a* appartienne à *D* ; *a* partage l'ensemble *D* en deux sous-ensembles disjoints (c'est-à-dire qui n'ont pas d'éléments communs) : l'un comprend tous les points antérieurs à *a* (à gauche de *a*), l'autre tous les points situés à droite de *a*. Ces deux ensembles sont appelés *demi-droites ouvertes d'origine a* et notés $]., a[$ pour celui qui est formé des points *x* à gauche de *a* ($x < a$), $]a, .[$ pour celui formé des points *x* à droite de *a* ($a < x$). Si l'on adjoint *a* à l'une de ces demi-droites ouvertes, on définit une *demi-droite fermée* d'origine *a*.

D'après l'axiome $\mathbf{E}_4$, il existe certainement un second point *b*, distinct de *a*, sur la droite *D*. On a donc, ou bien $a < b$, ou bien $b < a$. Supposons qu'on ait $a < b$; les deux demi-droites ouvertes définies ci-dessus sont alors désignées respectivement par $]\mathbf{ba}, a[$ et $]a, \mathbf{ab}[$.

Salle de géométrie de l'ancien* Collegium Maius *de l'université de Cracovie. A l'usage des élèves, et aussi dans un but décoratif, les problèmes d'Euclide sont dessinés sur les murs.



Ph. © Erich Lessing-Magnum/T.

La demi-droite $]a, \boldsymbol{ab}[$ n'est certainement pas vide, puisqu'elle comprend au moins un point (le point b) ; la demi-droite $]\boldsymbol{ba}, a[$ peut être vide, puisque nous n'avons défini aucun point dans ce sous-ensemble.

— Notion d'*ensemble convexe* : Soit A une figure du plan Π, c'est-à-dire un sous-ensemble de points inclus dans Π, sous-ensemble qui n'est pas nécessairement une droite, et soient deux points a et b contenus dans A :

$$a \in A, \quad b \in A.$$

Si, quels que soient a et b, l'ensemble $[a, b]$ — c'est-à-dire le segment $[a, b]$ — est inclus dans A, A est dit *convexe*. Voici une image de cette notion (figure ci-dessous).

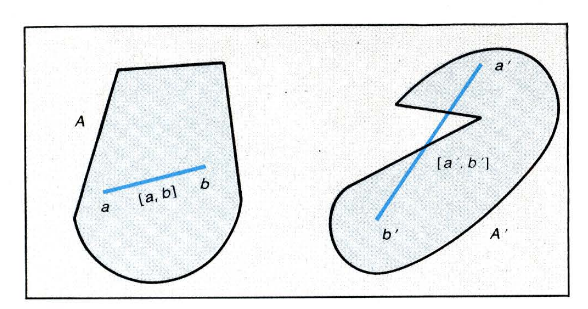


Image d'un ensemble de points convexe.
La surface ***A*** **est un ensemble de points ; *a* et *b* sont deux points particuliers et l'ensemble [*a*, *b*] est représenté par le trait bleu *ab* ; ce « trait » est inclus dans *A*, donc *A* est convexe ; par contre *A'* n'est pas convexe (une partie du trait bleu n'est pas dans *A'*).**

Axiome de partage (axiome P).

● *Énoncé.* La relation $\mathcal{R}$ = « être du même côté d'une droite D » est transitive.

● *Commentaire.* Définissons $\mathcal{R}$: deux points a et b sont dits *situés du même côté d'une droite D* si l'ensemble $[a, b]$ et l'ensemble D n'ont aucun point commun, c'est-à-dire si leur intersection est vide :

$$[a, b] \cap D = \varnothing,$$

ce qui peut aussi s'exprimer ainsi : le segment $[a, b]$ ne rencontre pas la droite D.

Page 16, nous avons convenu de noter $\mathcal{R} \wr a, b \wr$ une relation $\mathcal{R}$ entre a et b. Conservons cette notation et renvoyons le lecteur aux définitions des propriétés d'une relation binaire.

L'axiome **P** peut aussi s'écrire :

si $\mathcal{R} \wr a, b \wr$ et $\mathcal{R} \wr b, c \wr$, alors $\mathcal{R} \wr a, c \wr$,

c'est-à-dire : si a et b sont d'un même côté de D et si, en même temps, b et c sont d'un même côté de D, *alors* a et c sont d'un même côté de D ; ou encore : si deux points sont d'un même côté d'une droite par rapport à un même troisième, *alors* ils sont tous deux d'un même côté de cette droite (nous constatons, au passage, que l'axiome **P** traduit une expérience banale). L'axiome de partage est équivalent à l'énoncé : « Tout demi-plan est convexe. »

Or, il est facile de démontrer que $\mathcal{R}$ est, en outre, réflexive et symétrique.

— $\mathcal{R}$ est *réflexive*, car on peut écrire :

Notation symbolique	Notation explicite
$[a, a] = \{ a \}$.	segment $[a, a]$ = ensemble $\{ a \}$.
$a \notin D \Rightarrow \{ a \} \not\subset D \Rightarrow [a, a] \cap D = \varnothing$.	Si a n'appartient pas à D, alors l'ensemble a (mis entre deux accolades) n'est pas inclus dans D, alors l'intersection du segment $[a, a]$ et de la droite D est un ensemble vide.

— $\mathcal{R}$ est *symétrique*, car $[a, b] = [b, a]$, les deux ensembles constituent le même ensemble, donc :

$$[a, b] \cap D = [b, a] \cap D = \varnothing.$$

● *Conséquence.* La relation « être du même côté de D » est réflexive, symétrique, transitive ; c'est donc une *relation d'équivalence* entre les points a et b. Il en résulte que les points d'un plan Π dans lequel on a tracé une droite D se répartissent en deux classes d'équivalence Π_1 et Π_2 appelées *demi-plans de bord D* (un demi-plan est *ouvert* s'il ne contient pas la droite D, et *fermé* dans le cas contraire).

● *Propositions équivalentes à l'axiome de partage.* On peut montrer, par un enchaînement convenable de conséquences, que l'axiome **P** est équivalent aux deux propositions suivantes, que nous appellerons $\mathbf{P}_c$ et $\mathbf{P}_p$:

— $\mathbf{P}_c$: pour tout couple $\{D, D'\}$ de droites strictement parallèles (c'est-à-dire qu'on exclut le cas $D = D'$), et pour tous points m, m', n, n' tels que le bipoint $\{ m, n \}$ appartienne à D et le bipoint $\{ m', n' \}$ appartienne à D', toute parallèle Δ à ces droites qui coupe le segment $[m, m']$ coupe aussi le segment $[n, n']$.

— $\mathbf{P}_p$ (théorème de Pasch). Cette proposition exige la définition préalable : étant donné un tripoint $\{ a, b, c \}$, les ensembles de points (segments) $[a, b]$, $[a, c]$ et $[b, c]$ sont appelés les *côtés* du tripoint. Cela dit, nous pouvons énoncer le théorème de Pasch : « toute droite qui rencontre un côté d'un tripoint en rencontre aussi un second ».

Les propositions $\mathbf{P}_c$ et $\mathbf{P}_p$ sont plus « commodes » que **P**, car elles correspondent à des « cas de figures » (il faut entendre par là des *combinaisons* de sous-ensembles de Π) précis. Comme on peut démontrer que :

$$\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{P}_c \Rightarrow \mathbf{P}_p \Rightarrow \mathbf{P},$$

on peut choisir indifféremment comme axiome soit **P**, soit $\mathbf{P}_c$, soit $\mathbf{P}_p$. Noter que si $\mathbf{P}_p$ est choisi comme équivalent à **P**, il ne faut plus l'appeler « théorème de Pasch », mais « axiome de Pasch ». Par contre, **P** deviendra démontrable : ce sera le « théorème de partage ».

● *Observations importantes.* On obtient, à partir des axiomes précédents, les théorèmes suivants :

— si une droite contient plus de deux points, elle en contient une infinité (ce théorème ne peut être démontré uniquement à partir des axiomes **I**, ce qui démontre l'*indépendance* des axiomes d'ordre et de partage par rapport aux axiomes d'incidence) ;

— toute demi-droite ouverte contient une infinité de points ;

— tout demi-plan ouvert contient une infinité de points ;

— tout intervalle ouvert contient une infinité de points.

Premières conséquences de ces axiomes.

Conséquences des axiomes d'existence et d'incidence.

Le seul jeu de ces axiomes va nous faire découvrir les propriétés fondamentales concernant les droites parallèles. Ce qu'il est important de comprendre, ici, c'est la méthode de démonstration, rigoureusement logique, et que nous donnerons dans quelques cas seulement, à titre d'exemples.

● *Théorème* 1 - Deux droites quelconques D et D' sont, soit parallèles, soit sécantes. Dans ce dernier cas, elles ont un point commun et un seul.

Il s'agit, bien entendu, de parallèles au sens large. Voici comment cela s'écrit :

$$\left.\begin{array}{l} D, D' \in \mathcal{D} \\ \forall D, \forall D' \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{ou bien } D \cap D' = \{ a \} \\ \text{ou bien } D \parallel D'. \end{array}$$

● *Théorème* 2 - La relation « $\parallel$ » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{D}$. Démontrons ce *théorème* : il faut démontrer que « $\parallel$ » est une relation réflexive, symétrique et transitive pour tout couple D, D'.

— *Réflexivité* : $D = D'$ entraîne $D \parallel D'$: la relation est réflexive.

— *Symétrie* : si $D \cap D' = \varnothing$ (ce qui entraîne $D \parallel D'$), alors $D' \cap D = D \cap D' = \varnothing$ (commutativité de « $\cap$ »), de sorte que $D' \parallel D$.

— *Transitivité* : enfin si l'on a à la fois $D \parallel D'$ et $D' \parallel D''$, cela entraîne que $D \parallel D''$. En effet, examinons toutes les relations possibles entre D et D'' :

1. On peut avoir $D = D''$; dans ce cas $D \parallel D''$ est vrai (puisque « $\parallel$ » est pris au sens large).

2. On peut avoir D strictement parallèle à D'', c'est-à-dire $D \cap D'' = \varnothing$, donc, ici aussi, $D \parallel D''$.

3. On peut avoir $D \cap D'' = a$; mais, en vertu de l'axiome $\mathbf{I}_2$, il passe par a une parallèle et une seule à D' ; comme on doit avoir $D \parallel D'$ et $D'' \parallel D'$, passant toutes deux par a, cela signifie que $D = D''$ et que l'on a encore $D \parallel D''$. La relation « $\parallel$ » est donc transitive.

(Cette dernière propriété s'énonce souvent : si deux droites sont parallèles, toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre.)

Conclusion : la relation « est parallèle à » est réflexive, symétrique, transitive ; c'est donc une relation d'équivalence sur $\mathcal{D}$.

Étant donné une droite A, on peut diviser les droites de $\mathcal{D}$ en deux catégories : celles qui sont parallèles à A et les autres. Les droites parallèles à A forment une *classe d'équivalence* pour le parallélisme. Une telle classe s'appelle une *direction*. Nous noterons les directions par des lettres grecques minuscules : α, β, ... Dire qu'une droite D a la direction α ou est un élément de la classe α, cela signifie qu'elle est parallèle à toutes les droites de cette classe.

● *Théorème* 3 - Il existe au moins deux directions distinctes dans le plan.

● *Théorème* 4 - Il existe une bijection entre deux droites distinctes quelconques D et D' du plan : à tout point a de D on peut associer un point a' de D', et tout point a' de D' a un correspondant distinct a dans D.

Figures usuelles.

La géométrie plane classique utilise des figures usuelles appelées « angles », « triangles », etc. Ces notions — tirées de l'expérience — ont été manipulées par tous les écoliers du monde. On pourrait presque dire que la géométrie élémentaire classique est, pour un enfant, la première découverte *exotique* : jusqu'alors, il ne connaissait que des mots évoquant les actes de la vie courante. Dès son entrée à l'école primaire, en même temps qu'il apprend à lire et à écrire ces mots de tous les jours, on lui fait découvrir les noms de ces *formes*, isolées de leur support utilitaire : triangle, parallélogramme, hexagone, noms étrangers, jamais rencontrés et bien propres à exalter l'imagination linguistique d'un jeune enfant.

Sur les figures de la page ci-contre nous avons donné les définitions abstraites de ces figures, considérées comme des ensembles de points particuliers, en les accompagnant de leurs images, qui peuvent être interprétées comme des diagrammes de Venn commodes. Le lecteur établira sans peine la correspondance avec les définitions classiques (dont il découvrira, nous l'espérons, la particularité).

Structure de la droite.

Historiquement, l'esprit humain ne s'est pas élevé d'emblée à cette conception abstraite de la géométrie. L'homme a d'abord *mesuré* des étendues et c'est pour faciliter ces mesures qu'il a créé, *de bric et de broc*, une géométrie qui, après récapitulation et mise en forme, est devenue la géométrie euclidienne. Les axiomes énoncés plus haut (**A, E, I, O, P**), qui suffisent pour étudier certaines propriétés fondamentales des figures (comme : le parallélisme, le fait pour une figure d'en couper une autre, les notions — très délicates du point de vue axiomatique — de domaine intérieur d'un polygone, etc.), sont insuffisants dès qu'il s'agit de problèmes de mesures (problèmes *métriques*). Traduisons cela en termes de « trains qui se rencontrent » : si l'on pose à un géomètre (abstrait) la question :

« Quels chemins doivent suivre deux trains pour ne jamais se rencontrer ? » Avec les axiomes **E, I, O** et **P** il peut répondre de deux façons :

1 - les deux voies doivent être parallèles au sens strict ;

2 - la voie suivie par le premier train doit être entièrement contenue à l'intérieur d'un polygone (nous ne parlerons pas de « courbe » pour l'instant) et la voie du second train à l'extérieur de ce polygone. On pourra *matérialiser* l'intérieur et l'extérieur en construisant une *muraille de Chine* sur la *frontière* du domaine polygonal.

Mais si on lui pose la question :

« Comparer les chemins parcourus par les deux trains », il ne possède aucun axiome lui permettant d'y répondre. Nous allons établir ces axiomes et voir quelles conséquences il en résulte pour l'étude des figures, plus spécialement pour l'étude de la droite.

Axiomes des distances (groupe D).

Les axiomes des distances permettent d'aborder la *géométrie métrique* de la droite ; pour la notion de distance, voir aussi p. 106.

● *Énoncé.* Étant donné deux points a et b du plan, distincts ou confondus, on peut toujours leur faire correspondre un *nombre réel positif ou nul*, noté $d(a, b)$ ou encore, s'il n'y a pas de confusion possible, ab. Ce nombre est appelé *distance des deux points a et b* ; il vérifie les axiomes suivants :

$\mathbf{D}_1$ - Pour tout $c \in [a, b]$ on a : $ac + cb = ab$.
$\mathbf{D}_2$ - $ab = 0$ entraîne $a = b$.
$\mathbf{D}_3$ - Pour tout couple (a, b) on a $ab = ba$.

● *Commentaires.* La distance *ab* est parfois appelée « longueur du segment $[a, b]$ ».

Des axiomes **D** on tire immédiatement les conséquences suivantes (qui sont donc des théorèmes) :

— $a = b \Rightarrow ab = 0$ (réciproque de $\mathbf{D}_2$, conséquence de $\mathbf{D}_1$).

— $a \neq b \Rightarrow ab > 0$ (« > 0 » se lit « positif » ou « plus grand que zéro »). En effet, puisque *ab* désigne un nombre réel positif ou nul (définition ci-dessus), et que $a \neq b$ implique $ab \neq 0$, *ab* ne peut être que positif.

— Pour tout point *c* de $[a, b]$ on a $ac \leqslant ab$.

Axiome de continuité (axiome C).

● *Énoncé.* Pour tout point *a* du plan, pour toute demi-droite d'origine *a* et pour tout *nombre réel positif ou nul r*, il existe au moins un point *m* de cette demi-droite telle que $am = r$ (bien noter que *r* désigne un nombre réel positif ou nul et ne peut jamais être un nombre négatif, en vertu de notre définition).

● *Commentaire.* Soit une droite *D*, un point *a* sur cette droite et supposons que *D* soit orientée (ce qui signifie : munie d'une relation d'ordre, $a \leqslant b$ par exemple). Étant donné un point *m* quelconque de *D*, la distance *am*, d'après la définition du paragraphe précédent, est un nombre réel positif ou nul que nous désignerons par la lettre *r* (*attention* : *r*, dans ce qui suit, ne sera *jamais* négatif). Si nous décidons de faire correspondre, à chaque point *m*, un nombre réel *quelconque* (c'est-à-dire positif, ou nul, ou *négatif*), il nous faut préciser la loi suivante, que nous noterons

$$m \xrightarrow{f} f(m):$$

si $m = a$, à *m* correspond le réel $r = 0 \neq f(a)$;
si $a < m$, à *m* correspond le réel $r = f(m)$;
si $m < a$, à *m* correspond le réel $-r = f(m)$.

On dit qu'on a appliqué la droite *D* dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels (*appliquer* = « mettre en correspondance »). On démontre que cette application est une bijection (à chaque point correspond un réel, à chaque réel correspond un point).

Considérons maintenant le segment $[m, n]$. Trois cas peuvent se présenter :

1. $m \leqslant a \leqslant n$: *a est entre m et n* ; on a $am = -r$ et $an = r'$ (positif) ; la distance $d(m, n) = mn$ est égale à $ma + an$ (d'après l'axiome $\mathbf{D}_1$) ; or, ici :

$$f(m) = am = -r, \text{ donc } -f(m) = +r = ma,$$
$$f(n) = an = r', \text{ et } mn = r' + r = |f(n) - f(m)|$$

(les barres signifient qu'on prend la *valeur absolue* de la différence $f(n) - f(m)$, car la distance *mn* est un nombre réel positif, en vertu de la définition générale du § *a*).

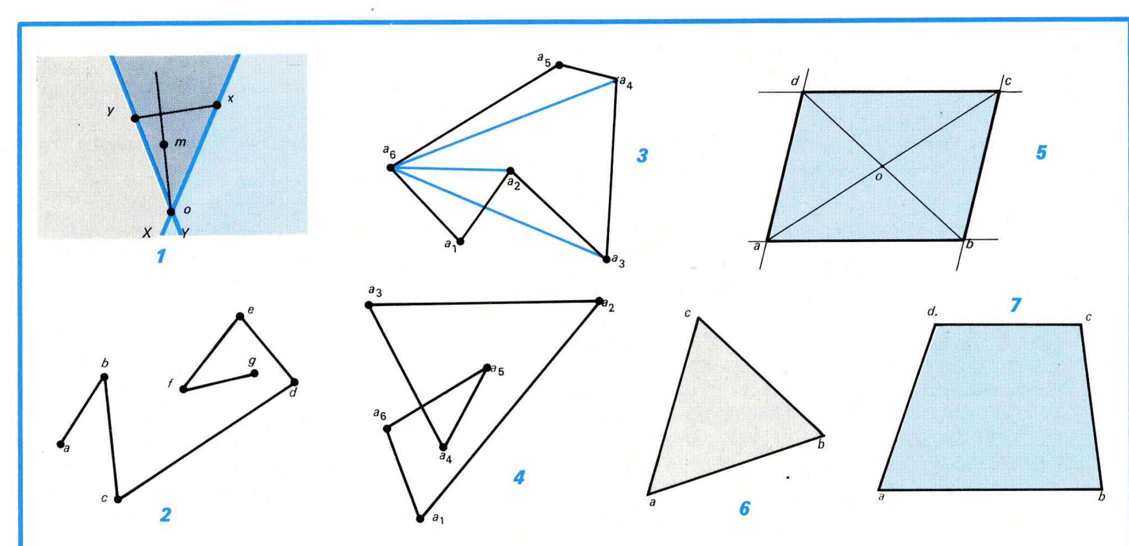
2. $a \leqslant m \leqslant n$: on a aussi $mn = |f(n) - f(m)|$.
3. $m \leqslant n \leqslant a$: on a aussi $mn = |f(n) - f(m)|$.

● *Abscisse d'un point sur une droite pointée.* Le fait de choisir un point *a* (arbitraire) sur *D*, et d'orienter *D* par le *vecteur directeur* **ab** détermine, pour tout point *m*, l'application :

$$f(m) = \text{nombre réel } x = \begin{cases} d(a, m) & \text{si } a < m \text{ (donc } x \text{ positif)}; \\ 0 & \text{si } a = m; \\ -d(a, m) & \text{si } m < a \text{ (donc } x \text{ négatif).} \end{cases}$$

Ce nombre réel, positif, négatif ou nul, qu'on peut associer biunivoquement à tout point *m* d'une droite pointée s'appelle l'*abscisse du point m* sur la droite pointée (D, a). Il dépend, bien évidemment, du point *a* choisi : l'abscisse d'un point n'est donc pas une *propriété intrinsèque* de ce point, puisqu'elle est fonction du choix d'un autre point (l'origine).

Figures géométriques usuelles.



1. **Secteur angulaire convexe.** ***On considère les droites X et Y (dont les images sont les lignes bleues) et les demi-plans (X, o) — image en grisé — et (Y, o) — image en bleu clair ; les droites X et Y se coupent en o. On appelle*** **secteur angulaire convexe** ***l'ensemble de points intersection des deux demi-plans (X, o) et (Y, o) ; l'image de ce secteur est en gris foncé sur le diagramme. Si*** $x \in X$ ***et*** $y \in Y$***, on peut désigner ce secteur par***

$$(o\,;\,\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oy}) = (X, o) \cap (Y, o).$$

Si m est un point quelconque du secteur ($m \neq o$ ***), la demi-droite*** $[o, \overrightarrow{om}[$ ***appartient au secteur. De même pour les points du segment*** $[x, y]$***. o est le sommet, les demi-droites*** $[o, \overrightarrow{ox}[$ ***et*** $[o, \overrightarrow{oy}[$ ***sont les côtés du secteur angulaire convexe*** $(o\,;\,\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oy})$***. D'autre part, tout secteur angulaire convexe peut être considéré comme la réunion (au sens de la théorie des ensembles) de toutes les demi-droites d'origine o qui coupent le segment*** $[x, y]$***. (Le lecteur aura reconnu dans cette définition l'angle saillant de la géométrie classique.)***

Le complémentaire de l'ensemble $(o\,;\,\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oy})$ ***est un secteur angulaire concave ; son image comprend les zones en bleu clair ou en grisé, mais non en croix. Toute demi-droite de sommet o ne coupant pas l'intervalle*** $]x, y[$ ***est incluse dans ce secteur. (Le lecteur aura reconnu la notion classique d'angle rentrant.)***

2. **Ligne polygonale.** ***On appelle ainsi un ensemble de segments consécutifs (segments ayant en commun une extrémité et cette extrémité seulement). Les segments [a, b], [b, c], ..., [f, g] sont les côtés de la ligne polygonale ; les points a, b, ..., f, g sont ses sommets.***

3. **Polygone non croisé** ***(ou, simplement,*** **polygone*****). Ligne polygonale dont le premier et le dernier sommet coïncident et dont aucun côté ne coupe un autre côté non consécutif. Les segments joignant deux sommets non consécutifs sont appelés*** **diagonales*****. On a tracé en bleu sur le diagramme l'image des diagonales issues du sommet*** a_6***.***

4. **Polygone croisé.** ***Polygone dont au moins deux côtés non consécutifs ont un point commun (point double) : ici les côtés*** a_3a_4 ***et*** a_5a_6***.***

5. **Parallélogramme.** ***C'est le polygone fondamental de la géométrie élémentaire. Un parallélogramme est un polygone à quatre côtés (= quadrilatère) deux à deux parallèles ; l'enveloppe convexe du parallélogramme abcd est l'intersection (au sens de la théorie des ensembles) des bandes planes dont les bords sont les droites supportant les côtés, c'est-à-dire les bandes [D(a, b), D(c, d)] et [D(d, a), D(b, c)]. Cette enveloppe est en bleu sur le diagramme. Le parallélogramme lui-même (c'est-à-dire l'ensemble des 4 segments d'extrémités a, b, c et d) est la*** **frontière** ***de l'enveloppe convexe dont les points constituent l'intérieur du parallélogramme à condition de ne pas y inclure ceux de la frontière. Le complémentaire dans le plan de l'enveloppe convexe constitue l'extérieur du parallélogramme (par abus de langage).***

On démontre, d'après les conséquences des axiomes de base, que les diagonales d'un parallélogramme sont sécantes, c'est-à-dire que l'ensemble $[a, c] \cap [b, d]$ ***n'est pas vide et qu'il contient un élément unique, o, appelé*** **point de concours des diagonales** ***(le fait que, sur le diagramme, les images des diagonales se coupent ne permet de rien affirmer : un diagramme n'est pas une démonstration ; d'ailleurs on peut concevoir un diagramme conventionnel où les droites ne seraient pas représentées par des lignes droites, comme pp. 79-80).***

6. **Triangle** : ***c'est un polygone à trois côtés, noté (a, b, c) ou abc quand aucune confusion n'est possible. Les points composant l'ensemble du triangle sont ceux des segments [a, b], [b, c], [a, c] ; ils comprennent en particulier le tripoint { a, b, c }. Un triangle n'a pas de diagonale et son enveloppe convexe est l'intersection des trois demi-plans fermés de bords respectifs D(a, b), D(b, c) et D(a, c). Cette enveloppe, privée de sa frontière, c'est-à-dire des points constituant le triangle, est aussi appelée l'intérieur du triangle. Le complémentaire de l'enveloppe est l'extérieur du triangle.***

7. **Trapèze** : ***quadrilatère dont deux côtés au moins sont parallèles (bases du trapèze).***

La relation de Chasles.

Nous venons de dire que l'abscisse d'un point sur une droite pointée n'est pas une propriété intrinsèque du point considéré ; demandons-nous s'il n'existe pas, sur la droite *D*, une propriété qui soit intrinsèque, c'est-à-dire indépendante de l'origine choisie.

● *Mesure algébrique d'un vecteur.* Soit d'abord un exemple simple : l'organisateur d'une compétition de ski — par exemple d'une « descente » — ne déclare pas : « les skieurs partiront de l'altitude 2 500 mètres pour arriver à l'altitude 2 000 mètres », mais « les skieurs descendront une piste de 500 mètres de dénivellation ». L'*altitude* est une propriété extrinsèque : elle dépend de l'origine choisie (le niveau de la mer pour les géographes) ; la *dénivellation* est une propriété intrinsèque de la piste, indépendante de l'origine choisie.

Considérons maintenant le bipoint $\{m_1, m_2\}$ sur la droite pointée *D* ; on a :

$$\begin{cases} \text{abscisse de } m_1 = f(m_1) = x_1\,; \\ \text{abscisse de } m_2 = f(m_2) = x_2\,. \end{cases} \qquad (1)$$

Le couple m_1, m_2 peut être ordonné : on peut choisir d'appeler m_1 l'*origine* du couple et m_2 l'*extrémité* du couple, ce qu'on écrit symboliquement $\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2$; si l'on avait fait le choix opposé, on aurait écrit $\boldsymbol{m}_2\boldsymbol{m}_1$. Un bipoint ordonné de la sorte s'appelle un *vecteur géométrique* (on a le droit de l'appeler « vecteur » parce que tous ces couples ordonnés forment un ensemble qui vérifie les axiomes de la structure d'espace vectoriel ; c'est d'ailleurs là un point que nous n'avons pas à discuter ici).

On appelle *mesure algébrique* du vecteur $\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2$ le nombre réel (positif, négatif ou nul) : $x_2 - x_1$, et l'on écrit :

$$\overline{m_1 m_2} = f(m_2) - f(m_1) = x_2 - x_1\,. \qquad (2)$$

● *Remarque* : ne pas confondre $\overline{m_1 m_2}$ (surligné), qui est un *nombre réel*, avec $\overrightarrow{m_1 m_2}$ (fléché), qui est un *vecteur* (représenté dans cet ouvrage par $\boldsymbol{m}_1\ _2$) : les lois de composition (= les opérations) sur les *réels* $\overline{m_1 m_2}$ ne sont pas les mêmes que les lois de composition sur les *vecteurs* $\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2$, car les deux ensembles n'ont pas la même structure. De plus, si la mesure algébrique du vecteur $\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2$ est $\overline{m_1 m_2}$, la mesure algébrique du vecteur $\boldsymbol{m}_2\boldsymbol{m}_1$ (vecteur opposé) est $\overline{m_2 m_1} = -\overline{m_1 m_2}$. Enfin, le vecteur $\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_1 = \vec{0}$ a une mesure algébrique égale à 0, puisque $x_2 = x_1$ et que $x_1 - x_1 = 0$.

● *Exemple concret.* Soit deux points *a* et *b* tels que $f(a) = -1$ et $f(b) = -5$, on a :

$$\text{distance } d(a, b) = ab = |f(b) - f(a)| = |-5 - (-1)| = |-4| = 4\,; \qquad (3)$$

$$\{\text{mesure algébrique de } \boldsymbol{ab}\} = ab = f(b) - f(a) = -4\,; \qquad (4)$$

$$\{\text{module du vecteur } \boldsymbol{ab}\} = d(a, b) = 4\,. \qquad (5)$$

● *Relation de Chasles pour trois points.* Soit trois points m_1, m_2 et m_3 sur une droite pointée (D, a). On démontre que, quelle que soit la position respective des points m_1, m_2 et m_3, on a toujours :

$$\overline{m_1 m_2} + \overline{m_2 m_3} + \overline{m_3 m_1} = 0\,. \qquad (6)$$

(L'*extrémité* d'un bipoint, par exemple m_2, est l'*origine* du suivant.)

Cette relation s'appelle la *relation de Chasles* ; elle peut aussi s'écrire :

$$\overline{m_1 m_2} + \overline{m_2 m_3} = \overline{m_1 m_3} . \qquad (7)$$

Examinons les caractères de cette relation.

— C'est une relation entre les *mesures algébriques* des bipoints $\{m_1, m_2\}$, $\{m_2, m_3\}$ et $\{m_1 m_3\}$: c'est donc une propriété de ces bipoints.

— Elle est indépendante de l'origine a choisie sur D : cette origine, en effet, ne figure pas dans la relation ; il s'agit donc d'une *propriété intrinsèque* des points m_1, m_2 et m_3 et non d'une propriété extrinsèque.

Une propriété intrinsèque de ce genre, indépendante de l'introduction dans le système de points considérés d'une abscisse extérieure à ces points, s'appelle aussi une propriété *affine*. Retenons ce terme, car nous le retrouverons bientôt.

● *Relation de Chasles généralisée.* Si l'on considère, sur une droite pointée, n points, on a, de même, quelle que soit l'origine choisie et quels que soient m_1, m_2, ..., m_n :

$$\overline{m_1 m_2} + \overline{m_2 m_3} + \overline{m_3 m_4} + \cdots + \overline{m_{n-1} m_n} + \overline{m_n m_1} = 0 . \qquad (8)$$

Structure de la droite.

Une droite est un ensemble de points qui respecte les divers axiomes énoncés jusqu'ici. Pour établir la géométrie de la droite correspondant à ces axiomes, il faut déterminer quelle est la structure de cet ensemble, c'est-à-dire quelles sont les opérations qu'on peut appliquer à ses éléments (à ses points). Dans le vocabulaire général de la théorie des ensembles, une opération qui substitue à deux éléments a et b appartenant à E un troisième élément c du même ensemble s'appelle une loi de composition interne ; nous l'avons souvent notée « $\perp$ ». Lorsqu'on associe à un élément a appartenant à E et un élément λ (lettre grecque *lambda*) appartenant *à un autre* ensemble F, un élément b appartenant à E, l'opération s'appelle une loi de composition externe.

Si nous transposons ces définitions aux ensembles géométriques, dont les éléments sont des points, nous allons pouvoir définir sur D deux opérations, l'une interne et l'autre externe.

● *Première opération.* Considérons, sur une droite pointée, deux points m et m' d'abscisses respectives $f(m) = x$ et $f(m') = x'$ et associons à ces deux points un troisième point de la droite D, t, tel que $f(t) = x + x'$. Désignons par « $\perp$ » l'opération réalisée sur m et m' ; on écrira :

$$t = m \perp m' , \qquad (9)$$

avec

$$f(t) = f(m) + f(m') = x + x' ; \qquad (10)$$

la transformation « $\perp$ » est :

— interne, puisqu'au couple (m, m') de D elle fait correspondre un élément t de D ;

— commutative : $m' \perp m$ définit un point d'abscisse $x' + x$ et $x' + x = x + x'$ (en vertu des propriétés de l'addition des réels) ; donc le point $m' \perp m$ est le même que le point $m \perp m'$;

— associative : $m \perp (m' \perp m'') = (m \perp m') \perp m''$;

— le point a, origine choisie sur D, a pour abscisse $f(a) = 0$, donc :

$$t = a \perp m = m \perp a , \qquad (11)$$

et a est l'élément neutre pour l'opération « $\perp$ » ;

— à tout point m on peut associer un opposé m' tel que :

$$m \perp m' = m' \perp m = a \qquad (12)$$

(c'est le point d'abscisse $x' = f(m') = -x$).

Ces cinq propriétés de l'opération « $\perp$ » permettent de dire que l'ensemble D des points m a la structure d'un *groupe commutatif* pour cette opération (voir p. 40). Conformément au principe de la notation d'une telle opération, nous remplacerons dorénavant « $\perp$ » par le signe « + » et nous écrirons :

$$m + m' = t , \qquad (13)$$

m, m' et t désignant des *points* sur la droite D ; cette égalité correspond à l'égalité :

$$x + x' = f(t) \qquad (14)$$

entre les *nombres réels* x, x' et $f(t)$.

● *Deuxième opération.* Considérons l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels. Pour ne pas confondre ces éléments avec ceux de la droite D, nous appellerons :

$a, b, c, ..., l, ...$ les points de D,

$\alpha, \beta, \gamma, ..., \lambda, ...$ les réels de l'ensemble $\mathbb{R}$.

Nous ferons une exception de notation, pour sacrifier à l'usage, en notant x (et non ξ) l'abscisse d'un point m quelconque sur D. Cela posé, définissons la deuxième opération sur D.

A tout couple (m, λ) d'éléments appartenant respectivement à D et à $\mathbb{R}$, on fait correspondre un élément de D, m', par la relation :

$$x' = f(m') = \lambda x . \qquad (15)$$

Cette transformation — appelée *multiplication par un scalaire* — sera notée par un point « . » ; on écrira donc :

$$\lambda . m = m' \qquad (16)$$

(il s'agit de la *multiplication* du point m par le scalaire λ), mais

$$x' = \lambda x \qquad (17)$$

(il s'agit de la *multiplication* de deux scalaires λ et x).

On démontre sans difficulté que cette opération, jointe à la précédente, munit l'ensemble D des points m d'une structure d'espace vectoriel sur le corps des réels (structure décrite p. 46).

Conclusion. La droite D, en tant qu'*espace affine*, c'est-à-dire non munie d'une origine, n'est pas un espace vectoriel ; mais, dès qu'on définit une origine sur la droite, c'est-à-dire lorsqu'on attribue à chaque point $m \in D$ une abscisse, à savoir un nombre réel x, la droite D acquiert la structure d'espace vectoriel. Ses éléments — les points m — sont des vecteurs à une composante (l'abscisse x) ; nous écrirons, pour désigner un point m sur une droite :

soit m, soit $\boldsymbol{m}$, soit $m = x$ avec $x = f(m)$.

Le fait que l'espace soit unidimensionnel prête parfois à confusion : le *calcul sur les vecteurs* est en effet le même, dans ce cas, que le *calcul sur les réels.* L'étude de la structure du plan — dont la structure de la droite n'est qu'un cas particulier — montre bien qu'il ne faut pas confondre les deux combinatoires.

Géométrie affine de la droite.

En exploitant nos axiomes de base et la bijection qui applique D sur $\mathbb{R}$, nous avons déjà découvert de nombreuses propriétés des points d'une droite, c'est-à-dire que nous avons commencé à bâtir la *géométrie de la droite réelle* pour le système d'axiomes considéré. Parmi ces propriétés, nous avons vu que certaines étaient intrinsèques : par exemple la mesure algébrique d'un segment $[m, n]$, ou la relation de Chasles entre plusieurs points m_1, m_2, ..., m_n ; nous les avons nommées *propriétés affines* de la droite. Elles sont intéressantes à plus d'un titre (et d'abord en raison de leur indépendance). Nous allons donc nous attacher à en découvrir d'autres : leur ensemble constitue la *géométrie affine de la droite* ou *géométrie affine réelle.*

Milieu d'un bipoint $\{ a, b \}$.

On dit aussi : milieu d'un segment $[a, b]$.

● *Définition.* On appelle *milieu* du bipoint $\{a, b\}$ sur une droite pointée le point m tel que :

$$2\,m = a + b \qquad (1)$$

(attention : nous faisons un *calcul sur les points*, le signe « + » désigne la loi de composition interne définie plus haut). Cette relation, rapportée aux abscisses $f(m)$, $f(a)$ et $f(b)$ des points, s'écrit :

$$2\,f(m) = f(a) + f(b) , \qquad (2)$$

$$\text{ou} \quad f(m) = \frac{f(a) + f(b)}{2} . \qquad (3)$$

● *Remarque.* La notion de *milieu* est une notion *affine*, puisque les relations précédentes sont valables quelle que soit l'origine choisie. Le lecteur peut s'amuser à faire les vérifications expérimentales indiquées sur la figure de la page ci-contre.

● *Une autre façon de s'exprimer.* Les deux expressions :

m est le *milieu* de $\{a, b\}$

et

m est le *centre de symétrie* de $\{a, b\}$

sont identiques par définition. Elles correspondent toutes deux à :

$$m = \frac{a + b}{2} \quad \text{pour les points,} \qquad (4)$$

$$f(m) = \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad \text{pour les abscisses.} \qquad (5)$$

Une autre notion affine : le barycentre.

● *Définition.* La notion de *milieu* fait correspondre, d'une façon affine, à deux points a et b un troisième point, m, tel que :

$$m = \frac{a + b}{2} , \qquad (6)$$

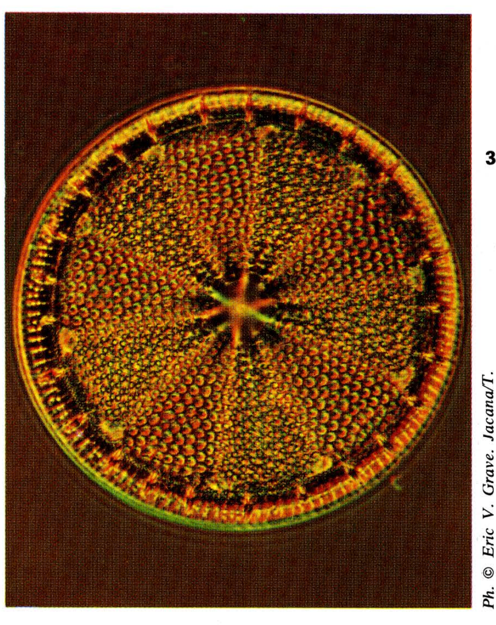
Admirons les cercles concentriques et les rayons bien réguliers de cette Diatomée (1), le prisme hexagonal que constitue un cristal de soufre (2), ou les cellules à section hexagonale de ce nid de Guêpes (3). Et pourtant ce n'est pas l'expérience sensible qui est à l'origine de la géométrie, mais l'effort rationnel qui permet d'atteindre une vérité par le seul exercice du raisonnement.

2



Ph. James Chevreuil. Jacana/T.

1

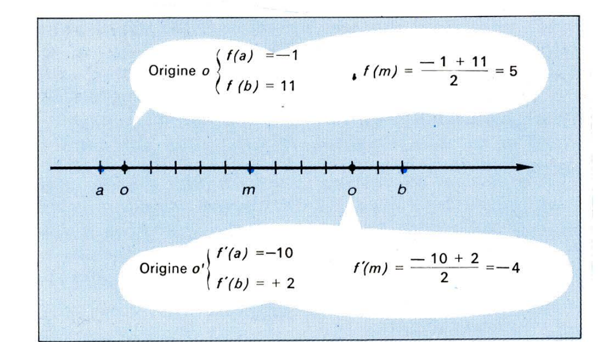


Ph. © Eric V. Grave. Jacana/T.

3



Ph. Jeanbor © Photeb/T.



L'abscisse** f(m) **du point** m **est indépendante de l'origine** o **choisie. On a indiqué, sur la figure ci-dessus, le calcul dans le cas de deux origines différentes** o **et** o'. **En comptant le nombre d'unités séparant** o **ou** o' **de** m, **et en affectant le nombre correspondant du signe « + » ou du signe « − » selon que** m **est à droite ou à gauche de l'origine, on obtient deux abscisses différentes.** f(m) = 5 **et** f'(m) = − 4, **mais on a, dans les deux cas :

$$f(m) = \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

« + » désignant une opération sur les points ; en remplaçant les points par leurs abscisses, on aurait la même égalité.

Considérons maintenant trois points, *a*, *b* et *c*. On peut envisager de leur faire correspondre un point *m'*, tel que :

$$m' = \frac{a + b + c}{3}\,; \qquad (7)$$

et, pour *n* points, *a*, *b*, *c*, ..., *l*, un point *g'* tel que :

$$g' = \frac{a + b + c + \cdots + l}{n}. \qquad (8)$$

Des points tels que *m*, *m'* et *g'* sont obtenus par des relations affines, et *g'* représente une généralisation de *m*. On peut généraliser encore plus en associant à chaque point *a* un scalaire et en écrivant :

$$g = \frac{\alpha\,.\,a + \beta\,.\,b + \cdots + \lambda\,.\,l}{\alpha + \beta + \cdots + \lambda}. \qquad (9)$$

Dans le cas particulier où il n'y aurait que deux points *a* et *b*, et en prenant $\alpha = \beta = 1$, on obtient $g = m$. (Rappelons que $\alpha\,.\,a$ signifie qu'on passe de *a* à $a' = \alpha\,.\,a$ en multipliant l'abscisse de *a* par α ; le « . » est indispensable.)

Le point *g* s'appelle le *barycentre des points a, b, ..., l affectés des coefficients* $\alpha, \beta, ..., \lambda$; c'est évidemment une notion affine. De sa définition, on passe à celle de son abscisse :

$$f(g) = \frac{\alpha f(a) + \beta f(b) + \cdots + \lambda f(l)}{\alpha + \beta + \cdots + \lambda}, \qquad (10)$$

si $\alpha + \beta + \cdots + \lambda \neq 0$.

● *Commentaire.* Le barycentre d'un ensemble de points possède des propriétés remarquables, sur lesquelles on se fonde, en géométrie, pour démontrer de nombreuses propriétés des figures. L'une des plus importantes est la suivante : toute droite quelconque *D* peut être considérée comme l'ensemble des barycentres de deux quelconques, distincts, de ses points. Cette propriété conduit à la notion fondamentale de *coordonnées barycentriques* (voir p. 96).

Transformations affines.

Nous avons vu (ci-contre, p. 82) que la droite possède une structure d'*espace vectoriel à une dimension* sur le corps ℝ des réels, c'est-à-dire qu'on peut effectuer sur ses éléments, à savoir les points *m* d'abscisse *x*, deux opérations : l'*addition* et la *multiplication par un scalaire* λ. Examinons maintenant ces opérations comme faisant correspondre à un point *m* de *D* un autre point *m'* de *D* : on les appelle, dans ce cas, des *transformations.*

Précisons d'abord notre vocabulaire. Faire correspondre à chaque point de *D* un autre point de *D*, c'est, en termes d'algèbre, appliquer l'ensemble *D* dans lui-même par l'application $D \xrightarrow{f} D$, qu'on peut écrire aussi, par abus toléré de langage, $m \xrightarrow{f} m'$. Le point *m'* sera appelé le *transformé* de *m*.

● *Translation du vecteur* ***ab***. Soit un vecteur ***ab*** dont la mesure algébrique sur *D* est $\overline{ab} = \alpha$ (α : nombre réel). On appelle *translation* définie par le vecteur ***ab*** la transformation qui fait correspondre à *m* le point *m'*, tel que ***mm'*** = ***ab***. On a, évidemment, $\overline{mm'} = \overline{ab} = \alpha$. La mesure algébrique d'un bipoint { *m*, *m'* } étant indépendante de l'origine, la transformation est une transformation affine. On pourra écrire (voir § **C**, *d*) :

$$x' = x + \alpha. \qquad (11)$$

Par abus de langage, on écrira aussi parfois :

$$m' = m + \alpha. \qquad (12)$$

Il est facile de démontrer les propriétés suivantes.

— La composition de deux translations ***ab*** et ***cd*** est équivalente à une translation ***ab*** + ***cd*** ; elle est en outre commutative (le résultat est indépendant de l'ordre dans lequel on les effectue) et associative. Nous désignerons la composition de deux translations par le signe « + ».

— La translation de vecteur ***aa*** = ***0*** est neutre pour la composition :

translation ***ab*** + translation ***0*** = translation ***ab***.

— A chaque translation ***ab*** correspond une *translation opposée* ***ba*** :

translation ***ab*** + translation ***ba*** = translation ***0*** = 0.

Cela montre que les translations forment un *groupe commutatif.*

● *Symétrie de centre a.* Soient sur *D* un point *m* et un point *a* défini par son abscisse ; le point *m'* tel que *a* soit le milieu de { *m*, *m'* } est le symétrique de *m* par rapport à *a* (voir ci-dessus, *a*). La symétrie est aussi une transformation affine, puisque la notion de milieu est elle-même affine. Si l'on appelle *S*(*m*) la symétrie qui transforme *m* en *m'*, la même opération *S*(*m'*) transforme *m'* en *m* : on exprime cela en disant que la symétrie est une *transformation involutive.* On notera que *a* est à lui-même son symétrique : c'est le seul point *invariant* de la transformation.

● *Dilatation de rapport* λ. Soit λ un réel quelconque et α un nombre réel dépendant du choix de l'origine. On appelle *dilatation de rapport* λ la transformation qui fait correspondre à *m* le point *m'* de telle sorte que les abscisses *x* et *x'* de ces deux points soient liées par la relation :

$$x' = \lambda x + \alpha. \qquad (13)$$

— Si $\lambda = 0$, on a $x' = \alpha$: tous les transformés de *m* sont confondus au point *a* d'abscisse α. On dit que la dilatation est *dégénérée.*

— Si $\lambda = 1$, on a $x' = x + \alpha$: la transformation est une *translation* de vecteur ***oa*** et $\overline{mm'} = \alpha$.

— Si λ n'est ni nul, ni égal à 1, la transformation s'appelle une *homothétie* de rapport λ. Il existe alors sur *D* un point et un seul invariant dans la dilatation, le point *c* d'abscisse $\alpha/(1 - \lambda)$ appelé *centre d'homothétie.* Dans le cas particulier où $\lambda = -1$, l'homothétie se réduit à la symétrie de centre *c*.

Sur l'ensemble des dilatations, on peut définir une loi de composition interne, comme on l'a fait dans le cas particulier des translations. On montrerait aisément que l'ensemble possède la *structure de groupe* pour cette loi.

Si l'on démontre une propriété affine sur *D*, relative à des points *m*, *n*, *p*, ..., et si l'on fait subir à *D* une dilatation, transformant *m*, *n*, *p*, ... en *m'*, *n'*, *p'*, ..., la propriété en cause est invariante dans la dilatation. Ainsi :

— Soient deux points *a* et *b*, et leur milieu $m = (a + b)/2$; soit la dilatation *f* qui transforme *a* en *a'*, *b* en *b'* et *m* en *m'*. On démontre que

$$m' = \frac{a' + b'}{2}, \qquad (14)$$

autrement dit que l'image du milieu de { *a*, *b* } est le milieu de l'image { *a'*, *b'* }.

— Soit un système de points *a*, *b*, *c*, ... affectés des coefficients α, β, γ, ... et leur barycentre *g*. L'image *g'* de *g* est le barycentre des images *a'*, *b'*, *c'*, ... des points *a*, *b*, *c*, ... affectées des mêmes coefficients.

— Etc.

● *Conclusion.* Les propriétés affines de la droite sont conservées pour toute dilatation : le groupe des dilatations est le *groupe structurel* de la géométrie affine de la droite. Il est remarquable que ce groupe comprenne les translations, les symétries et les *homothéties.* Une droite sur laquelle on ne définirait que les deux premières transformations ne posséderait que des *propriétés métriques*, c'est-à-dire qu'on pourrait dire de deux segments qu'ils sont égaux ou inégaux, mais qu'on ne pourrait pas étudier le rapport de leurs longueurs. La géométrie métrique est donc subordonnée à la géométrie affine. Nous verrons, pour le plan, la conséquence de cette restriction.

Structure du plan.

L'étude des propriétés des figures planes peut se faire selon le même principe que celle des figures sur la droite. Au lieu d'avoir affaire uniquement à des bipoints, à des segments, etc., nous aurons à considérer des secteurs angulaires, des bandes planes, des polygones (triangles, quadrilatères, etc.), des courbes ouvertes ou fermées, etc. En apparence, le champ d'étude semble très vaste. En fait, dans le plan comme sur la ligne droite, l'essentiel se ramène à la combinaison convenable des ensembles de points dans un « calcul géométrique » dont les opérations s'appellent translation, symétrie, homothétie, etc. Nous devons donc étudier trois problèmes essentiels suivants :

1 - étudier les opérations fondamentales dans le plan ;

2 - examiner leurs propriétés et en déduire la structure du plan relativement à ces opérations ;

3 - construire, à l'aide de ces connaissances, la géométrie affine et la géométrie métrique du plan.

L'enseignement traditionnel de la géométrie, orienté plus ou moins inconsciemment vers les applications pratiques, développait surtout le troisième de ces problèmes ; nous insisterons surtout, ici, sur les deux premiers, de beaucoup les plus larges : une fois ces premières difficultés aplanies, s'ouvre alors la voie qui débouche sur un lot imposant de connaissances particulières, une voie qui a été débarrassée de tous ses obstacles et qui n'est pas très loin d'être — comme le souhaitait l'illustre élève d'Euclide si l'on en croit la légende — une voie royale.

Axiome de Thalès.

● *Énoncé.* Ajoutons aux axiomes **E, I, O, P** et **D** dont nous avons déjà fait usage, l'axiome suivant, auquel on donne parfois le nom de ce géomètre grec célèbre ; nous l'appellerons l'axiome **Th**.

Axiome **Th** : soient trois droites parallèles, *A*, *B* et *C*, et deux droites *D* et *D'* coupant respectivement ces parallèles en *a*, *b*, *c* pour *D* et *a'*, *b'* et *c'* pour *D'*. Si *b* est le milieu du segment [*a*, *c*], alors *b'* est le milieu du segment [*a'*, *c'*]. Le lecteur est prié de noter que cet axiome est tout aussi valable pour un modèle géométrique tel le modèle classique que pour un modèle algébrique par exemple. Puisque cet axiome traduit une vérité d'expérience, nous pouvons en donner une image concrète.

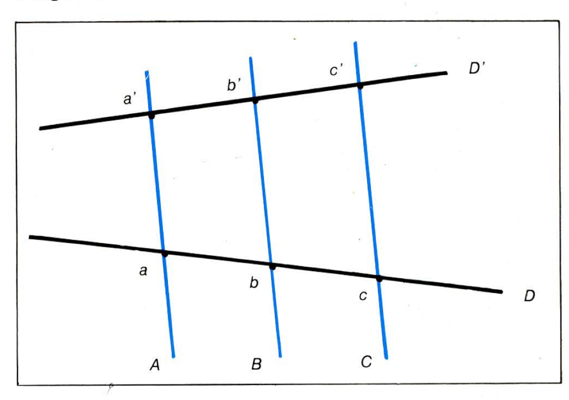


***Image de l'axiome de Thalès. Les droites parallèles** A, B **et** C **coupent les droites** D **et** D' **respectivement en** a, b, c, a', b', c'. **Si** b **est le milieu du segment** [a, c], **alors** b' **est le milieu du segment** [a', c'].*

● *Conséquences.* On déduit de l'axiome **Th** le très important théorème suivant :

Théorème : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu,

et sa réciproque :

Théorème : si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, ce quadrilatère est un parallélogramme.

● *Remarque.* Quatre points *a*, *b*, *c*, *d* sur une droite définissent un *quadrilatère aplati.* Si les segments [*a*, *c*] et [*b*, *d*] ont même milieu, le théorème précédent est encore valable et l'on dit que le quadrilatère est un *parallélogramme aplati.* On peut déduire de cette remarque et de l'axiome **Th** une importante *propriété projective* du parallélogramme (voir p. 96).

Structure d'espace vectoriel du plan pointé.

Nous conserverons, dans le plan Π, la définition de la symétrie par rapport à un point, donnée à propos de la droite : étant donné un point *o*, choisi à l'avance, et un

point quelconque appartenant à Π, on appelle symétrie l'application de Π sur lui-même qui fait correspondre à tout m un point m' aligné avec o et m, tel que o soit le milieu du segment $[m, m']$. On peut écrire :

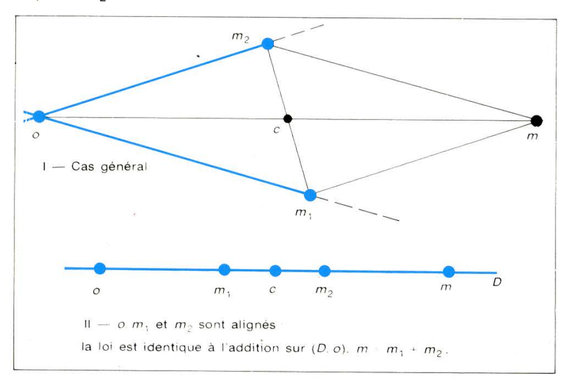
$S(m) = m'$;
$S(o) = o$ (invariant) ;
$S(m') = m$ (la symétrie est une opération involutive).

Ainsi, les sommets d'un parallélogramme peuvent être considérés comme symétriques deux à deux par rapport au milieu commun des diagonales.

Cela posé, pour munir le plan Π d'une structure d'espace vectoriel, il faut y définir deux opérations, l'une lui conférant la structure de groupe commutatif (nous la désignerons par le signe « + » et nous la nommerons « addition », mais ne pas oublier qu'on opère sur des points et non pas sur des nombres), l'autre sera la multiplication par un scalaire. Nous choisirons au préalable dans Π un point o que nous appellerons origine ; le couple (Π, o) sera appelé un *plan pointé.*

● *L'opération addition.*

— *Définition* : soient deux points m_1 et m_2 du plan pointé ; on appelle addition de m_1 et m_2 l'opération qui leur associe le point $m = m_1 + m_2$ tel que (o, m_1, m, m_2) soit un parallélogramme. De par sa définition, cette opération est une loi de composition interne, puisque m appartient au même ensemble que m_1 et m_2.



L'opération « addition » dans le plan pointé. La construction de m ***peut se faire de deux manières : soit en menant*** $m_2m \parallel om_1$ ***et*** $m_1m \parallel om_2$***, et en prenant l'intersection de ces deux droites, soit en prenant le symétrique*** m ***de*** o ***par rapport au milieu*** c ***de*** m_1m_2.

— *Propriétés de cette opération.*

1 - C'est une loi de composition interne.

2 - Elle est définie pour tout couple (m_1, m_2) : dans le cas où o, m_1 et m_2 seraient alignés sur une droite D, m serait le sommet d'un parallélogramme aplati et, $[m_1, m_2]$ et $[o, m]$ ayant même milieu, c, on aurait :

$$c = \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{o + m}{2}, \quad \text{d'où} \quad m = m_1 + m_2 . \qquad (15)$$

Autrement dit, la restriction de l'opération à la droite D est identique à l'*addition* sur cette droite, et nous savons que cette opération confère à la droite (D, o) une structure de groupe commutatif.

3 - C'est une loi commutative :

$$m_1 + m_2 = m_2 + m_1 = m, \qquad (16)$$

puisque $[m_1, m_2]$ et $[m_2, m_1]$ ont même milieu c et que m est le symétrique de o par rapport à c.

4 - On démontre aisément, de même, qu'elle est associative (nous ne le ferons pas ici : les démonstrations procèdent toujours de la même façon), c'est-à-dire que :

$$(m_1 + m_2) + m_3 = m_1 + (m_2 + m_3) . \qquad (17)$$

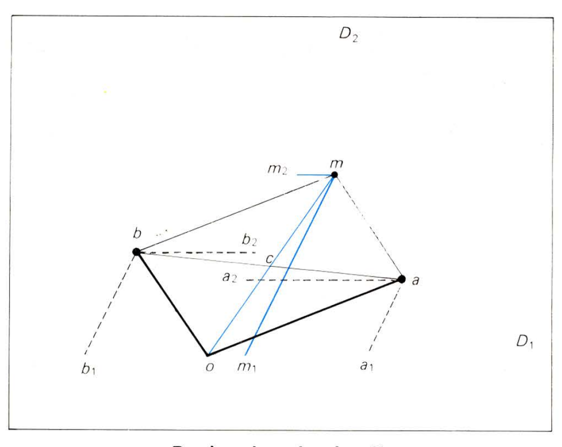
5 - On a évidemment

$$m_1 + o = o + m_1 = m_1 , \qquad (18)$$

donc le point o est l'élément neutre pour cette loi. D'autre part, le symétrique m' de m par rapport à o vérifie la relation $m + m' = m' + m = o$: tout point m admet donc un opposé m' pour la loi en cause.

Conclusion : l'opération « + » confère au plan pointé (Π, o) est la somme d'un point m_1 appartenant à D_1 et

— *Remarque.* Une droite pointée (D, o) de ce plan a la même structure : c'est donc un sous-groupe du groupe précédent. Pour tout couple (D_1, D_2) de droites distinctes qui se coupent en o, tout point m de (Π, o) est la somme d'un point m_1 appartenant à D_1 et d'un point m_2 appartenant à D_2 : on dit que le groupe (Π, o) est la somme des sous-groupes (D_1, o) et (D_2, o). Le couple (D_1, D_2) ainsi défini s'appelle un *repère* dans Π (figure ci-après).

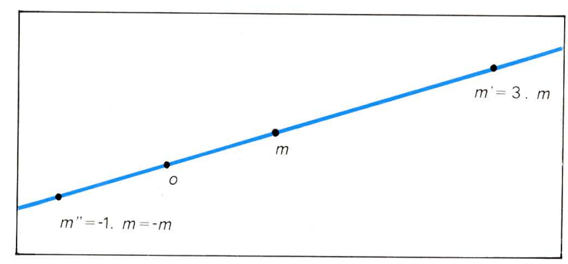


Repère dans le plan Π.
L'opération $a + b = m$ ***est figurée en traits fins noirs. On peut aussi prendre*** D_1 ***et*** D_2 ***comme repères. Dès lors on a :*** $a = a_1 + a_2$ ***et*** $b = b_1 + b_2$ ***(traits noirs interrompus). Et*** $m = a + b$ ***devient*** $m = a_1 + b_1 + a_2 + b_2$ ***; mais on a aussi*** $m = m_1 + m_2$ ***(en bleu), donc*** $m_1 = a_1 + b_1$ ***et*** $m_2 = a_2 + b_2$.

● *Multiplication par un scalaire.*

— *Définition.* Soit m un point du plan (Π, o) et soit λ un scalaire appartenant à l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels. A tout couple (λ, m) on associe un point unique m' de (Π, o) noté :

$$m' = \lambda \cdot m . \qquad (19)$$



L'opération multiplication par un scalaire dans le plan.
On est parti d'un même point m***. Remarquer le cas*** $\lambda = -1$ ***: le point*** m'' ***obtenu est le symétrique de*** m ***par rapport à*** o.

— *Propriétés de cette opération* :

1 - C'est une loi de composition externe.

2 - On a évidemment $1 . m = m$.

3 - Quels que soient les scalaires λ et μ on a toujours : $\lambda . (\mu . m) = (\lambda\mu) . m$.

(Attention : $\lambda\mu$ est une multiplication dans le corps des réels ; $\lambda . m$ est l'opération particulière envisagée ici sur le point m.)

4 - Quels que soient λ et μ on a :

$$(\lambda + \mu) . m = \lambda . m + \mu . m . \qquad (20)$$

5 - Quels que soient les points m et n, on a :

$$\lambda . (m + n) = \lambda . m + \lambda . n . \qquad (21)$$

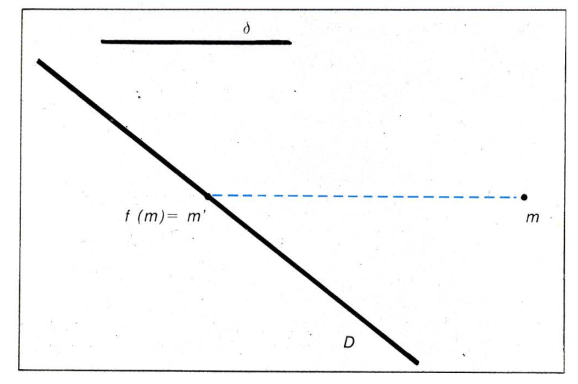
Les quatre premières sont immédiates. La cinquième se déduit d'un théorème important concernant la *linéarité de la projection oblique du plan.* Considérons un point m quelconque de (Π, o) et une droite D passant par o ; la *projection oblique* du plan Π sur la droite D, parallèlement à une direction δ distincte de celle de D, s'obtient en menant de m la parallèle à δ et en prenant son intersection m' avec D. On peut écrire, en désignant par f cette projection :

$$m' = f(m) \qquad (22)$$

et

$$\Pi \xrightarrow{f} D .$$

Projection oblique d'un point m ***du plan sur*** D.

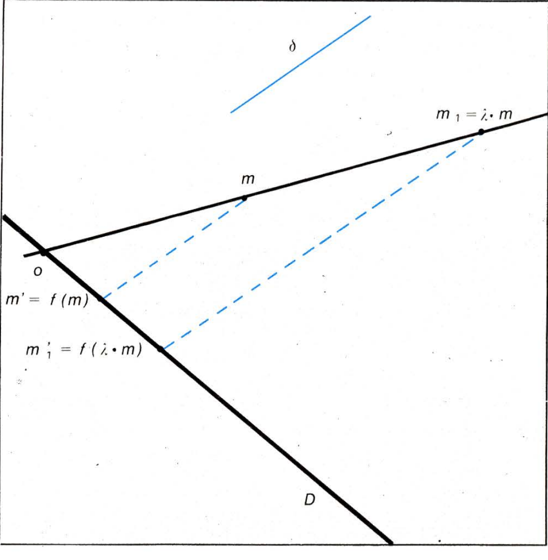


Considérons maintenant, dans le plan pointé, une droite passant par o et une direction δ. Appliquons au point m la transformation $\lambda . m$ qui donne le point $m_1 = \lambda . m$. Si l'on projette m et $\lambda . m$ sur la droite D, parallèlement à la direction δ, on obtient deux points,

$$m' = f(m) \quad \text{et} \quad m'_1 = f(\lambda . m) \qquad (23)$$

et l'on peut démontrer (ce que nous ne ferons pas ici, bien que la démonstration soit élémentaire), que, pour tout λ appartenant à l'ensemble des réels :

$$m'_1 = \lambda . m' \qquad (24)$$



Linéarité de la projection oblique.

c'est-à-dire que, si m et m_1 se déduisent l'un de l'autre par une opération linéaire (multiplication par un scalaire), leurs projections obliques sur D entretiennent la même relation. Cela s'écrit encore :

$$f(\lambda . m) = \lambda . f(m) . \qquad (25)$$

Si nous traduisons ce théorème par une image, nous reconnaîtrons dans la *linéarité de la projection oblique* (figure ci-dessus) une propriété bien connue des collégiens sous le nom de *théorème de Thalès* (« des droites parallèles découpent sur des sécantes quelconques des segments proportionnels »).

● *Conclusion.* Le plan (Π, o), muni des deux lois de composition précédentes, possède donc la structure d'*espace vectoriel.* Chaque point m de cet ensemble est un *vecteur* (au sens de la page 47). Or nous avons vu plus haut qu'un point m pouvait être considéré comme la *somme* de deux points m_1 et m_2 (voir : *repère* dans le plan pointé). Choisissons donc deux droites quelconques D_1 et D_2, passant par o, et deux points $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ sur ces deux droites. On a toujours :

$$m = \lambda . a_1 + \mu . a_2 \quad (\lambda, \mu : \text{réels}) . \qquad (26)$$

Les vecteurs (points) $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ forment une *base* pour l'espace vectoriel considéré (le plan pointé) ; λ et μ s'appellent les *coordonnées* (composantes) de m par rapport à cette base : ce sont des nombres entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, rationnels ou irrationnels. On peut écrire indifféremment :

le point m, $\mathbf{m}$, $\mathbf{m} = \boxed{\lambda} \boxed{\mu}$, $\quad m = \lambda . a_1 + \mu . a_2$.

Le plan (Π, o) est un espace vectoriel à *deux dimensions.*

Géométrie affine du plan.

● *Définition.* On pourrait définir les propriétés affines du plan comme on l'a fait pour la droite, en les considérant comme des propriétés indépendantes du choix de l'origine o (cela nous conduirait à utiliser la notion de barycentre). On préfère se servir de la définition suivante (équivalente) : On appelle *transformation affine* du plan Π toute transformation qui fait correspondre toute droite orientée D à une droite orientée D'.

● *Translation et homothétie dans le plan.* Les lois de composition étudiées plus haut (b) permettent

de définir — comme sur la droite — les deux transformations appelées *translation* **ab** et *homothétie de centre o et de rapport k*, qui sont toutes deux des *transformations affines*.

— Translation **ab** : c'est la translation qui à tout point m du plan fait correspondre un point m' tel que **mm'** = **ab**. Pour les propriétés de la translation, voir à la p. 147.

— Homothétie de centre o et de rapport k : c'est la transformation qui à tout point m du plan fait correspondre un point m' tel que **om'** = k**om**.

Pour les propriétés de l'homothétie voir à la p. 147.

● *Autres transformations affines élémentaires.* Le lecteur est prié de se reporter p. 147, où ces transformations sont étudiées.

Géométrie métrique du plan.

● *Axiome de l'inégalité triangulaire (axiome* **T**). Cet axiome, propre à la géométrie euclidienne, traduit une expérience physique commune. Étant donné dans Π un tripoint $\{a, b, c\}$ quelconque, a, b et c n'étant pas alignés, on a toujours :

$$d(a, c) < d(a, b) + d(b, c), \qquad (27)$$

$d(a, c)$, etc. désignant les distances des points a et c, a et b et b et c. Autrement dit, à tout couple m et n de points du plan, on peut faire correspondre un nombre réel d vérifiant les axiomes $\mathbf{D}_2$ et $\mathbf{D}_3$ énoncés plus haut et l'axiome **Th** précédent. On dit alors que le plan est un *espace métrique*. La *géométrie métrique* de Π sera l'étude des propriétés des figures qui restent invariantes dans un groupe de transformations lié à cette notion de distance.

● *Isométrie.* On appelle isométrie une transformation qui conserve les distances, ou, plus rigoureusement, une application f de A dans Π, A étant une partie de Π, telle que, pour tout bipoint $\{a, b\}$ de A, on ait :

$$d(a, b) = d[f(a), f(b)]. \qquad (28)$$

Un exemple d'isométrie est donné par la translation, qui fait correspondre à une figure F du plan une figure F' égale à la figure F. Un autre exemple nous est donné par la rotation d'un angle θ autour d'un centre o (voir p. 147).

● *Axiome de symétrie* (**S**). Si l'on trace une figure sur une feuille de papier et que l'on plie ensuite cette feuille suivant une droite D (charnière), chaque point m de la figure primitive s'applique en un point m' de la partie de la feuille sur laquelle on a replié la figure : cette opération s'appelle un retournement. On traduit cette expérience banale (qui conduit à considérer deux figures égales mais non superposables par glissement) par l'axiome de symétrie :

Pour toute droite D de Π, il existe au moins une isométrie du demi-plan fermé $(D, .)$ sur son demi-plan symétrique $(., D)$, telle que pour tout point m de D on ait $f(m) = m$. Toute isométrie possédant cette propriété est appelée *pliage autour de D* (voir fig. ci-après).

En s'appuyant sur les axiomes métriques du plan, on démontre que ce pliage est unique pour une droite donnée.

Nous trouverons plus loin (*e*) les conséquences importantes de ce théorème.

Perpendiculaires et obliques.

L'axiome de symétrie affirme l'existence d'une isométrie par pliage d'un demi-plan sur un autre autour d'une charnière D. Soit a et a' deux points se correspondant de la sorte. Nous pouvons écrire $a' = f(a)$, en appelant f le pliage autour de D. Il est facile de démontrer que le milieu α du segment $[a, a']$ est sur D, ce qui permet d'énoncer les propriétés suivantes relatives à la symétrie et aux droites perpendiculaires.

● *Symétrie.*

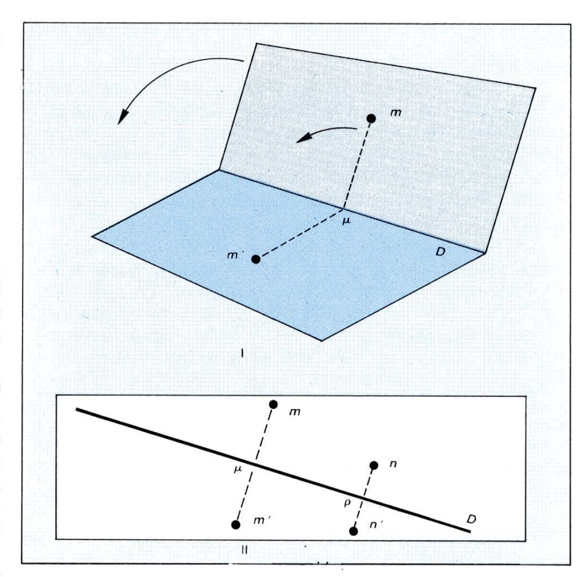
— Étant donné, dans le plan Π, un point quelconque m et une droite D, on appelle *projection orthogonale* de m sur D le milieu unique μ du segment $[m, m']$, m' étant obtenu à partir de m par pliage autour de D (ce milieu est unique, car on démontre qu'il n'y a qu'un pliage autour de D). Si m est sur D, il coïncide avec sa projection orthogonale. Lorsqu'il ne peut y avoir de confusion avec une projection oblique, on dit, par abus de langage, que μ est la projection de m sur D.

(Remarque : en géométrie classique on définit la projection orthogonale d'un point sur une droite comme le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite considérée.)

— A tout point n de Π, on peut faire correspondre son symétrique n' par rapport à sa projection orthogonale sur une droite D quelconque. Cette correspondance s'appelle *symétrie par rapport à D* (ou : *symétrie d'axe D*) : c'est une application s de Π dans Π. On a donc :

$$m' = f(m) = s(m) \quad \text{et} \quad m = f^{-1}(m') = s(m'). \quad (29)$$

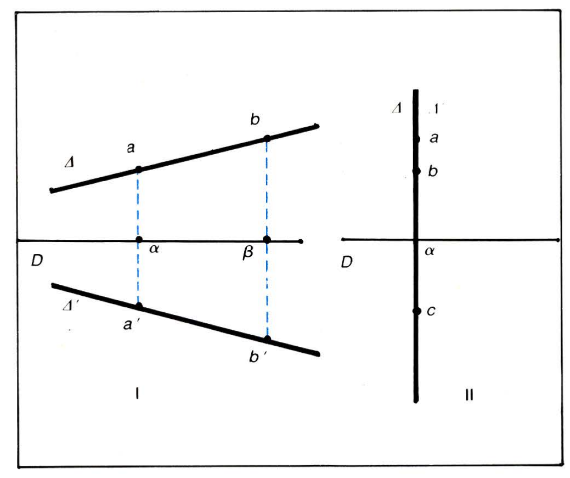
Et l'on démontrerait aisément que toute symétrie est une isométrie.



I - Pliage d'un demi-plan sur un autre autour d'une charnière D.
II - m' et n' sont symétriques de m et n par rapport à D.

● *Droites perpendiculaires.* Soit une droite Δ ; pour déterminer sa symétrique Δ' par rapport à une droite D, on détermine les symétriques de deux de ses points a et b (figure ci-dessous). Il peut se trouver que Δ et Δ' soient confondues : on dit, dans ce cas, que la droite Δ est perpendiculaire à la droite D et l'on écrit :

$\Delta \perp D$ (lire : « delta *perpendiculaire à D* »).



Symétrique d'une droite Δ par rapport à une charnière D.
I - Δ est quelconque, distincte de sa symétrique Δ'.
II - Δ est confondue avec sa symétrique Δ' : on dit que Δ est perpendiculaire à D.

Il résulte de ce qui précède les théorèmes suivants :

— Si $\Delta \perp D$, tout point de Δ se projette sur D en α (figure ci-dessus).

— Si $\Delta \perp D$, et si f est une isométrie quelconque, alors $f(\Delta) \perp f(D)$.

— Si $\Delta \perp D$, alors $D \perp \Delta$.

— Si $\Delta \perp D$, les affirmations $D \perp X$ et $\Delta \parallel X$ sont équivalentes.

— Par un point m de Π, il passe une perpendiculaire et une seule à une droite D (ce théorème est une conséquence du précédent et de l'axiome d'Euclide).

● *Médiatrices.* Soit un bipoint $\{a, b\}$ de milieu o : on appelle *médiatrice* de $\{a, b\}$ la perpendiculaire menée de o à la droite $D(a, b)$. La propriété la plus importante de la médiatrice d'un bipoint est la suivante : la médiatrice d'un bipoint $\{a, b\}$ est l'ensemble des points équidistants de a et de b.

Vecteurs et vecteurs géométriques dans le plan.

Rappel des définitions.

Les *vecteurs géométriques* sont des vecteurs particuliers, qui présentent l'avantage d'être représentables par une figure (une petite flèche). Pour *opérer* sur ces vecteurs, on peut procéder de deux façons :

— soit *géométriquement*, en traduisant par des constructions géométriques les opérations fondamentales ;

— soit *analytiquement*, en opérant uniquement sur leurs composantes (qui sont, on le sait, des nombres réels).

Nous allons préciser ici l'aspect géométrique de ce calcul vectoriel particulier, en nous plaçant dans un plan pointé (Π, o).

● Un vecteur **ab** dans le plan est un couple ordonné de points dont le premier est nommé l'*origine* et l'autre l'*extrémité*. C'est une notion qui correspond à trois déterminations géométriques : une *direction* α, un *sens* sur cette direction, et une *grandeur* qui représente la distance $d(a, b)$ entre les deux points. Cette grandeur est appelée le *module* ou la *norme* du vecteur **ab**, et l'on écrit :

$$|\mathbf{ab}| \text{ ou } \|\mathbf{ab}\| = \text{norme du vecteur } \mathbf{ab}. \qquad (1)$$

La norme d'un vecteur, c'est-à-dire le symbole $\|\mathbf{ab}\|$, est un *nombre essentiellement positif.*

● Deux vecteurs **ab** et **a'b'** sont dits *équipollents* s'ils se correspondent mutuellement par une translation du plan Π. On écrit alors :

$$\mathbf{ab} \equiv \mathbf{a'b'}, \qquad (2)$$

la relation « $\equiv$ » étant une relation d'équivalence. L'ensemble de tous les vecteurs **a'b'** équipollents à un vecteur donné **ab**, c'est-à-dire tels que $abb'a'$ soit un parallélogramme, est une *classe d'équivalence* pour cette relation ; on l'appelle un *vecteur libre*, et on la désigne souvent par le vecteur particulier (*vecteur lié*) **ab** auquel sont équipollents tous les vecteurs de cette classe.

● *Base.* Si l'on considère, dans le plan (Π, o), deux droites quelconques passant par o, $x'ox$ et $y'oy$, orientées respectivement par un vecteur **u** et par un vecteur **v**, tous deux d'origine o et de norme égale à l'unité (*vecteurs unitaires*), ce couple de vecteurs constitue une base pour l'ensemble des vecteurs du plan. Un vecteur **ab** quelconque est une combinaison linéaire de ces deux vecteurs unitaires :

$$\mathbf{ab} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \qquad (\lambda \text{ et } \mu : \text{réels}). \qquad (3)$$

Les nombres λ et μ sont les *composantes* du vecteur **ab**.

Opérations sur les vecteurs (dans le plan).

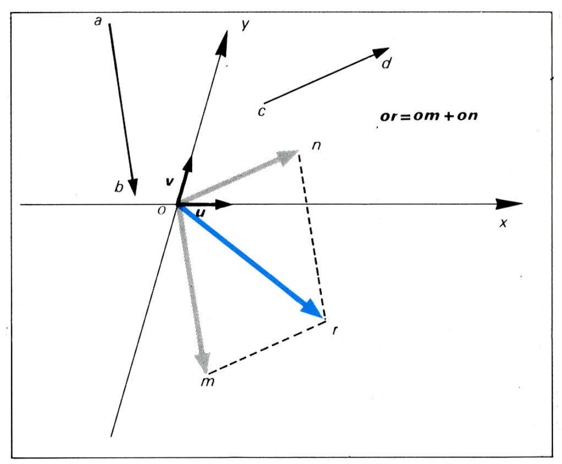
● *Addition.* Analytiquement, la *somme*

$$\mathbf{ab}(\lambda, \mu) + \mathbf{cd}(\lambda', \mu') \qquad (4)$$

doit s'entendre comme portant sur les classes d'équivalence **ab** et **cd** ; on obtient le vecteur libre $\mathbf{af}(\lambda + \lambda', \mu + \mu')$. Géométriquement, on mène d'un point arbitraire o (qui peut être l'origine du repère) des vecteurs équipollents à **ab** et **cd**, et l'on construit le parallélogramme qui a pour côtés consécutifs ces deux vecteurs. La diagonale, issue de o, de ce parallélogramme est la somme vectorielle cherchée.

Il résulte de cette définition de la somme vectorielle

Addition des vecteurs.
On a mené $\overrightarrow{om} = \overrightarrow{ab}$ ***et*** $\overrightarrow{on} = \overrightarrow{cd}$ ***; la diagonale*** $\overrightarrow{or}$ ***est la somme (au sens vectoriel)*** $\overrightarrow{om} + \overrightarrow{on}$.



une importante propriété. Soit un vecteur **ab** et une origine quelconque ; on démontre aisément que :

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ob} - \mathbf{oa} \qquad (5)$$

(relation de Chasles pour les vecteurs).

● *Multiplication par un scalaire.* Analytiquement, la multiplication $k\,.\,\mathbf{ab}$, k étant un réel et **ab** un vecteur de composantes λ et μ, revient à multiplier ces deux composantes par k, d'où le vecteur $\mathbf{a'b'}\,(k\lambda,\ k\mu)$. Géométriquement, cela revient à faire subir au vecteur **ab** une homothétie de centre a, par exemple, et de rapport k, ce qui donne un vecteur $\mathbf{ab'} = k\,.\,\mathbf{ab}$.

Donc, d'une manière générale, deux vecteurs **ab** et **cd** ayant même direction (c'est-à-dire portés par une même droite ou par des droites parallèles) se correspondent dans l'homothétie :

$$\mathbf{ab} = k\,.\,\mathbf{cd} \quad (k : \text{réel}). \qquad (6)$$

ab et **cd** sont dits *colinéaires*, et k est leur rapport de colinéarité (il est positif si **ab** et **cd** ont même sens, négatif s'ils sont de sens contraires).

Rapport de projection.

● *Définition.* Considérons une droite D et effectuons la projection orthogonale de D sur une droite Δ qui coupe D en o : $D \xrightarrow{f} \Delta$. Le point a, tel que $\overline{oa} = 1$, devient $f(a) = a'$. Un point quelconque m de D est tel que $\overline{om} = \lambda\,.\,\overline{oa} = \lambda$ (λ : nombre réel), et l'on peut écrire $m = \lambda\,.\,a$; la projection de m sur Δ est $m' = f(m) = f(\lambda\,.\,a)$. Si l'on applique le théorème de Thalès, en considérant que la projection orthogonale est un cas particulier de la projection oblique (le cas où la direction de projection est perpendiculaire à Δ), on a :

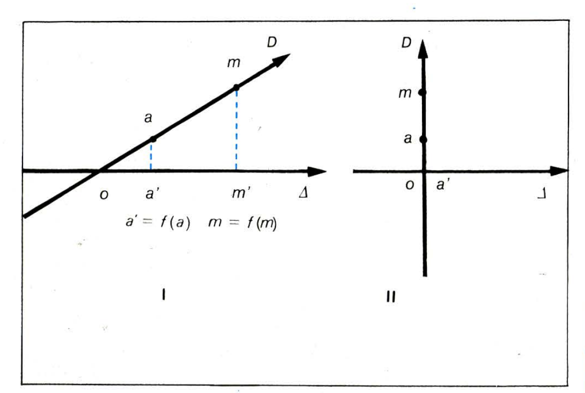
$$f(m) = f(\lambda\,.\,a) = \lambda\,.\,f(a) \quad \text{ou encore} \quad \overline{om'} = \lambda\,.\,\overline{oa'}. \qquad (7)$$

On peut donc écrire, quel que soit m sur D :

$$\frac{\overline{om'}}{\overline{om}} = \frac{\lambda\,.\,\overline{oa'}}{\lambda\,.\,\overline{oa}} = \frac{\overline{oa'}}{\overline{oa}} = \overline{oa'} \quad (\text{puisque } \overline{oa} = +1)\,; \qquad (8)$$

$\overline{oa'}$, pour la projection considérée, a une valeur constante k, qu'on appelle rapport de projection de D sur Δ et qu'on note $c(D, \Delta)$. On a donc, pour tout point m qui se projette en m' :

$$\overline{om'} = k\,.\,\overline{om}. \qquad (9)$$



Rapport de projection.
On a projeté la droite orientée D sur la droite orientée Δ.
I - D est quelconque.
II - D est perpendiculaire à Δ : les points o et a' sont confondus, $\overline{oa'} = 0$ et $c(D, \Delta) = 0$.

● *Propriétés du rapport de projection.*

— Si D est perpendiculaire à Δ, le point a' se confond avec o et $k = \overline{oa'} = 0$; il est donc logiquement équivalent d'écrire « $D \perp \Delta$ » ou « $c(D, \Delta) = 0$ ».

— Si D et D' sont deux droites orientées quelconques, se coupant en o, on démontre que

$$c(D', D) = c(D, D'). \qquad (10)$$

— D'une façon générale, toute transformation qui conserve la perpendicularité et les distances conserve aussi le rapport de projection.

● Remarque : le rapport de projection sera identifié, p. 90, avec le *cosinus* de l'angle des droites D et Δ.

Le produit scalaire.

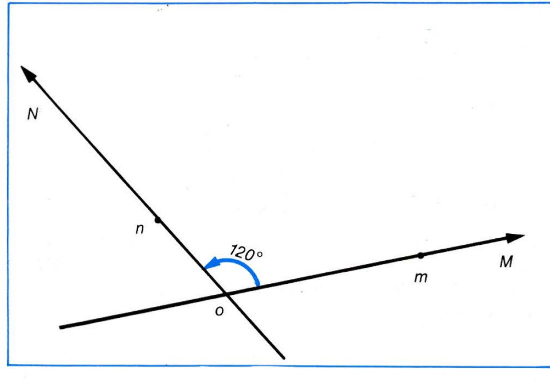
● *Définition.* Soient deux points m et n dans un plan pointé $(\Pi,\ o)$; on peut associer à tout couple $(m,\ n)$ un nombre réel p appelé *produit scalaire* de m et de n, défini comme suit :

$$p = \|m\|\,.\,\|n\|\,.\,c(M,\ N), \qquad (11)$$

M et N étant les droites reliant l'origine o du plan pointé respectivement à m et n, orientées de o vers m et n et $c(M, N)$ le rapport de projection de M sur N, soit $\cos(M, N)$.

On note le produit scalaire par le signe « . », placé entre les deux points m et n :

$$p = m\,.\,n.$$



Le produit scalaire.
C'est un nombre réel p, associé à deux points m et n du plan (Π, o). On a pris ici :

$$\|m\| = 4, \quad \|n\| = 2.$$

$$c(M, N) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ (= \cos 120°),$$

d'où

$$m\,.\,n = p = 4 \times 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -4\sqrt{3} \simeq -6{,}928.$$

● *Remarque.* Les points m et n sont des *éléments vectoriels* (au sens général) ; on peut les remplacer par les vecteurs géométriques **om** et **on**, et écrire, indifféremment :

$$\text{soit} \quad p = \mathbf{m}.\mathbf{n}, \quad \text{soit} \quad p = \mathbf{om}.\mathbf{on}.$$

Si m et n sont confondus ($\mathbf{m} = \mathbf{n}$ ou $\mathbf{om} = \mathbf{on}$), on écrit, conventionnellement :

$$\mathbf{m}.\mathbf{m} = \overline{m^2} \quad \text{ou} \quad \mathbf{om}.\mathbf{om} = \overline{om^2} \ (\textit{carré scalaire}) \qquad (12)$$

(le trait au-dessus de m ou de om ne doit pas être confondu avec le surlignement qui caractérise la mesure algébrique d'un segment : c'est une notation conventionnelle liée uniquement au produit scalaire).

● *Propriétés du produit scalaire.*

1 - Si l'un des deux points coïncide avec o, $p = 0$.

2 - Si $M \perp N$, $c(M, N) = 0$ et $p = 0$.

3 - Quels que soient les points a, b, c dans $(\Pi,\ o)$ et quel que soit le nombre réel k, on a :

Propriétés	Notation en points	Notation en vecteurs géométriques
Commutativité	$a\,.\,b = b\,.\,a$	$\mathbf{oa}.\mathbf{ob} = \mathbf{ob}.\mathbf{oa}$
Associativité par rapport à la multiplication par un scalaire	$(k\,.\,a)\,.\,b = k\,.\,(a\,.\,b)$	$(k\,.\,\mathbf{oa})\,.\,\mathbf{ob} = k\,.\,(\mathbf{oa}\,.\,\mathbf{ob})$
Distributivité par rapport à l'addition (vectorielle) dans $(\Pi,\ o)$	$a\,.\,(b+c) = a\,.\,b + a\,.\,c$	$\mathbf{oa}\,.\,(\mathbf{ob} + \mathbf{oc}) = \mathbf{oa}.\mathbf{ob} + \mathbf{oa}.\mathbf{oc}$
Inégalité de Schwarz	$\lvert a\,.\,b \rvert \leqslant \|a\|\,.\,\|b\|$	$\lvert \mathbf{oa}.\mathbf{ob} \rvert \leqslant \|\mathbf{oa}\|\,.\,\|\mathbf{ob}\|$
	(L'égalité ne peut avoir lieu que si o, a et b sont alignés.)	

Attention : $a\,.\,b$ est un produit scalaire, c'est-à-dire un nombre réel positif, négatif, ou nul, tandis que $\lvert a\,.\,b \rvert$ désigne sa valeur absolue ; par contre, $\|a\|\,.\,\|b\|$ est le *produit arithmétique* de la norme de a (mesure géométrique de **oa**) par la norme de b (mesure géométrique de **ob**).

4 - Le produit scalaire est invariant dans toute isométrie de Π qui conserve le point o.

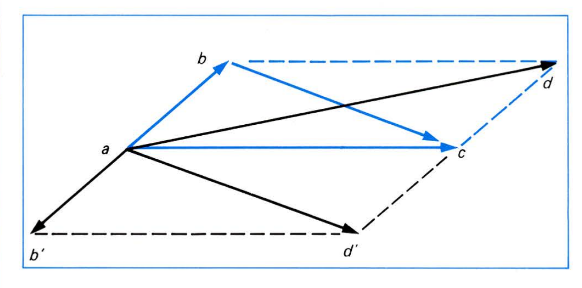
● *Théorème de Pythagore.* Considérons un tripoint $\{a,\ b,\ c\}$ dans le plan Π et choisissons le point a comme origine dans ce plan. Nous avons les égalités vectorielles suivantes, en appelant d le quatrième sommet du parallélogramme construit sur **ab** et **ac**, b' le symétrique de b par rapport à a et d' le symétrique de d par rapport à c :

$$\mathbf{ab} + \mathbf{ac} = \mathbf{ad}, \qquad (13)$$

$$\mathbf{ac} + \mathbf{ab} = \mathbf{ac} - \mathbf{ab} = \mathbf{ad'} = \mathbf{bc}, \qquad (14)$$

$$\overline{bc^2} = (\mathbf{ac} - \mathbf{ab})\,.\,(\mathbf{ac} - \mathbf{ab})$$
$$= \overline{ac^2} + \overline{ab^2} - 2\,.\,\mathbf{ab}\,.\,\mathbf{ac} \qquad (15)$$

(distributivité du produit scalaire).



Le théorème de Pythagore.
Le triangle (abc) est supposé quelconque, d'où la relation générale :

$$\overline{bc^2} = \overline{ab^2} + \overline{ac^2} - 2\,.\,\vec{ab}\,.\,\vec{ac}.$$

Si $\vec{ab} \perp \vec{ac}$, on a la relation de Pythagore :

$$\overline{bc^2} = \overline{ab^2} + \overline{ac^2}.$$

— Si le triangle abc est *rectangle en a*, cela signifie que $\mathbf{ab} \perp \mathbf{ac}$, donc que $\mathbf{ab}\,.\,\mathbf{ac} = 0$ (propriété n° 2 du produit scalaire), d'où :

$$\overline{bc^2} = \overline{ac^2} + \overline{ab^2}. \qquad (16)$$

Ce qui s'énonce :

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit (*théorème de Pythagore*), démontré en géométrie classique par référence aux triangles semblables ; voir aussi p. 145.

— Inversement, si $\overline{bc^2} = \overline{ac^2} + \overline{ab^2}$, cela signifie que $2\,.\,\mathbf{ab}\,.\,\mathbf{ac} = 0$, donc que $\mathbf{ab} \perp \mathbf{ac}$, donc que le triangle abc est rectangle en a (*réciproque du théorème de Pythagore*).

De la géométrie plane à la géométrie dans l'espace.

Nous ne traiterons pas, ici, la géométrie dans l'espace, dont les principaux résultats sont résumés pp. 143-146. Nous nous limiterons à quelques remarques d'ordre général.

Structure vectorielle de « l'espace ».

● *L'« espace ».* L'expérience quotidienne nous montre qu'il existe, « au-dessus » et « au-dessous » du plateau d'une table supposée prolongée à l'infini dans toutes les directions, des points dont l'ensemble constitue ce qu'on appelle communément l'*espace*. Les propriétés des figures dans l'espace font l'objet de la *stéréogéométrie* ou *géométrie dans l'espace*. Il est évident que cette nouvelle théorie, plus large que la géométrie plane, dépend des *axiomes* qui seront choisis comme point de départ ; nous admettrons, ici, qu'ils traduisent notre expérience commune, ce qui nous conduit à la *géométrie euclidienne dans l'espace*, dont on donne, usuellement, deux modèles :

— Le modèle géométrique, où les *figures* ont pour images ce qu'on appelle habituellement des *volumes* ou des *solides* (dièdres, trièdres, polyèdres, corps ronds, etc.).

— Le modèle analytique, où les figures sont des équations (voir p. 93).

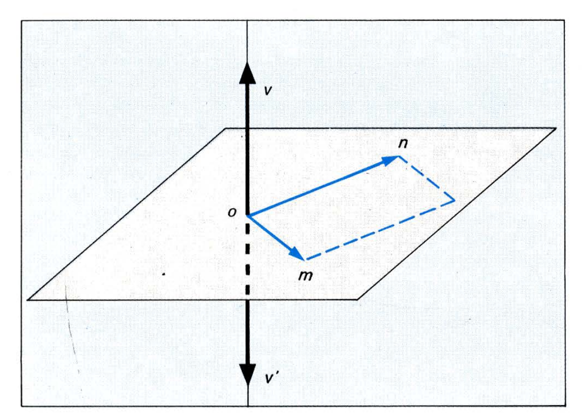
● *L'espace usuel est un espace vectoriel.* Les points m de l'espace (au sens commun) sont des *vecteurs* (au sens général) à trois dimensions x, y et z. Si l'on choisit une droite orientée ox dans l'espace et le trièdre direct $oxyz$ (voir p. 93), à chaque point m on peut faire correspondre un vecteur **om** de composantes λ, μ et ν, qui sont trois nombres réels. Toute opération sur le point m (ou sur le vecteur **om**) se traduit analytiquement par des opérations algébriques élémentaires sur les composantes de m (de **om**).

Comme la ligne droite, comme le plan, l'espace du géomètre est un ensemble possédant la structure d'*espace vectoriel* (le mot « espace » n'ayant pas, ici, le même sens que dans la première partie de la phrase), c'est-à-dire qu'on peut y définir les deux opérations d'*addition vectorielle* (règle du parallélogramme) et de

multiplication d'un vecteur par un scalaire, comme on l'a fait pour le plan. Les trois composantes des vecteurs spatiaux étant des nombres réels, on peut préciser qu'il s'agit d'un espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ sur le corps $\mathbb{R}$.

Le produit vectoriel.

Nous allons définir ici sur les vecteurs spatiaux une loi de composition interne qui trouvera des applications importantes en géométrie analytique et en analyse.



Le produit vectoriel. ***Les deux vecteurs opposés $\overrightarrow{ov}$ et $\overrightarrow{ov'} = -\overrightarrow{ov}$ représentent respectivement les produits vectoriels $\overrightarrow{om} \times \overrightarrow{on} = \overrightarrow{ov}$, $\overrightarrow{on} \times \overrightarrow{om} = \overrightarrow{ov'} = -\overrightarrow{ov}$.***

● *Définition.* Soient deux vecteurs ***om*** et ***on*** de l'espace dans lequel une *base* est choisie une fois pour toutes ; on peut leur associer un troisième vecteur, ***ov***, ainsi défini :

— sa *direction* est perpendiculaire au plan (***om***, ***on***) ;

— son *sens* sur cette direction est tel que le trièdre ***om***, ***on***, ***ov*** soit *direct* (traduction physique : un tire-bouchon tournant dans le sens de ***om*** vers ***on*** progresse dans le sens de ***ov***) ;

— sa *norme* est le nombre qui mesure la *surface* du parallélogramme construit sur ***om***, ***on***.

Ce vecteur ***ov*** est appelé *produit vectoriel* de ***om*** par ***on***, et l'on écrit :

$$\mathbf{ov} = \mathbf{om} \times \mathbf{on} \qquad (1)$$

(le signe « × » se lit : « *multiplié vectoriellement par* » ; on utilise parfois le signe « ∧ » pour indiquer le produit vectoriel, mais cet usage n'est plus recommandé actuellement).

● *Propriétés.*

1 - C'est une loi de composition interne, puisqu'elle fait correspondre à deux vecteurs de l'espace un troisième vecteur de l'espace (c'est donc une opération très différente de la multiplication par un scalaire ou du produit scalaire).

2 - Le produit vectoriel n'est pas commutatif, puisque l'on tient compte du *sens* du trièdre ***om***, ***on***, ***ov***. On aura donc (voir figure ci-dessous) :

$$\mathbf{om} \times \mathbf{on} = -\,\mathbf{on} \times \mathbf{om}. \qquad (2)$$

3 - Le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition vectorielle :

$$\mathbf{om} \times (\mathbf{oa} + \mathbf{ob}) = \mathbf{om} \times \mathbf{oa} + \mathbf{om} \times \mathbf{ob}. \qquad (3)$$

La géométrie projective.

Nous nous proposons d'étudier maintenant les propriétés des figures qui restent invariantes par un autre groupe de transformations appelé le *groupe projectif*. Un exemple simple (et particulier) de ces transformations est donné par la projection d'une figure parallèlement à une direction donnée sur une droite du plan (voir p. 83) : un parallélogramme *abcd* est alors transformé en une série de quatre points alignés *a' b' c' d'* formant un parallélogramme aplati, tel que *a' b'* et *c' d'* aient le même milieu *o'*, projection de *o*, point de concours des diagonales du parallélogramme *abcd*.

Théorème fondamental de la géométrie projective.

● *Énoncé.* Supposons qu'on projette, dans le plan, tous les points d'une ligne *A* sur une ligne *B*, puis ceux de *B* sur *C*, et ainsi de suite jusqu'à une ligne *K*. Dès lors, à chaque point *a* de *A* correspond biunivoquement un point *k* de *K* : cette correspondance est dite *projective* ; on peut la noter par le symbole « $\barwedge$ » et l'on écrit : $a_1 \barwedge k_1$, par exemple ; *K* est la *projection* de *A* selon la transformation considérée.

Le théorème fondamental de la géométrie projective consiste à affirmer que, si l'on connaît les projections k_1, k_2, k_3 de trois points distincts a_1, a_2, a_3 appartenant à une droite *A*, alors le transformé k_i d'un point quelconque a_i de *A* peut être déterminé *sans ambiguïté* sur *K*.

● *Points à l'infini.* En géométrie élémentaire, ce théorème devrait comporter une restriction, due à l'existence des droites parallèles. Soit par exemple la transformation projective qui fait correspondre à tout point *a* de *A* un point *k* sur *K* déterminé par l'intersection de la droite *ao* avec la droite *K*, *o* étant un point fixe caractérisant la transformation. Il est clair que le point a_0 de *A*, tel que $a_0\,o$ soit parallèle à *K* n'a pas de transformé k_0 sur *K*, puisque $a_0\,o$ ne rencontre pas *K*. Cette circonstance enlève de sa généralité au théorème fondamental et il risque d'en résulter, dans la suite des raisonnements, des complications et des discussions qu'on peut éviter en introduisant la notion de *point à l'infini* (*point idéal*) sur une droite : à chaque droite *D* associons (axiomatiquement) un point δ appelé *point à l'infini*, tel que (toujours axiomatiquement) toute droite parallèle à *D* passe par δ (autrement dit, considérons que deux droites parallèles se rencontrent à l'infini). Dès lors, dans le cas présent de la transformation examinée, $a_0\,o$, étant parallèle à la droite *K*, coupe cette droite en son point à l'infini κ (lettre grecque : *kappa*). A partir de cette notion de point à l'infini, introduite par le géomètre français Desargues (1593-1662), on peut définir :

— la *droite à l'infini* d'un plan comme l'ensemble de tous les points à l'infini correspondant à toutes les droites du plan considéré ;

— le *plan à l'infini* d'un espace à trois dimensions (notre espace euclidien usuel) comme l'ensemble de tous les points à l'infini de toutes les droites de cet espace.

● *Avantage de cette notion.* Considérons, en géométrie euclidienne classique, la propriété élémentaire suivante :

« Dans un plan, deux droites distinctes ont en commun un point et un seul *ou bien* sont parallèles au sens strict ».

Cette proposition devient, en géométrie projective :

« Dans un plan, deux droites distinctes ont en commun un point et un seul ».

La deuxième partie de l'alternative n'a plus de raison d'être puisque, si elles sont parallèles, elles ont en commun leur point à l'infini ; la proposition projective est plus brève, plus simple, plus générale que la proposition euclidienne, qui était composée, en fait, de deux propositions reliées par la conjonction *ou bien*.

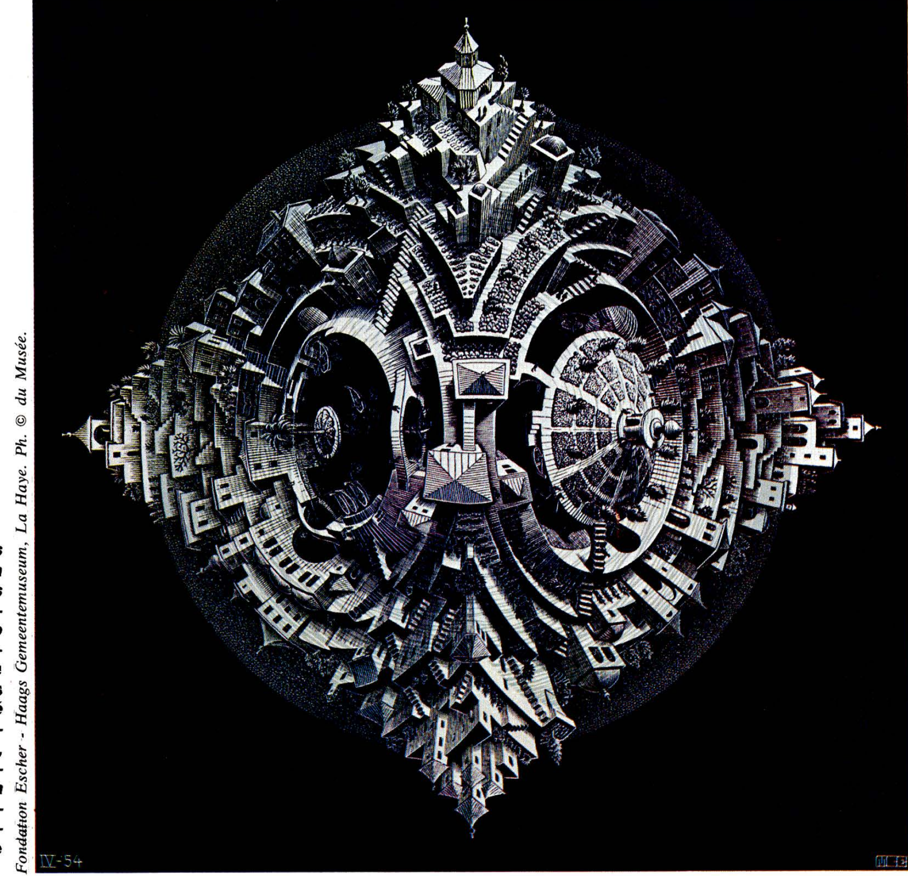


Jean-Victor Poncelet (1788-1867) : prisonnier des Russes, en 1812, à Saratov, au cours de la campagne de Russie voulue par l'orgueil napoléonien ; ce général-mathématicien a mis à profit sa captivité pour inventer une nouvelle géométrie en rapport avec les propriétés projectives des figures.

Le principe de dualité.

Considérons la proposition suivante, connue sous le nom de *théorème de Pappus* (voir figures page suivante) :

> « *Soient deux* droites *D et D' dans un plan, trois* points *a, b et c sur D, trois* points *a', b' et c' sur D'. Les trois* points *d'intersection de (ab' et ba'), (ac' et ca'), (bc' et cb')* appartiennent *à une même* droite *D'' (= sont alignés)* ».



La géométrie des polyèdres réguliers a fasciné les grands artistes de la Renaissance, comme Paolo Ucello, Dürer ou Léonard de Vinci. Le graveur néerlandais M. C. Escher a été sensible à leur mystère (ils symbolisent, dit-il, notre désir d'harmonie et d'ordre) et l'a traduit par des gravures du genre de celle-ci, intitulée* Planétoïde tétraédrique *(1954).

Considérons ensuite la proposition suivante :

> « *Soient deux* points *d et d′ dans un plan, trois* droites *A, B, C* passant par *d, trois* droites *A′, B′, C′* passant par *d′. Les trois* droites *joignant les intersections de (A et B′, B et A′), (A et C′, C et A′), (B et C′, C et B′)* passent par *un même* point *d″ (– sont concourantes)* ».

On passe d'un théorème à l'autre en remplaçant le mot « droite » par le mot « point », les minuscules par des majuscules, les majuscules par des minuscules, et l'expression « sur » ou « appartient à » (une droite) par « passant par » (le point). Ces deux propositions sont dites *duales* l'une de l'autre, et le principe de cette correspondance s'appelle le *principe de dualité*. Si l'on définit une transformation géométrique munie de certaines propriétés qui fait correspondre à tout point *a* une droite *A* et à toute droite *D* un point *d*, on peut assurer que la validité de l'une de ces deux propositions entraîne celle de l'autre et réciproquement.

L'intérêt du principe de dualité, exploité par Poncelet (*Journal für Mathematik*, 1829), Gergonne (*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, 1825-1827) et généralisé par Steiner (1832), est de multiplier par deux, comme par un jeu de miroirs, les connaissances géométriques.

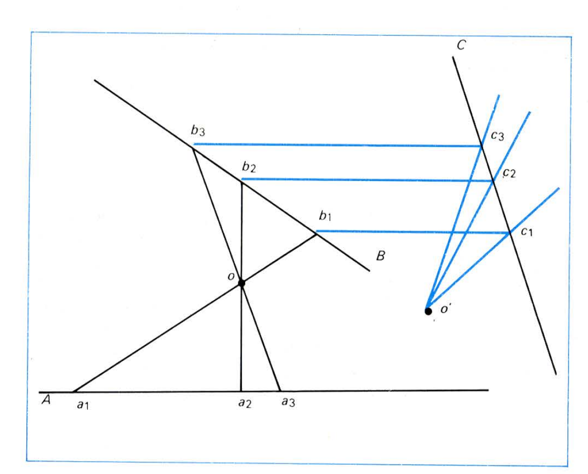
Faisceaux de droites.

● *Correspondance projective entre deux faisceaux de droites.* Revenons un instant sur l'exemple du début. A chaque point a_1, a_2, ..., d'une droite *A*, nous avons associé, à partir d'un point *o* fixe extérieur à cette droite, des droites oa_1, oa_2, ... Cette correspondance s'appelle une *perspective à une dimension* ; l'ensemble des droites oa_1, oa_2, ... est un *faisceau de droites*, le point *o* est le *centre du faisceau.*

— Considérons une perspective particulière associant oa_1 à a_1, oa_2 à a_2, ... ; le faisceau des droites oa_i peut être coupé par une droite *B* quelconque et il existe entre les points a_1, a_2, ... et les points b_1, b_2, ... une *correspondance projective.*

— Menons ensuite, par b_1, b_2, ... des droites parallèles à *A* : ce faisceau de droites (dont le centre est à l'infini) est en correspondance : 1° avec les points b_1, b_2, ..., 2° avec les points a_1, a_2, ..., 3° avec le faisceau oa_1, oa_2, ... Ces correspondances sont toutes de type projectif.

— Soit maintenant une troisième droite *C* du plan ; elle coupe le faisceau des droites parallèles en c_1, c_2, ..., points qui sont en *correspondance projective* avec les points a_1, a_2, ..., les points b_1, b_2, ..., les droites oa_1, oa_2, ..., et ainsi de suite. Et si nous considérions un point *o′* et le faisceau $o'\ c_1$, $o'\ c_2$, ..., il serait, lui aussi, en correspondance projective avec tous ces ensembles tels que les points a_1, a_2, ..., ou le faisceau oa_1, oa_2, ..., et ainsi de suite.



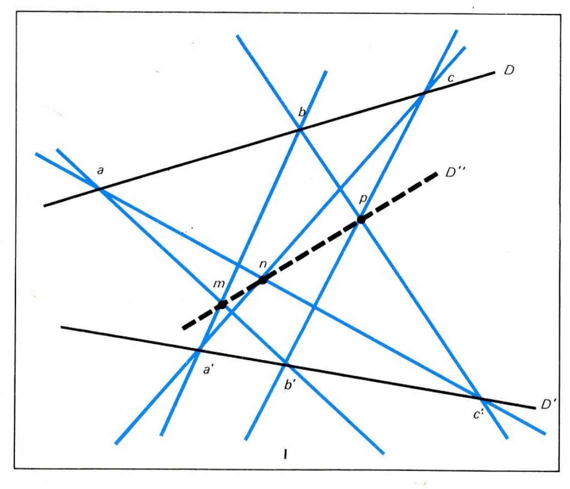
Correspondances projectives.

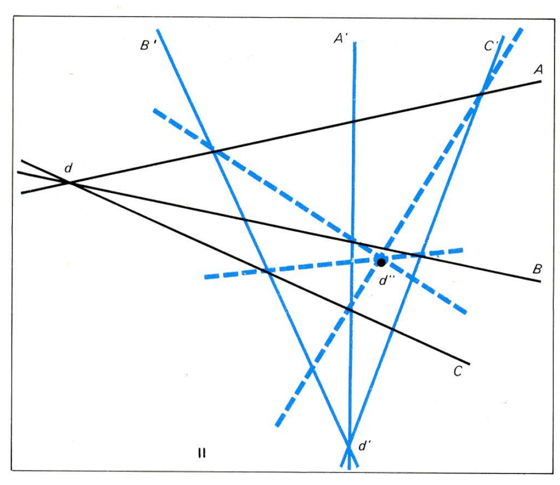
● *Les coniques.* Considérons deux *faisceaux projectifs* distincts, oa_1, oa_2, ... et $o'\ b_1$, $o'\ b_2$, ... possédant les deux propriétés suivantes :

— les droites correspondantes dans la transformation projective se coupent à angle droit ($oa_1 \perp o'\ b_1$, $oa_2 \perp o'\ b_2$, ...) ;

— la droite *oo′* a pour correspondante dans la transformation en cause une droite $o'\ \omega'$ non confondue avec *oo′*, et inversement *o′ o* a pour correspondante une droite $o\omega$ non confondue avec *o′ o.*

Si l'on joint par un trait continu les points d'intersection des droites correspondantes, on obtient une

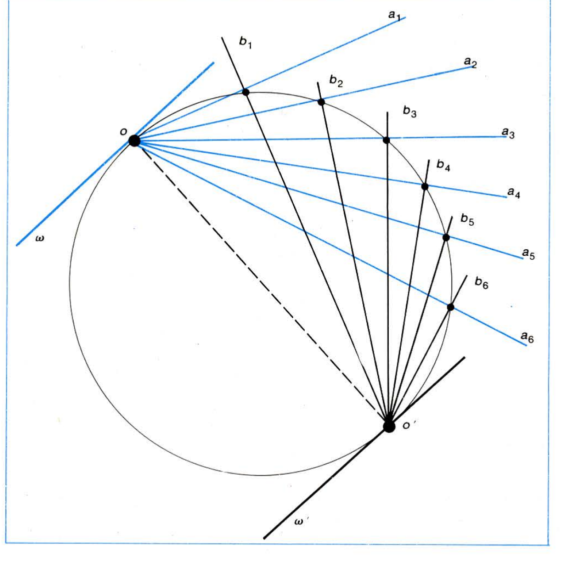




Le théorème de Pappus et son théorème corrélatif : on passe du cas I au cas II en remplaçant la notion de points alignés par celle de droites concourantes.

courbe fermée appelée *cercle* (figure ci-dessous), dont les propriétés sont rappelées p. 143 (en particulier : le cercle est le *lieu* des points d'où l'on voit le diamètre *oo′* sous un angle droit). Cette courbe peut être aussi obtenue en coupant un cône de révolution par un plan convenablement incliné (en l'occurrence perpendiculaire à l'axe). On l'appelle, pour cette raison, une *section conique.* Si l'on n'avait pas astreint les droites correspondantes des deux faisceaux à se couper à angle droit, on aurait obtenu des courbes

Une définition du cercle. C'est l'ensemble des intersections à angle droit des droites du faisceau de centre o (faisceau bleu) et des droites du faisceau de centre o′ (faisceau noir). La droite oo′ qui joint les deux centres des faisceaux est le diamètre du cercle ; le milieu du segment oo′ est le centre du cercle.



d'allures différentes, qui sont aussi des sections coniques et appelées, par les géomètres grecs : *ellipses, paraboles, hyperboles* (voir p. 148).

● *Surfaces réglées.* On appelle ainsi des surfaces sur lesquelles on peut tracer des droites. Le cylindre et le cône sont des exemples simples de surfaces réglées, les droites en question étant les *génératrices* du cylindre (génératrices parallèles) ou du cône (génératrices concourantes au sommet). Nous verrons p. 94 qu'on peut représenter une surface par une équation ; lorsque cette équation est du second degré, la surface est appelée une *quadrique.* On démontre, en géométrie euclidienne, que la *quadrique réglée* est un *hyperboloïde de révolution à une nappe*, un *paraboloïde hyperbolique*, un *cône* ou un *cylindre elliptique.*

● *Rapport anharmonique, ou birapport.* Soient quatre points *a, m, b, n*, sur un axe, pris *dans cet ordre* (*m* entre *a* et *b, n* extérieur à *a* et *b*, à droite de *b*) ; on appelle rapport *anharmonique* (ou *birapport*) de ces quatre points le quotient :

$$\frac{\overline{ma}}{\overline{mb}} : \frac{\overline{na}}{\overline{nb}} = (ambn)\ .$$

Le lecteur remarquera que (*ambn*) est différent de (*abmn*) par exemple, puisque, d'après la définition :

$$(abmn) = \frac{\overline{ba}}{\overline{bm}} : \frac{\overline{na}}{\overline{nm}} \neq (ambn)\ .$$

Si (*ambn*) = – 1, le birapport est dit *harmonique* ; on a alors :

$$(ambn) = \frac{\overline{ma}}{\overline{mb}} : \frac{\overline{na}}{\overline{nb}} = -1 \Rightarrow \frac{\overline{ma}}{\overline{mb}} = -\frac{\overline{na}}{\overline{nb}}.$$

Un faisceau de droites, de centre *o*, passant par les points *a,m,b,n* a pour rapport harmonique (*ambn*) ; s'il coupe une autre droite en *a′, m′, b′, n′*, on aura (*a′ m′ b′ n′*) × (*ambn*). D'une manière générale, une transformation projective conserve le rapport anharmonique (d'une division ou d'un faisceau). Le rapport anharmonique est un *invariant projectif* (il est conservé pour toute transformation projective).

Conclusion.

Les propriétés projectives des figures nous conduisent donc à traiter l'*espace*, c'est-à-dire l'ensemble des points, d'une manière particulière grâce à ce groupe de transformations appelé le *groupe projectif.* Mais cela n'est possible qu'à la condition de tenir compte des *points à l'infini* et du *plan à l'infini* qui les contient, et ce considérer ce plan comme un plan ordinaire. Un tel ensemble de points, dans lequel on peut faire des opérations plus générales que dans l'espace « ordinaire » (euclidien), est appelé *espace projectif.* La systématisation des géométries, due au mathématicien allemand Felix Klein (*Programme d'Erlangen*, 1872), se présente donc, dans ses grandes lignes, ainsi :

1 - La *géométrie projective* étudie les propriétés des figures qui restent invariantes dans une transformation du groupe projectif.

2 - Il existe un sous-groupe du groupe projectif qui laisse invariants une droite en géométrie plane, un plan en géométrie dans l'espace, un espace à $n-1$ dimensions dans la géométrie à *n* dimensions : les propriétés invariantes pour les transformations de ce sous-groupe sont des *propriétés affines*, et la théorie qui les étudie est la *géométrie affine* (dont nous avons étudié quelques aspects p. 82).

En géométrie plane, la droite invariante est appelée *droite à l'infini* de cette géométrie ; en géométrie dans l'espace, le plan invariant est le *plan à l'infini* de cette géométrie.

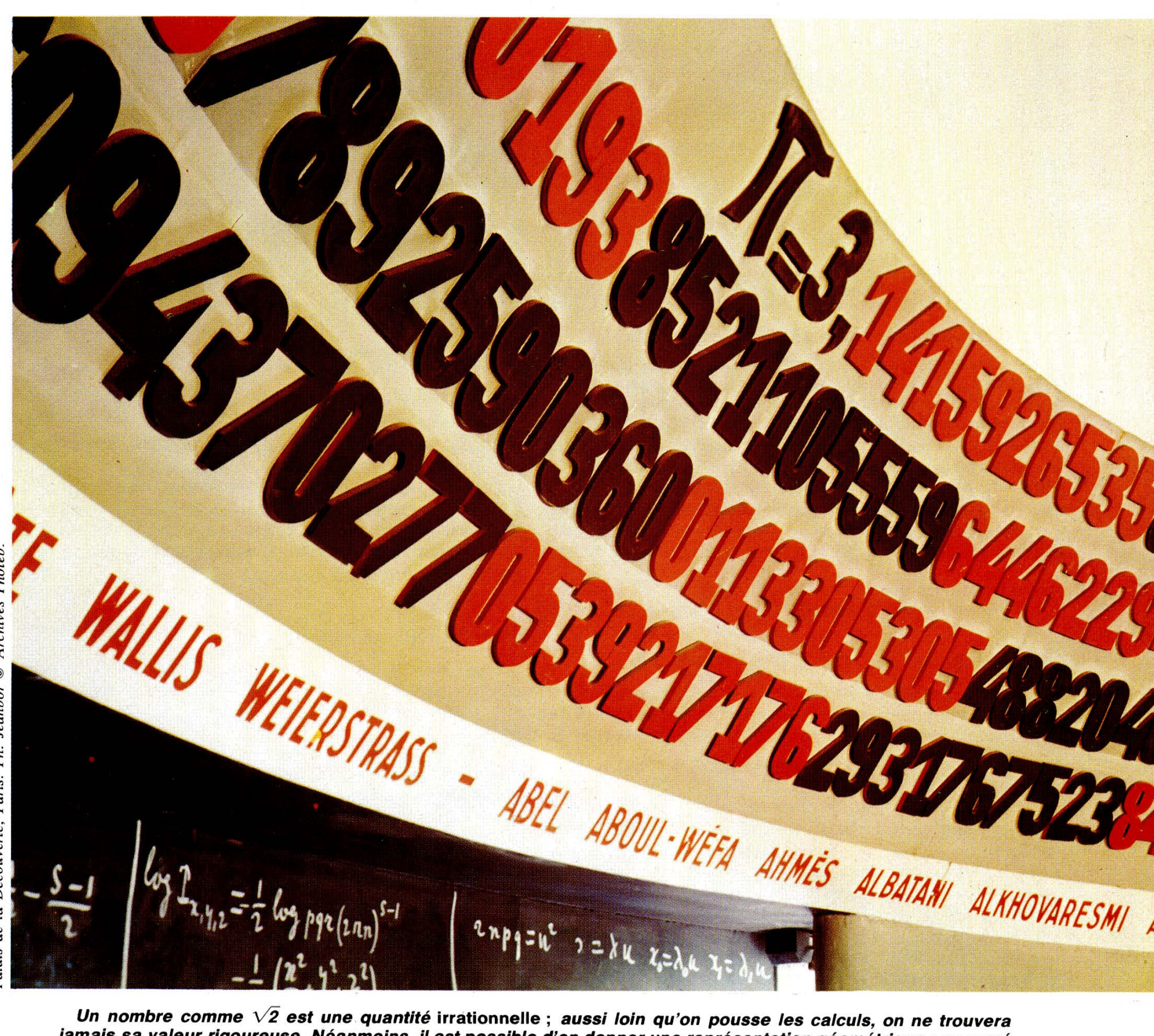
3 - Si l'on astreint deux points de cette droite à l'infini à être invariants dans un sous-groupe de transformations appartenant au groupe affine, on obtient des géométries particulières, comme la *géométrie euclidienne* (*groupe des similitudes*) ou la géométrie de la physique relativiste (*groupe de Lorentz*).

4 - Le groupe des transformations qui admettent comme invariant une conique est aussi un sous-groupe du groupe projectif ; il caractérise des *géométries non euclidiennes* (géométrie elliptique, géométrie hyperbolique).

Puisque la géométrie projective est un système cohérent dont les diverses géométries particulières peuvent se déduire, il est tentant d'envisager un exposé axiomatique de la géométrie, qui, au lieu de partir des axiomes utilisés en géométrie élémentaire (comme nous l'avons fait précédemment), fasse dériver les théorèmes d'axiomes de l'espace projectif.

La *trigonométrie* (étymologiquement : « mesure des triangles ») a été inventée par les astronomes grecs pour calculer les éléments d'un triangle (ses angles et ses côtés). Elle a conduit à associer à chaque angle des grandeurs appelées *rapports trigonométriques*, ou *fonctions circulaires* (la première expression est utilisée surtout dans les problèmes de mesure ; la seconde est relative aux arcs et concerne les problèmes généraux et l'analyse). Le fondateur de la trigonométrie semble avoir été l'astronome grec Hipparque (IIe siècle av. J.-C.), qui fut suivi dans cette voie par le mathématicien Ménélaos (= Ménélaüs) d'Alexandrie, créateur de la trigonométrie sphérique au Ier siècle ap. J.-C. Toutefois la première œuvre qui nous soit parvenue sur le sujet est celle de Ptolémée, qui consacre une partie de l'*Almageste* aux notions fondamentales de la trigonométrie (v. 150 ap. J.-C.). A partir du IXe siècle, les mathématiciens et astronomes arabes construisent des tables relativement développées des fonctions circulaires, à partir des définitions de Ptolémée et des calculs des mathématiciens de l'Inde, qui ont introduit le *sinus* et le *cosinus* ; ils ont eux-mêmes défini la *sécante* et la *cosécante*. Parmi ces mathématiciens, on peut isoler les noms de : al-Bāttanī (IXe siècle), à l'origine des notions de sinus, de tangente et de cotangente ; Abū al-Wafā (fin du Xe siècle) ; al-Bīrūnī (973-1048), qui a généralisé les lois de la triangulation ; Jabir de Séville (XIe siècle) ; Nāṣir ad-Dīn at-Ṭūsī (XIIIe siècle), qui a donné à la trigonométrie plane et à la trigonométrie sphérique leurs formes définitives.

En Occident, l'initiateur des théories trigonométriques fut l'Allemand Johan Müller (= Regiomontanus), au XVe siècle. Mais c'est Viète qui a publié le premier traité moderne de trigonométrie, en 1579, sous le titre *Canon mathematicus* ; les tables trigonométriques construites par Viète sont en rapport avec la multiplication et la division des arcs et le calcul du nombre π, que Viète a exprimé avec 10 décimales exactes (Ludolph en calculera 32 une trentaine d'années plus tard). L'invention des logarithmes, au XVIIe siècle, a permis le développement du calcul trigonométrique. Au XVIIIe siècle, la notion de mesure des angles s'efface devant celle de *fonctions circulaires* et de *fonctions hyperboliques* (Euler).



Un nombre comme $\sqrt{2}$ est une quantité irrationnelle ; aussi loin qu'on pousse les calculs, on ne trouvera jamais sa valeur rigoureuse. Néanmoins, il est possible d'en donner une représentation géométrique : un carré de côté égal à 1 possède une diagonale égale à $\sqrt{2}$. Le nombre π, qui désigne le rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre, est lui aussi « incalculable » ; mais il n'existe aucune construction géométrique qui permette de le représenter. C'est là une conséquence de la transcendance du nombre π (un nombre transcendant est un nombre qui n'est la solution d'aucune équation algébrique à coefficients entiers ; un nombre irrationnel n'est pas transcendant, car il peut être solution d'une telle équation).

Au Palais de la Découverte, à Paris, les 627 premières décimales de π ont été inscrites autour d'une coupole (elles ne sont d'ailleurs pas toutes exactes).

MESURE DES ANGLES.

Unités.

Il est commode d'associer la mesure d'un angle, c'est-à-dire la partie du plan limité par deux demi-droites qui ont une origine commune appelée *sommet* de l'angle, dont le sommet coïncide avec le centre d'un cercle à celle d'un arc de cercle intercepté par les côtés de cet angle. L'angle au centre interceptant un arc égal au quart de la circonférence est un *angle droit* ; l'angle au centre interceptant la moitié de la circonférence est un *angle plat* ; l'angle au centre interceptant toute la circonférence, c'est-à-dire dont les deux côtés sont confondus, est le plan.

— Le *degré* est la 90e partie d'un angle droit. On a donc :

$$1 \text{ Droit} = 90° ;\ 1 \text{ Plat} = 180° ;\ \text{Plan} = 360° .$$

Le degré est divisé en 60 *minutes* ('), la minute en 60 secondes (''). Au-delà, on utilise des divisions décimales de la seconde (0,1'', 0,01'', etc.). La division en degrés est commode, en géométrie élémentaire, car le cercle se prête facilement à une division sexagésimale (en construisant six arcs consécutifs dont la corde est égale au rayon, on partage le cercle en six parties égales, qui sont six arcs de 60° chacun). Elle n'est pas commode, par contre, pour les calculs courants, en raison de sa nature sexagésimale, qui impose des conversions.

— Le *grade* (gr) est la centième partie d'un angle droit. C'est une division décimale (ses sous-multiples sont le décigrade, le centigrade, etc.). Le grade est donc une unité commode pour les calculs pratiques. On a les équivalences :

$$1° = 1{,}111 \ldots \text{gr}, \quad 1 \text{ gr} = 54' . \qquad (1)$$

— Dans les problèmes théoriques, on mesure les angles en *radians* (rad). Étant donné un cercle de rayon R, un arc de longueur l a pour mesure $x = l/R$ radians. Cette définition nous montre que : 1° un arc de 1 radian sur un cercle de rayon R a pour longueur $l = R$; 2° un angle au centre de 1 radian intercepte un arc de 1 radian.

Si l'on convient de faire toutes les mesures toujours avec la même unité de longueur, et si l'on choisit de rapporter les angles à un cercle de rayon $R = 1$ mètre, un arc de cercle de longueur 1 mètre sur ce cercle aura donc pour mesure 1 radian. Ainsi la circonférence (360°), dont la longueur est $2\pi \times 1 = 2\pi$ mètres ($\pi = 3{,}14159\ldots$), mesure donc, en radians, 2π radians ; et l'on a immédiatement :

$$180° = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad} ; \qquad (2)$$

$$90° = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad} ; \qquad (3)$$

$$60° = \frac{180°}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} ; \qquad (4)$$

$$30° = \frac{180°}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} ; \qquad (5)$$

$$45° = \frac{90°}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ rad} ; \qquad (6)$$

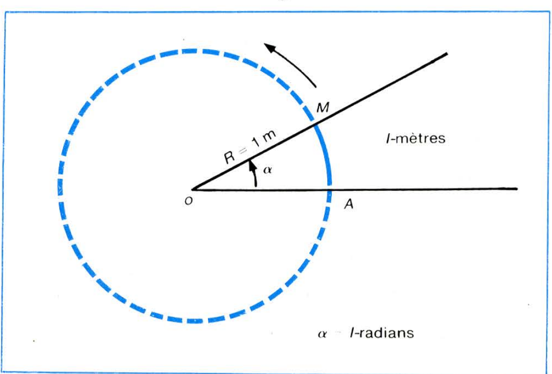
et

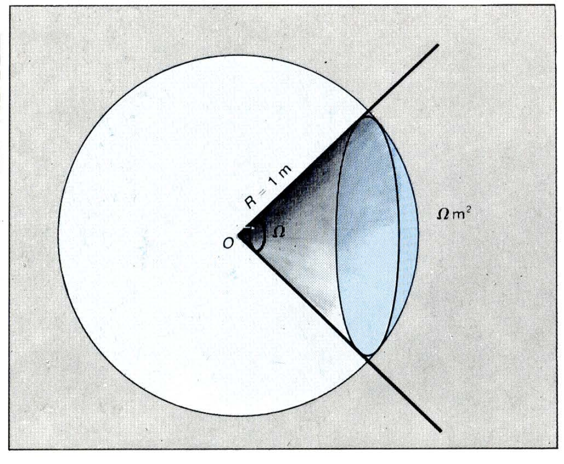
$$1 \text{ rad} = 57° 17' 45'' = 63{,}662 \text{ gr} \qquad (7)$$

(par approximation, bien entendu, puisque π ne peut être connu exactement).

— Dans l'espace, on appelle *angle solide* de sommet O la portion de l'espace comprise à l'intérieur d'un cône de sommet O (remarquer le parallélisme avec la définition de l'angle dans le plan). On mesure un angle solide en *stéradians* (voir figure à la page suivante), le stéradian étant défini selon le même principe que le radian, en remplaçant le cercle de rayon $R = 1$ par une sphère de rayon $R = 1$, et la longueur l de l'arc de cercle considéré par la surface Ω (*omega* majuscule) découpée sur la sphère par l'angle


Mesure d'un angle en radians.





Mesure d'un angle solide en stéradians.

solide (c'est-à-dire par le cône de sommet O). La mesure en stéradians de l'angle solide considéré est égale à Ω. Par conséquent, la totalité de l'espace correspond à $\Omega = 4\pi$ stéradians (surface de la sphère $= 4\pi R^2 = 4\pi$) ; l'angle solide correspondant à tout l'espace situé d'un même côté du plan est égal à 2π stéradians ; l'angle solide correspondant à un cône d'angle au sommet égal à 90° est égal à π stéradians.

Généralisation.

Mesure d'un arc (ou d'un angle) modulo 2π.

Considérons un cercle de rayon $R = 1$ sur lequel on a choisi un sens de parcours (sens inverse de celui des aiguilles d'une montre) et une origine A des arcs. L'expression « arc $\widehat{AM}$ » désigne *tout* arc qui a pour origine A et pour extrémité M, c'est-à-dire :

— le plus petit de tous les arcs $\widehat{AM}$ parcourus dans le sens positif sur le cercle ; soit α sa valeur en radians ;

— l'arc $\alpha + 2\pi$ qui correspond à l'arc $\widehat{AM}$ augmenté d'un tour complet (qui aboutit, par conséquent, à M) ;

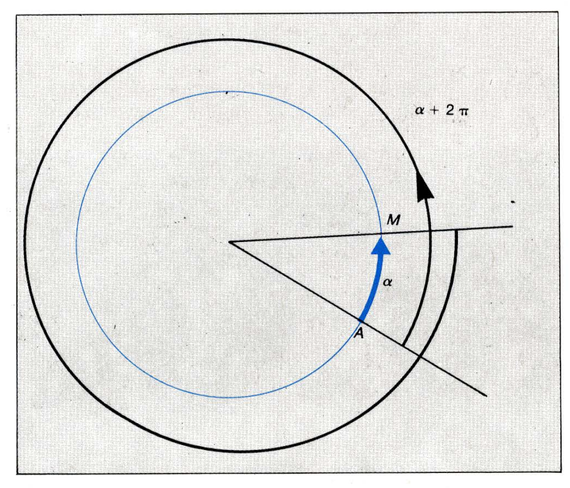
— l'arc $\alpha + 4\pi$ et, de même, les arcs $\alpha + 6\pi$, $\alpha + 8\pi$, etc., soit d'une manière générale $\alpha + 2k\pi$ (k = nombre positif entier ou zéro) ;

— le plus petit des arcs $\widehat{AM}$ parcourus dans le sens négatif sur le cercle, soit $\alpha' = 2\pi - \alpha$ (puisque le cercle complet mesure 2π) ;

— d'une manière générale les arcs $\alpha' + 2k'\pi$,

Un exemple de résolution de triangle : comment mesurer la hauteur d'une tour inaccessible, d'après un manuscrit de 1538 (époque à laquelle on savait résoudre des problèmes autrement complexes, d'ailleurs).





Mesure d'un arc modulo 2 π.

soit :

$$\alpha' = (2\pi - \alpha) + 2k'\pi = -\alpha + 2h\pi \qquad (1)$$

(h = nombre entier positif différent de zéro ; pour $h = 1$, on a $\alpha' = -\alpha + 2\pi$).

On dit que l'arc α et l'arc α' sont mesurés *modulo* 2π (ou « à $2k\pi$ près »). Physiquement, cela correspond à mesurer l'angle dont tourne une demi-droite (ou l'arc que parcourt un mobile sur un cercle) à un nombre entier de tours près.

Angle de deux droites dans le plan orienté.

Définissons, dans le plan, un sens positif de rotation, par exemple le sens inverse des aiguilles d'une montre.

- *Angle de deux droites.* Soient D et D' deux droites du plan.

— Si D et D' ne sont pas orientées, on appelle angle de ces deux droites l'un *quelconque* des angles dont il faut faire tourner D pour l'appliquer sur D'. Soit α l'un de ces angles ; les autres angles $(\widehat{D, D'})$ sont :

$$\alpha + 2k\pi ;$$
$$\alpha - \pi + 2k\pi = \alpha + (2k - 1)\pi. \qquad (2)$$

Ces deux déterminations ($2k$: nombre pair de fois π ; $2k - 1$: nombre impair de fois π) se résument en une seule formule :

$$(\widehat{D, D'}) = \alpha + K\pi \qquad (K : \text{entier ou nul}). \qquad (3)$$

— Si les droites sont orientées ($\vec{D}$ et $\vec{D'}$), on appelle angle de leurs directions l'un quelconque des angles dont il faut faire tourner $\vec{D}$ pour l'appliquer sur $\vec{D'}$ de sorte que les deux droites confondues aient la même orientation. On le note $(\widehat{\vec{D}, \vec{D'}})$. Si α désigne un de ces angles, tous les angles possibles sont donnés par :

$$\alpha + 2k\pi, -(2\pi - \alpha) + 2k\pi = \alpha + 2k'\pi \qquad (4)$$

(voir figure) ; c'est-à-dire que :

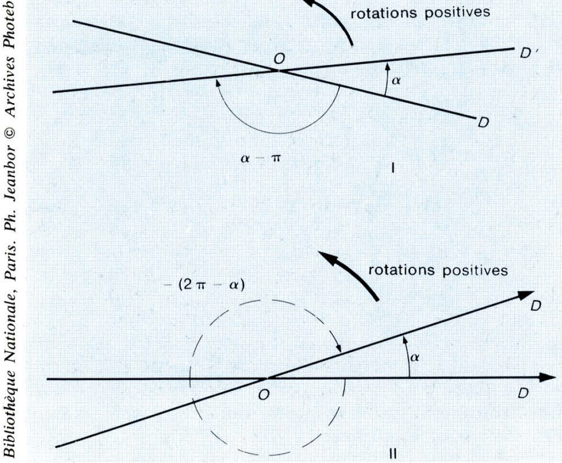
$$(\widehat{\vec{D}, \vec{D'}}) = \alpha + 2h\pi. \qquad (5)$$

- *Relation de Chasles.*

— Droites orientées :

$$(\widehat{\vec{D}, \vec{D'}}) + (\widehat{\vec{D'}, \vec{D''}}) + (\widehat{\vec{D''}, \vec{D}}) = 2k\pi \qquad (6)$$

Angle de deux droites.
I - Droites non orientées.
II - Droites orientées.



— Droites non orientées :

$$(\widehat{D, D'}) + (\widehat{D', D''}) + (\widehat{D'', D}) = k\pi \qquad (7)$$

(Remarquer le parallélisme avec la relation de Chasles pour des segments : $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = 0$: le côté « extrémité » d'un angle est le côté « origine » du suivant).

— Si l'on a choisi un axe de référence, Ox, orienté de O vers x, et que l'on ait : $(\widehat{\vec{Ox}, \vec{D}}) = \theta + 2k\pi$, $(\widehat{\vec{Ox}, \vec{D'}}) = \theta' + 2k\pi$ (angles polaires de D et de D'), on aura :

$$(\widehat{\vec{D}, \vec{D'}}) = \theta' - \theta + 2k\pi. \qquad (8)$$

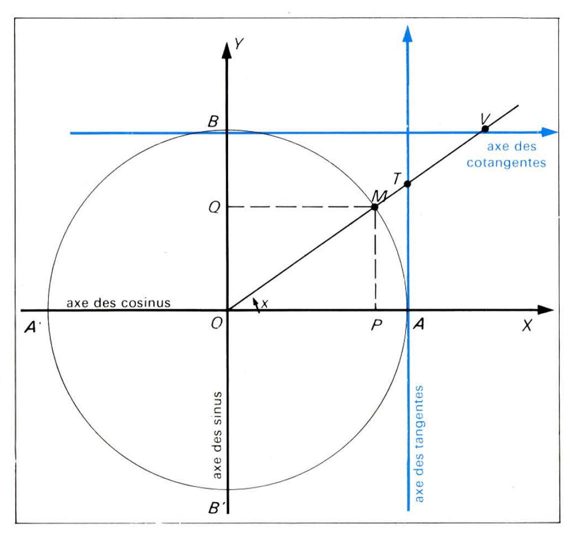
Ici aussi, comparer avec la relation de Chasles :

$$\overline{ab} = \overline{ob} - \overline{oa} \qquad (9)$$

LES FONCTIONS CIRCULAIRES.

Définitions.

Considérons un cercle de centre O, de rayon $R = 1$, muni de deux axes rectangulaires OX et OY, et d'un sens de parcours (sens inverse de celui des aiguilles d'une montre). Menons en outre les tangentes à ce cercle en A et en B, orientées comme cela est indiqué sur la figure ci-dessous. A tout point M du cercle correspond un arc $\widehat{AM} = x$. Comme nous venons de le dire, cet arc est mesuré modulo 2π.



Fonctions circulaires.

Par définition, on appelle *fonctions circulaires* de l'arc x les *nombres réels* qui constituent les mesures algébriques des segments $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{AT}$ et $\overline{BV}$. Ces nombres sont appelés respectivement le *cosinus*, le *sinus*, la *tangente* et la *cotangente* de l'arc x. On écrit :

$$\overline{OP} = \cos x, \qquad \overline{OQ} = \sin x,$$
$$\overline{AT} = \tan x, \qquad \overline{BV} = \cot x, \qquad (1)$$

(lire : « cosinus x », « sinus x », « tangente x », « cotangente x » ; les notations « tg x » et « cotg x » à la place de « tan x » et « cot x » sont encore largement employées, mais non recommandées).

On définit aussi les deux fonctions *sécante* et *cosécante* par les relations :

$$\text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x}, \quad \text{coséc}\, x = \frac{1}{\sin x}. \qquad (2)$$

Quelques propriétés fondamentales des fonctions circulaires d'un arc.

Périodicité.

Cette notion sera reprise p. 112. Il est facile, dès maintenant, de se rendre compte que les arcs x et $(x + 2\pi)$ ou $(x + 2k\pi)$, se terminant en un même point M, ont même sinus et même cosinus. On exprime cela en disant que les fonctions numériques *sinus* et *cosinus* sont périodiques de période 2π, et l'on écrit :

$$\begin{cases} \sin(2k\pi + x) = \sin x ; \\ \cos(2k\pi + x) = \cos x. \end{cases} \qquad (1)$$

Le lecteur constatera de même que les fonctions *tangente* et *cotangente* sont périodiques de période π,

c'est-à-dire qu'on peut écrire :

$$\begin{cases} \tan(k\pi + x) = \tan x ; \\ \cot(k\pi + x) = \cot x . \end{cases} \quad (2)$$

Il résulte de cela que, si l'on connaît les valeurs des fonctions circulaires des arcs entre 0 et 2π, on connaît les fonctions circulaires de toute valeur de x plus petite que 0 ou supérieure à 2π.

Relations fondamentales.

Les nombres $\sin x$ et $\cos x$ sont les coordonnées du point M dans le repère cartésien OXY (coordonnées rectangulaires). En appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle OPM, et en remarquant que :

$$\overline{PM} = \overline{OQ} = \sin x , \quad (3)$$

on peut écrire :

$$\overline{PM}^2 + \overline{OP}^2 = R^2 = 1 , \quad (4)$$

soit :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 . \quad (5)$$

D'autre part, la similitude des triangles rectangles OAT et OPM permet d'écrire :

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (6)$$

et comme $\overline{OA} = 1$

$$\overline{AT} = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} . \quad (7)$$

De même on aurait :

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x} . \quad (8)$$

Ces relations entre les fonctions circulaires sont fondamentales ; elles permettent d'exprimer l'une d'entre elles en fonction des autres (voir p. 148).

Notons aussi que les fonctions circulaires d'une variable x peuvent s'exprimer comme des exponentielles imaginaires (formules d'Euler), à l'aide de la relation :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x , \quad (9)$$

d'où l'on tire :

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} ; \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} . \end{cases} \quad (10)$$

Calcul des fonctions circulaires.

Dans certains cas simples, les fonctions circulaires d'un arc peuvent être calculées à partir des règles de la géométrie métrique. On remarquera en particulier que les valeurs extrêmes, minimale et maximale, d'un sinus ou d'un cosinus sont -1 et $+1$, puisque les positions extrêmes des points P et Q sur les axes OX et OY sont A et A' pour P, B et B' pour Q. Par contre, $\tan x$ et $\cot x$ peuvent prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ quand x varie de 0 à 2π, puisque les points T et V peuvent se déplacer indéfiniment sur l'axe des tangentes et sur l'axe des cotangentes.

La détermination des valeurs des fonctions circulaires pour un arc quelconque compris entre 0 et 2π est un problème difficile, sur lequel nous ne nous attarderons pas ici. Le calcul a été fait une fois pour toutes et l'on a établi des *tables des fonctions circulaires* ou *tables trigonométriques*.

Lignes trigonométriques d'un angle.

Si l'on remplace la considération de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ par l'angle au centre $\widehat{AOM}$, les fonctions circulaires sont appelées souvent *lignes trigonométriques* de l'angle $\widehat{AOM} = x$. En géométrie appliquée, on est conduit à mesurer les éléments d'un triangle, c'est-à-dire ses angles et ses côtés (problème de la *résolution des triangles*). En considérant un triangle rectangle ABC, rectangle en A, semblable au triangle POM de la figure qui nous a servi à définir les fonctions circulaires, on démontre aisément les relations suivantes :

$$\begin{cases} \sin \hat{C} = \dfrac{AB}{BC} = \cos \hat{B} ; \\ \cos \hat{C} = \dfrac{AC}{BC} = \sin \hat{B} ; \\ \tan \hat{C} = \dfrac{\sin \hat{C}}{\cos \hat{C}} = \dfrac{AB}{AC} = \cot \hat{B} ; \\ \cot \hat{C} = \dfrac{AC}{AB} = \tan \hat{B} . \end{cases} \quad (11)$$

On tire de ces formules la relation suivante fréquemment utilisée :

$$AB = BC \ \cos \hat{B} = BC \ \sin \hat{C} . \quad (12)$$

Projection orthogonale.

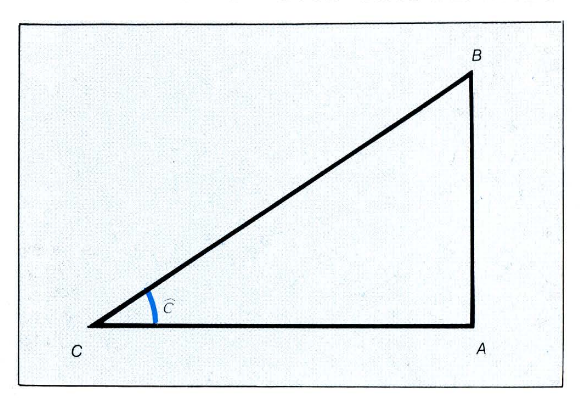
Soient une droite orientée Ox et une droite orientée quelconque D du plan. Si l'on projette sur Ox le vecteur $\boldsymbol{AB}$ de mesure algébrique $\overline{AB}$ appartenant à D, on a :

$$\overline{A'B'} = \text{proj. } \boldsymbol{AB} = \overline{AB} \cos(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{D}) . \quad (13)$$

Le cosinus de l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{D})$ est le *rapport de projection* de D sur Ox : un vecteur $\boldsymbol{u}$ de D, de grandeur géométrique unité, se projette selon un vecteur $\boldsymbol{u}'$ de Ox, de grandeur :

$$\| \boldsymbol{u}' \| = | \cos(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{D}) | . \quad (14)$$

Nous avons déjà utilisé le rapport de projection d'une droite sur une autre à propos de la définition du *produit scalaire*, p. 86.



Relations trigonométriques dans le triangle rectangle.

CALCUL TRIGONOMÉTRIQUE.

Le lecteur trouvera p. 148 les renseignements fondamentaux concernant :
— les formules de la trigonométrie,
— la résolution des triangles,
— les équations trigonométriques,
— l'inversion des fonctions circulaires.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET GÉOMÉTRIE COTÉE

La représentation projective des figures dans l'espace a été étudiée par Monge à la fin du XVIIIe siècle.

GÉNÉRALITÉS.

Objet de la géométrie descriptive.

La géométrie descriptive a pour objet :
1° - de représenter les figures dans l'espace au moyen de figures planes ;
2° - de résoudre certains problèmes de la géométrie dans l'espace par des constructions effectuées sur des figures planes.

On utilise pour cela des *projections* sur deux plans rectangulaires arbitraires appelés *plans de projection* ; pour les distinguer, on appelle l'un d'eux *plan horizontal* (plan H), et l'autre *plan vertical* (plan V). Leur intersection xy est appelée la *ligne de terre*.

Étant donné un point A dans l'espace, on mène de ce point les perpendiculaires aux plans H et V, ce qui fournit les projections de A sur ces deux plans, respectivement notées a et a_1. En faisant tourner le plan V autour de xy comme charnière, il vient s'appliquer sur H et le point a_1 vient en a'. Au cours de ce *rabattement*, la droite $a_1\alpha$ (voir figure ci-contre) reste perpendiculaire à xy. Finalement, à chaque point A de l'espace on fait correspondre le couple de points (a, a') qu'on appelle, par abus toléré de langage, les projections horizontale et verticale de A. La droite aa', perpendiculaire à la ligne de terre, est appelée *ligne de rappel*. La représentation du couple (a, a') dans le plan horizontal s'appelle *l'épure du point A*.

Une figure (plane ou à trois dimensions) dans l'espace étant composée de points, la représentation de cette figure en géométrie descriptive est obtenue en projetant tous ses points sur les deux plans H et V. On obtient ainsi l'épure de la figure considérée. S'il s'agit d'une figure usuelle (droite, polygone, courbe particulière, etc.), il n'est généralement pas nécessaire d'en projeter tous les points, mais seulement quelques points caractéristiques.

Quelques définitions.

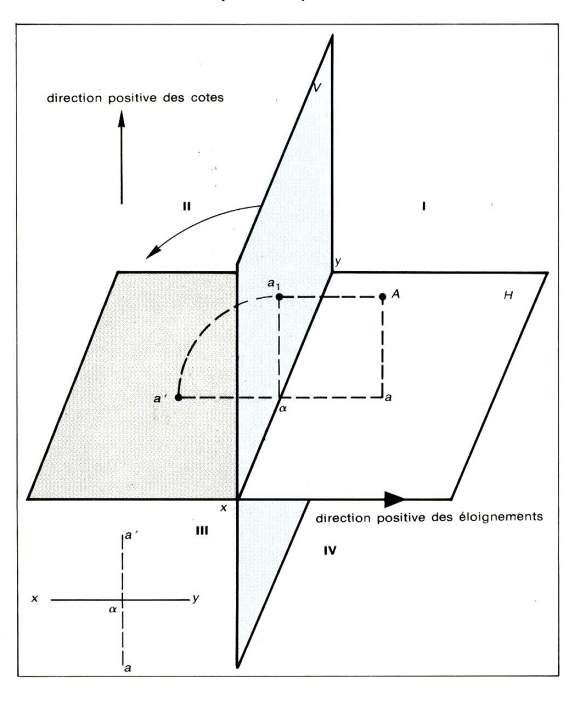
● *Les deux plans partagent l'espace en quatre régions* : les *dièdres* I, II, III, IV, qui ont été indiqués sur la figure ci-contre. Il faut noter que le fait que les deux plans soient appelés « horizontal » et « vertical » n'a pas de signification physique, à moins qu'on ne le signifie expressément.

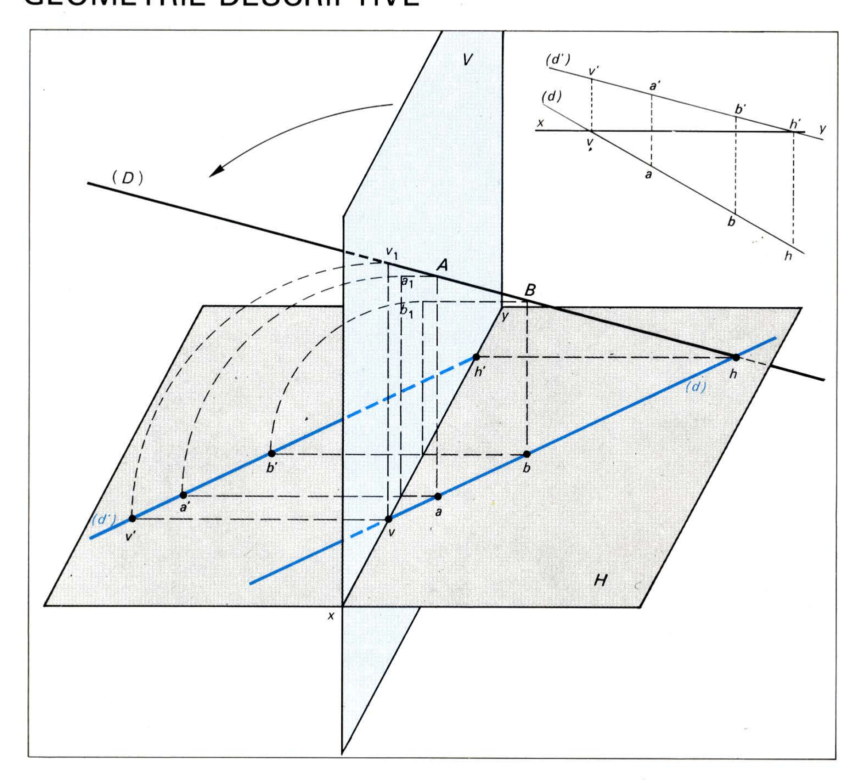
● *La position d'un point dans l'espace* est définie à une translation près si l'on se donne : 1° le dièdre dans lequel il se trouve ; 2° sa distance au plan vertical (appelée *éloignement*) et sa distance au plan horizontal (appelée *cote*). Pour préciser algébriquement le dièdre dans lequel se trouve le point A, on choisit dans H et V une direction perpendiculaire à xy orientée arbitrairement et qui définit le sens positif des éloignements et le sens positif des cotes. On adopte usuellement les conventions de la figure ci-contre.

Généralement on suppose que les objets à représenter sont placés dans le premier dièdre (cote et éloignement positifs) s'il s'agit de dessins d'architecture ; s'il s'agit de dessin industriel, on les place dans le troisième dièdre (cote et éloignement négatifs) ; en perspective, on les suppose placés dans le second dièdre. Le quatrième dièdre est peu utilisé.

Nous n'avons pas représenté sur la figure ci-contre les plans bissecteurs des dièdres, qui sont deux plans perpendiculaires passant par la charnière xy. Celui qui est dans le premier et le troisième dièdre s'appelle le premier bissecteur ; tout point de ce plan a

Épure du point A.





Épure d'une droite.
***La droite** (D) **(de l'espace) coupe les plans de projection en** h **sur le plan horizontal, et** v_1 **sur le plan vertical,** v_1 **se rabattant en** v'.*
***Sur l'épure, les couples** (h, h') **et** (v, v') **sont appelés les traces horizontale et verticale de la droite** D **sur les plans de projection. Ces deux points permettent de tracer les projections** (d) **et** (d') **de la droite** (D). **Par ailleurs, deux points** A **et** B **de** (D) **se projettent respectivement en** a **et** b **sur le plan horizontal,** a_1 **et** b_1 **sur le plan vertical, ces deux derniers se rabattant en** a' **et** b'.*
***Les couples** (a, a') **et** (b, b') **déterminent aussi les projections** (d) **et** (d') **de la droite** (D).*

une cote égale à son éloignement (les points *a* et *a'* de l'épure sont symétriques par rapport à la ligne de terre). Un point situé dans le second bissecteur a ses deux projections confondues dans le plan horizontal.

- *La géométrie cotée* est une forme simplifiée de la géométrie descriptive. Elle représente un point *A* par sa projection horizontale *a* et un nombre (positif ou négatif) indiquant sa *cote*. Dans le cas de la figure précédente, par exemple, le point *A* aurait pour épure (a, λ), λ désignant la cote du point *A* (c'est-à-dire la mesure algébrique du segment αa_1).

REPRÉSENTATIONS FONDAMENTALES.

Épure d'un point.

Nous l'avons définie plus haut (p. 91). Quelques précisions complémentaires peuvent être retenues (le lecteur a intérêt à faire lui-même les figures correspondantes en s'inspirant de la figure que nous avons donnée p. 91).

— Un point *M* situé sur la ligne de terre a ses projections (*m*, *m'*) confondues avec lui-même sur *xy*.

— Un point *M* situé dans le plan horizontal a sa projection verticale *m'* sur la ligne de terre.

— Un point *M* situé dans le plan vertical a sa projection horizontale *m* sur la ligne de terre.

— Nous avons déjà précisé la position des projections d'un point appartenant au premier ou au second bissecteur.

Épure d'une droite.

La projection orthogonale d'une droite (*D*) étant une ligne droite, à toute droite (*D*) de l'espace correspondent donc deux droites (*d*, *d'*) dans les plans de projection. On obtient ces deux droites en projetant deux points quelconques *A* et *B* de (*D*) en (*a*, *a'*) et (*b*, *b'*). L'épure de (*D*) est composée des deux droites *ab* et *a' b'*.

On peut retenir les définitions suivantes :

— on appelle *droite de front* (ou *frontale*) une droite parallèle au plan vertical de projection ; sa projection horizontale est parallèle à la ligne de terre ;

— on appelle *droite verticale* une droite perpendiculaire au plan horizontal ; sa projection horizontale se réduit à un point et sa projection verticale est perpendiculaire à la ligne de terre ;

— on appelle *droite de bout* une droite perpendiculaire au plan vertical ; sa projection verticale se réduit à un point, sa projection horizontale est perpendiculaire à la ligne de terre ;

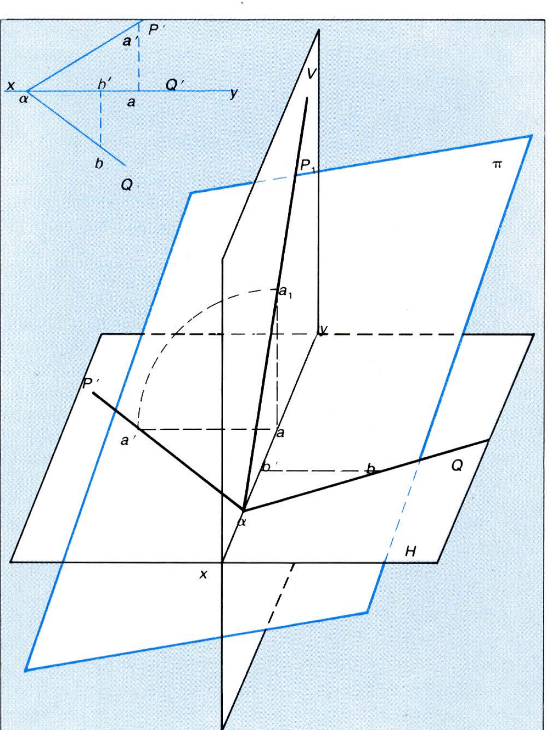
— on appelle *droite de profil* une droite située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre (appelée lui-même *plan de profil*).

Épure d'un plan.

Un plan ne peut être représenté par ses projections, car elles recouvrent, évidemment, tout le plan *H* et tout le plan *V*. On le représente donc, en général, par ses *traces*, c'est-à-dire par ses intersections avec les plans de projection (voir figure ci-dessous).

On définit, de la même façon que pour les droites, des plans horizontaux, verticaux, de front, de bout et de profil. Une propriété importante de la représentation du plan en géométrie descriptive est la suivante : si deux droites (*D*) et (Δ) d'un plan se coupent en un point *A*, leurs projections de même nom se coupent selon les projections du point *A*. Ainsi (*d*) et (δ) se coupent en *a*, (*d'*) et (δ') se coupent en *a'*.

Traces d'un plan.
Le plan Π ***coupe le plan horizontal de projection selon la droite*** αQ ***et le plan vertical selon la droite*** αP_1 ***; ces deux droites sont les traces horizontale et verticale du plan. En projection,*** αQ ***se projette horizontalement selon elle-même, et verticalement selon la ligne de terre ; de même la projection horizontale de*** αP_1 ***est la ligne de terre ; on rabat*** αP_1 ***selon la méthode habituelle et l'on a sa « projection verticale » — au sens de la géométrie descriptive —*** $\alpha P'$. ***Le plan*** Π ***est représenté au total par les droites (***αQ, *xy*) ***et*** (*xy*, $\alpha P'$) ***; on dit communément : « le plan*** $Q\alpha P'$ ***».***



Surfaces, ombres.

Surfaces.

Les méthodes de la géométrie descriptive s'appliquent aussi, bien entendu, à la représentation des surfaces et des volumes. D'un intérêt primordial sont notamment les surfaces qui peuvent être « étalées » sur un plan par un procédé quelconque, sans déformation ni déchirement et qui sont appelées des *surfaces développables* (ainsi on peut dérouler un cylindre ou un cône, qui sont des surfaces développables ; par contre la surface d'une sphère ne peut être étalée sans déchirure, ce n'est pas une surface développable).

Ombres des surfaces.

Soit une surface *S* éclairée par un point lumineux *O* à distance finie. Nous prendrons comme exemple le cas d'une surface sphérique.

L'*ombre propre* de cette surface est limitée par la *courbe de contact C* du cône de sommet *O* circonscrit à la surface et nommé *cône d'ombre* ; cette courbe est aussi appelée la *séparatrice*. Le cône d'ombre coupe les plans *H* et *V* selon deux courbes (c) et (c_1) qui sont les *ombres portées* de la surface *S* sur *H* et *V*. Si la source lumineuse est à l'infini (ombre dite « au soleil »), les rayons lumineux peuvent être considérés comme parallèles et le cône d'ombre devient un *cylindre d'ombre*.

Dans la pratique, on convient souvent que l'ombre est « au soleil » et que les projections des rayons lumineux sur *H* et *V* font des angles à 45° avec la ligne de terre.

Contours apparents d'une surface.

On appelle *contour apparent horizontal dans l'espace* d'une surface la courbe de contact du cylindre circonscrit à la surface parallèlement aux verticales. Le *contour apparent vertical dans l'espace* se définit de la même manière avec un cylindre circonscrit à la surface parallèlement aux lignes de bout. Les projections sur le plan horizontal et le plan vertical de ces contours apparents forment ce qu'on appelle le *contour apparent horizontal* et le *contour apparent vertical* de la surface considérée. On démontre deux théorèmes importants pour les représentations descriptives :

— si une courbe tracée sur une surface rencontre le contour apparent horizontal dans l'espace, la projection horizontale de cette courbe est tangente au contour apparent horizontal de la surface ;

— si deux surfaces sont tangentes en tous les points d'une courbe *C*, leurs contours apparents horizontaux et la projection horizontale de la courbe *C* sont eux-mêmes tangents en un même point.

Ombres d'une sphère.



René Descartes (1596-1650) : inventeur de la géométrie analytique, il a mis les mathématiques sur une voie nouvelle, réalisant, pour la première fois, le parallélisme entre le langage géométrique presque expérimental et le langage algébrique.

Les inconvénients des méthodes de la géométrie classique ont conduit les mathématiciens à étendre au domaine géométrique les avantages des automatismes de l'algèbre. C'est à Descartes que l'on doit, pour l'essentiel, l'invention de la géométrie analytique. Le présent exposé n'étudie que la partie de la géométrie analytique *qui ne fait pas appel à l'analyse* ; il doit être complété par les pages 123-124 où l'on dit quelques mots de la géométrie différentielle et par les pages 155-158. Les résultats techniques particuliers sont donnés p. 151.

APERÇU HISTORIQUE.

L'invention de la géométrie analytique.

Descartes.

Au XVIIe siècle, les mathématiciens disposent d'un outil nouveau, forgé par leurs prédécesseurs de la Renaissance : *l'algèbre symbolique*, qui permet de calculer élégamment et rapidement sur des quantités indéterminées et de résoudre les équations à l'aide de formules, d'une manière quasi automatique.

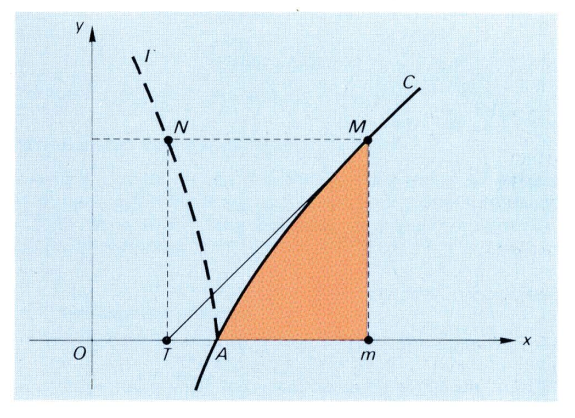
Fermat et Descartes ont été les premiers à « mettre en équations » des problèmes géométriques. Descartes se préoccupe particulièrement des sections coniques (ellipse, parabole, hyperbole) et du fameux « problème de Pappus » qui conduit à des équations de degré supérieur à 2. Ces travaux l'amènent à introduire la notion de système de coordonnées planes, chaque point du plan étant défini par son abscisse x et son ordonnée y, obtenues en projetant sur des axes Ox et Oy, rectangulaires ou obliques (voir ci-après p. 95). Une *courbe algébrique* est alors définie par la relation $f(x, y) = 0$ qui existe entre les coordonnées de chacun de ces points. Par exemple, tous les points $M(x, y)$ d'une droite vérifient l'équation $Ax + By + C = 0$, les coefficients A, B et C dépendant de la position de la droite dans le plan; etc. (voir p. 149). Descartes a exposé sa méthode dans un ouvrage intitulé *La Géométrie*, deuxième partie des *Essais*, publiés en 1637 (la préface à ces *Essais*, qui traitaient aussi d'optique et de météorologie, est un des textes les plus célèbres de la philosophie : c'est le fameux *Discours de la méthode*).

Il faut noter que, dès sa naissance, la géométrie analytique a connu ses premières difficultés. Descartes s'était contenté de donner une méthode pour représenter une courbe par une équation et chercher des lieux géométriques par le calcul. Sa géométrie se limitait aux courbes que l'on peut construire à l'aide de la règle et du compas et il n'avait pas résolu le problème fondamental de la détermination de la tangente à une courbe en un point. Certes, il possédait — comme tous les mathématiciens — les recettes de la géométrie classique : la tangente au cercle en un point est la perpendiculaire au rayon en ce point, la tangente à l'ellipse en un point est la bissectrice des rayons vecteurs de ce point, etc., mais ce n'était pas là une méthode générale. Ainsi donc, dès sa naissance, la géométrie analytique exigeait d'être développée.

Fermat et Roberval.

Le problème des tangentes fut particulièrement étudié par Fermat, entre 1630 et 1660, et ce dernier fut très près d'en découvrir la solution générale, qui relève, comme nous le verrons, de l'*analyse* (en particulier, la solution de ce problème utilise la propriété démontrée par Pascal relative au rapport des côtés d'un triangle rectangle).

Un autre problème, de caractère métrique, restait en suspens : comment calculer l'aire limitée par une courbe ou par une portion de courbe ? Là aussi, la géométrie classique avait autant de formules que de courbes, et ne proposait aucune méthode générale de calcul. La géométrie analytique balbutiante de Descartes est, sur ce point, aussi mal embarquée. Toutefois, en 1645, Roberval propose une méthode de « quadrature » des courbes algébriques, utilisant le fait que ces courbes sont toutes représentables par des équations, et qui consiste à utiliser des courbes auxiliaires appelées *quadratrices* (voir figure ci-après). Cette méthode suppose qu'il y a un certain lien (mais lequel ?) entre le problème des tangentes et le problème des aires : ce lien sera découvert par Leibniz et par Newton, inventeurs du calcul différentiel et intégral.



Quadratrice de Roberval.
Soit C une courbe d'équation $f(x, y) = 0$, et soit à calculer l'aire colorée en orange AMm. Menons la tangente en M, qui coupe l'axe des x en T, et construisons le point N, d'abscisse $x = OT$ et d'ordonnée $y = mM$. A chaque point M correspond un point N, et le lieu des points N est une courbe Γ, d'équation $g(x, y) = 0$, appelée quadratrice (parce qu'elle sert à « carrer » la courbe C, c'est-à-dire à évaluer son aire). L'aire MAN est équivalente à l'aire AMm.

La géométrie analytique classique.

Au XVIIIe siècle, la géométrie analytique va largement dépasser les buts que lui avait assignés Descartes qui n'y voyait, à l'origine, qu'une application de l'algèbre à la géométrie facilitant la résolution de certains problèmes. Ainsi va se définir la géométrie analytique classique.

La théorie des courbes planes.

Descartes n'avait étudié d'une manière approfondie

que les courbes planes du second degré, c'est-à-dire les *coniques.* Newton et ses successeurs immédiats ont étudié d'une manière systématique les courbes du troisième degré, ou *cubiques*, et les courbes de degrés supérieurs. Newton montra la voie à suivre en décrivant 72 cubiques et en démontrant qu'on pouvait toutes les obtenir à partir de cinq cubiques fondamentales. On lui doit aussi d'avoir employé systématiquement les coordonnées négatives (dont Descartes se méfiait).

Parmi les mathématiciens qui s'attachèrent à l'examen analytique des courbes algébriques, on citera : Stirling, McLaurin, Goudin, Waring, Riccati, Saladini, etc., dont nous retrouverons les noms en analyse. La théorie des courbes planes, qui comprend l'étude de leurs formes, de leurs branches infinies, de leurs tangentes, de leurs asymptotes, de leurs points remarquables, etc., a été systématisée au XVIIIe siècle par Cramer (1750) et par Euler (*Introduction à l'analyse des infiniment petits*, 1748).

Nous verrons que c'est l'approfondissement des propriétés des courbes qui engendrera un nouvel essor de la géométrie analytique au XIXe siècle.

La théorie des surfaces.

La deuxième conquête de la géométrie analytique fut celle de la troisième dimension. Les courbes étudiées par Descartes, Newton, Cramer, Euler et les autres sont des courbes planes, et leurs aires sont des surfaces planes. La Hire introduit en 1679 la considération d'un système de coordonnées spatiales (x, y, z), ce qui revient à construire un troisième axe de coordonnées Oz, perpendiculaire aux axes Ox et Oy définissant le plan. Un point dans l'espace est alors déterminé par trois nombres réels (x, y, z), et l'équation $f(x, y, z) = 0$ définit une *surface gauche.* Les problèmes qui se posent sont alors les suivants :

1 - déterminer l'équation des surfaces usuelles (sphère, cône, hyperboloïde de révolution, etc.) ;

2 - étudier leurs plans tangents ;

3 - déterminer systématiquement la nature des surfaces définies par des équations du deuxième, troisième, ..., du n-ième degré. Ce dernier problème concerne la courbure, les plans tangents, l'allure générale, etc. de ces surfaces.

Ces recherches furent commencées par A. Parent, puis, d'une façon plus systématique, par A. Clairaut (*Recherches sur les courbes à double courbure*, 1731). Euler étudia, pour sa part, les surfaces du deuxième ordre, qu'on nomme des *quadriques*, définies par une équation du deuxième degré.

Systématisation.

Les derniers progrès furent accomplis par Lagrange (1773) et par Monge (1795-1802). Lagrange a montré combien était grande l'importance des éléments linéaires (droite et plan) représentés par des équations du premier degré, et il a perfectionné le symbolisme.

Monge a repris ce point de vue, en étudiant les changements de systèmes de coordonnées par des transformations linéaires, et les *familles* de droites et de plans (étudiées à l'aide d'équations paramétriques).

XIXe et XXe siècles.

La géométrie plückerienne.

Au XIXe siècle, la géométrie analytique bénéficie du progrès de l'analyse, de la théorie des groupes et du développement de la géométrie projective. Elle subit alors des transformations profondes qui contribuent à l'algébriser davantage et qui débouchent sur la *géométrie algébrique* moderne.

Les mathématiciens allemands élargissent le concept de *coordonnée* et créent une nouvelle méthode de calcul. L'un des problèmes les plus embarrassants pour les géomètres de cette époque était en effet la lourdeur des calculs analytiques, et en particulier les difficultés provenant des techniques d'élimination. C'est J. Plücker qui trouva une solution élégante à ce problème, à partir de 1828, en introduisant la notion de *coordonnées homogènes* (voir p. 150). Le même géomètre systématisa l'étude des courbes algébriques : étude des points doubles, des points de rebroussement, des points d'inflexion, des éléments imaginaires et des éléments à l'infini.

La méthode de Plücker fut généralisée par les algébristes du XIXe siècle qui utilisèrent les ressources de l'algèbre linéaire : O. Hesse (1861-1865) et Cayley en particulier. Parallèlement aux travaux de Plücker, Möbius introduit les *coordonnées barycentriques* (1827).

Théorie des courbes et des surfaces.

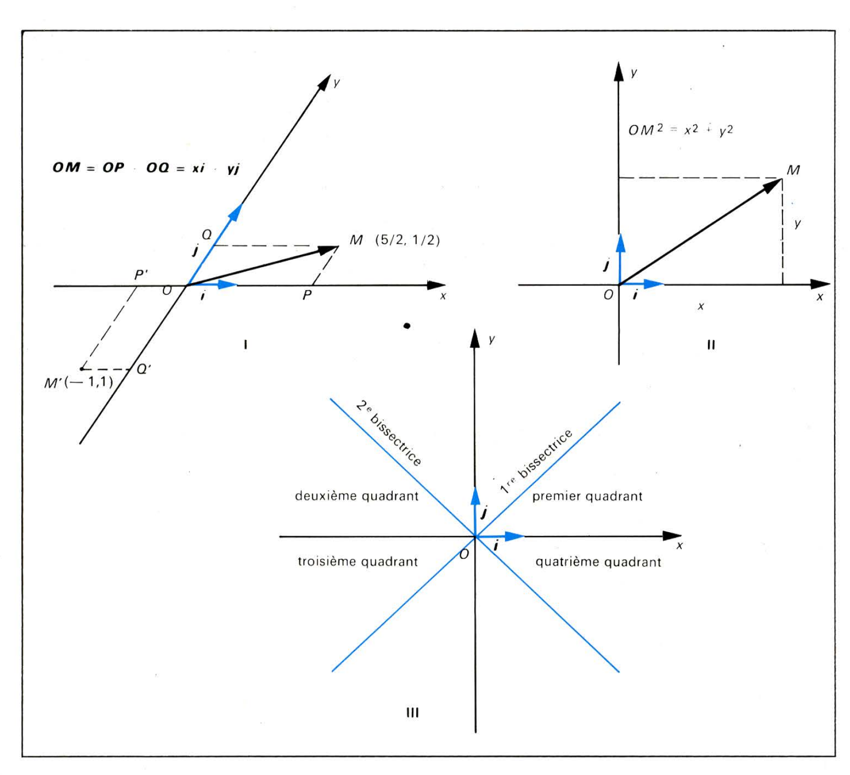
Avec ces méthodes, la théorie des courbes et des surfaces fit de nouveaux progrès : les surfaces du deuxième ordre (quadriques) sont étudiées par Cauchy, Magnus, Plücker et Hesse ; les surfaces du troisième ordre par Cayley, Salmon, Clebsch, Cremona, Jordan, Felix Klein, Brioschi, Sturm, etc. ; les surfaces du quatrième ordre par Steiner, Dupin, Kummer, Weddle ; ec.

En 1865, Plücker introduit une nouvelle méthode pour caractériser une droite (à l'aide de six coordonnées homogènes, composantes d'un vecteur porté par la droite et du moment de ce vecteur par rapport à l'origine). Cette innovation permet le développement élégant de la *géométrie réglée* (une surface réglée est une surface sur laquelle on peut toujours appliquer une droite : par exemple une surface cylindrique peut être considérée comme engendrée par une droite s'appuyant sur un cercle).

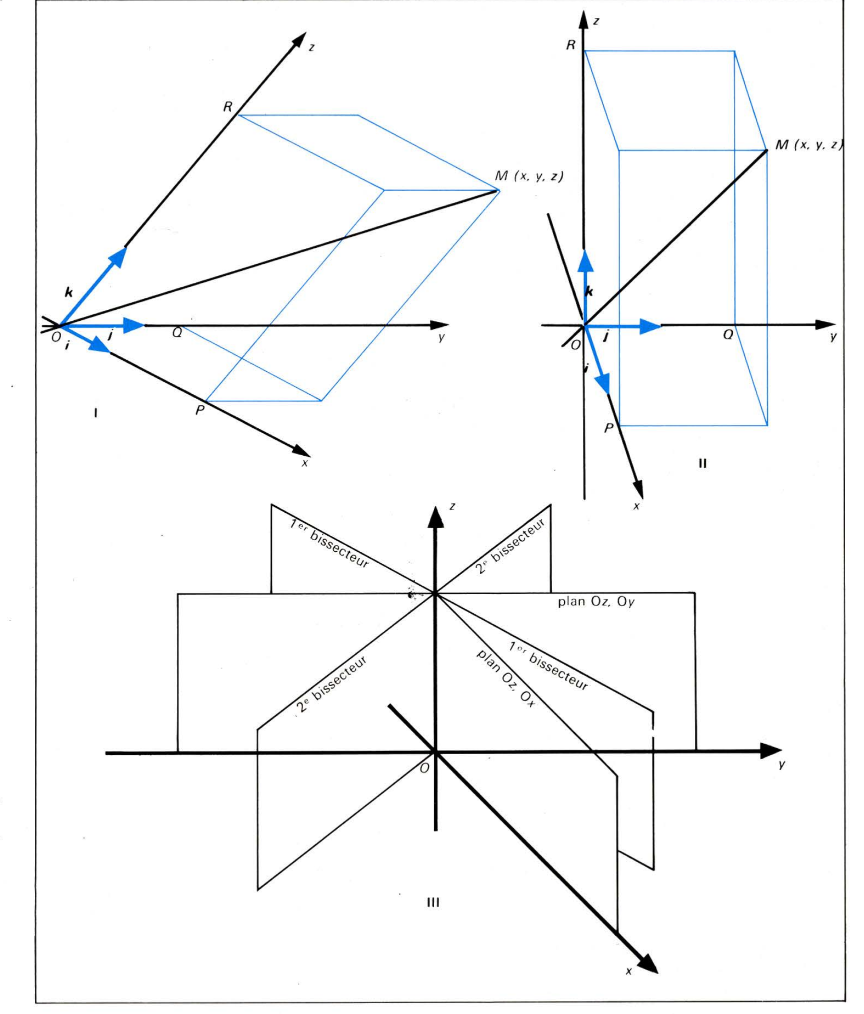
Le XIXe siècle est aussi le siècle de l'apparition des géométries à n dimensions. Cayley introduit, en 1843, le concept de *variété à n dimensions* et Riemann reprend, en le généralisant, ce concept dans un mémoire célèbre (*Sur les hypothèses qui servent de fondements à la géométrie*, 1854). La géométrie analytique à n dimensions a été exploitée par Klein, Helmholz, Lipschitz, etc.

Au XXe siècle.

Au XXe siècle, la géométrie analytique se confond, dans ses lignes essentielles, avec la géométrie différentielle, la géométrie infinitésimale et la géométrie algébrique.



Repère cartésien dans le plan.
I - Repère affine : $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont quelconques ; les unités sur les axes sont différentes.
II - Repère orthonormé (euclidien) : le parallélogramme de la figure I est devenu un rectangle et l'on peut appliquer le théorème de Pythagore : $OM^2 = x^2 + y^2$.
III - Repère orthonormé (euclidien) : le plan est divisé en quatre quadrants ; on a indiqué leur numérotation traditionnelle et les bissectrices des axes.



Repère cartésien dans l'espace.
I - Repère affine.
II - Repère orthonormé.
III - Repère orthonormé (mise en évidence des bissecteurs).

COORDONNÉES D'UN POINT.

Nous avons, à plusieurs reprises, insisté sur le *repérage* d'un point sur une droite, dans le plan ou dans l'espace, ce qui nous a conduit à associer à chaque point un, deux ou trois nombres réels, appelés les *composantes* (ou *coordonnées*) du *vecteur* correspondant à ce point.

L'essence de la géométrie analytique consiste à *opérer sur ces nombres*, alors que la géométrie « ordinaire » étudie les figures auxquelles ces points appartiennent. Il est bien évident que les coordonnées d'un point peuvent être déterminées par n'importe quelle convention en accord avec les lois de la géométrie dans laquelle on se place et qu'elles seront toujours au nombre de deux si l'on fait de la géométrie euclidienne plane, au nombre de trois si l'on fait de la géométrie euclidienne dans l'espace, le choix des conventions dépendant de la nature du problème posé. Un géographe qui veut repérer un point à la surface de la Terre utilise deux coordonnées, qui sont la latitude et la longitude du lieu ; un enfant qui joue à la « bataille navale » caractérise la position d'une case par l'indication, dans cet ordre, de la ligne et de la colonne auxquelles elle appartient, etc. En géométrie analytique on a été ainsi amené à définir divers *systèmes de coordonnées*, utilisés selon les propriétés que l'on veut mettre en évidence.

Repère cartésien.

Repère cartésien dans le plan.

Nous le connaissons déjà (voir figures de la page ci-contre) : il est constitué par deux droites distinctes qui se coupent en un point O, dont chacune est dotée d'un *vecteur unitaire* indiquant à la fois le *sens positif* choisi sur la droite (qui est donc un *axe*) et l'*unité de longueur* sur cet axe. On a coutume de désigner les deux axes de la manière suivante :

— axe Ox, ou *axe des abscisses*, de vecteur unitaire $\boldsymbol{i}$;

— axe Oy, ou *axe des ordonnées*, de vecteur unitaire $\boldsymbol{j}$;

($\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ constituent une *base* pour tous les vecteurs du plan considéré.)

A un point M quelconque du plan on peut associer le vecteur géométrique $\boldsymbol{OM}$. Il se décompose (voir p. 96) en menant par M des parallèles aux axes, ce qui donne deux vecteurs, $\boldsymbol{OP}$ et $\boldsymbol{OQ}$, tels que

$$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OP} + \boldsymbol{OQ} = x\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}, \quad (1)$$

avec

$$\begin{cases} x = \overline{OP} = \text{abscisse de } M, \\ y = \overline{OQ} = \text{ordonnée de } M. \end{cases} \quad (2)$$

Les nombres réels x et y sont les *coordonnées cartésiennes* du point M ; selon la position de ce point dans le plan, ils sont positifs ou négatifs (et nuls si M est confondu avec l'origine O). Pour désigner un point M en géométrie analytique plane, on écrira donc $M(x, y)$, comme on l'a fait sur la figure de la page ci-contre, en convenant de nommer *d'abord* l'abscisse, *ensuite* l'ordonnée.

Ce repère est appelé *repère affine*, la base ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$) étant quelconque. On l'utilise pour l'étude des *propriétés affines* des figures (voir pp. 99-101), c'est-à-dire celles qui ne font pas intervenir les notions d'*angle* et de *distance*. Lorsqu'on doit étudier des propriétés *métriques* (c'est-à-dire faisant intervenir des angles ou des distances), on choisit une base composée de deux vecteurs $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ de même grandeur (même *norme*) et orthogonaux. Une telle base est dite *orthonormée* et le repère est dit (par abus de langage) *orthonormé*, ou *euclidien*. On conviendra en outre, dans tous les cas, que le sens positif des rotations dans le plan se fait de Ox vers Oy (on dispose les axes de sorte que ce sens soit l'inverse de celui des aiguilles d'une montre).

Repère cartésien dans l'espace.

Choisissons un point O, origine, et trois vecteurs unitaires, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{k}$, linéairement indépendants (voir figure à la page ci-contre) ; les axes Ox, Oy et Oz, issus de O, parallèles à ces vecteurs et orientés par eux, forment un *trièdre de référence*. Le vecteur $\boldsymbol{OM}$ associé à un point M quelconque se décompose en trois vecteurs, $\boldsymbol{OP}$, $\boldsymbol{OQ}$ et $\boldsymbol{OR}$, qui sont les arêtes d'un *parallélépipède*, et l'on a :

$$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OP} + \boldsymbol{OQ} + \boldsymbol{OR} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \quad (3)$$

avec

$$\begin{cases} x = \overline{OP} = \textit{abscisse} \text{ du point } M, \\ y = \overline{OQ} = \textit{ordonnée} \text{ du point } M, \\ z = \overline{OR} = \textit{cote} \text{ du point } M. \end{cases} \quad (4)$$

Les nombres réels x, y et z sont les *coordonnées cartésiennes* du point M dans l'espace. On convient le plus souvent de regarder le plan xOy comme horizontal, Oz étant *au-dessus* de ce plan. Le trièdre Ox, Oy, Oz est alors un *trièdre direct*.

Si $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{k}$ sont quelconques, le repère est *affine*. Si l'on veut étudier les propriétés métriques des figures, on choisit $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{k}$ de sorte qu'ils soient égaux en longueur et deux à deux orthogonaux ; le repère est alors dit *euclidien* (ou *orthonormé*).

Quelques propriétés élémentaires du point.

La géométrie analytique exprime les propriétés d'un point (situation, distance, etc.) par des relations entre ses coordonnées. Voici quelques propriétés élémentaires que le lecteur vérifiera aisément en faisant les figures correspondantes. On choisira un repère cartésien affine s'il ne s'agit pas de propriétés métriques, et un repère orthonormé s'il s'agit de propriétés métriques.

Situation du point M	Traduction analytique dans le plan xOy $M(x, y)$	Traduction analytique dans l'espace Oxyz $M(x, y, z)$
Le point M est confondu avec l'origine.	$x = y = 0$	$x = y = z = 0$
Le point M est sur l'axe Ox.	$y = 0$	$y = z = 0$
Le point M est sur l'axe Oy.	$x = 0$	$x = z = 0$
Le point M est sur l'axe Oz.	—	$x = y = 0$
Le point M est dans le plan xOy.	—	$z = 0$
Le point M est dans le plan xOz.	—	$y = 0$
Le point M est dans le plan yOz.	—	$x = 0$
En géométrie dans l'espace : Le point M est dans le premier bissecteur.	—	$x = y$ (z quelconque)
Le point M est dans le deuxième bissecteur.	—	$x = -y$ (z quelconque).

Étant donné deux points, $A(x_1, y_1, z_1)$ et $B(x_2, y_2, z_2)$, la définition de la somme vectorielle permet d'écrire :

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{OB} - \boldsymbol{OA}, \quad (5)$$

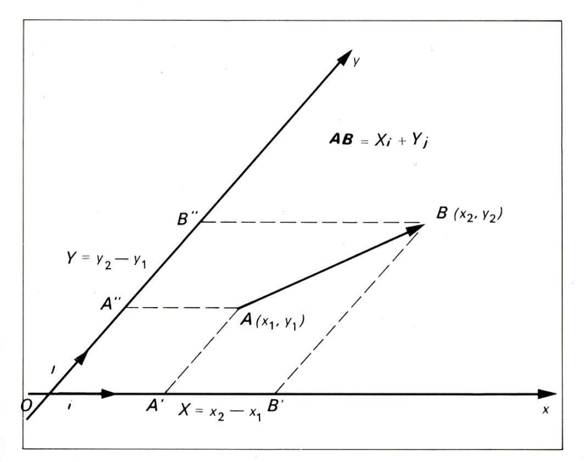
d'où, en projetant cette relation sur les axes, les composantes, X, Y et Z, du vecteur $\boldsymbol{AB}$:

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1 \quad (6)$$

et

$$\boldsymbol{AB} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}\ ; \quad (7)$$

(dans le plan, $Z = 0$).



Composantes d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ (dans le plan). Les composantes X et Y sont des nombres algébriques qui mesurent respectivement les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A''B''}$ sur les axes Ox et Oy. Si le point A était confondu avec l'origine, les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ seraient les coordonnées du point B dans le repère considéré.

Coordonnées polaires (dans le plan).

Définition.

Soit un point O, appelé *pôle*, et un axe *orienté* $x'Ox$, appelé *axe polaire* ; supposons choisi un sens positif des rotations dans le plan. Considérons un point M et orientons arbitrairement la droite OM ; soit Ou l'axe obtenu. Le point M est déterminé si l'on se donne :

— la valeur, θ, de l'angle (Ox, Ou),

— la valeur algébrique, r, du segment OM.

Les nombres r et θ sont les *coordonnées polaires* du point M ; r s'appelle le *rayon vecteur*, θ l'*angle polaire*, et l'on a

$$\boldsymbol{OM} = r\boldsymbol{u}, \quad (1)$$

$\boldsymbol{u}$ étant le vecteur unitaire de l'axe Ou.

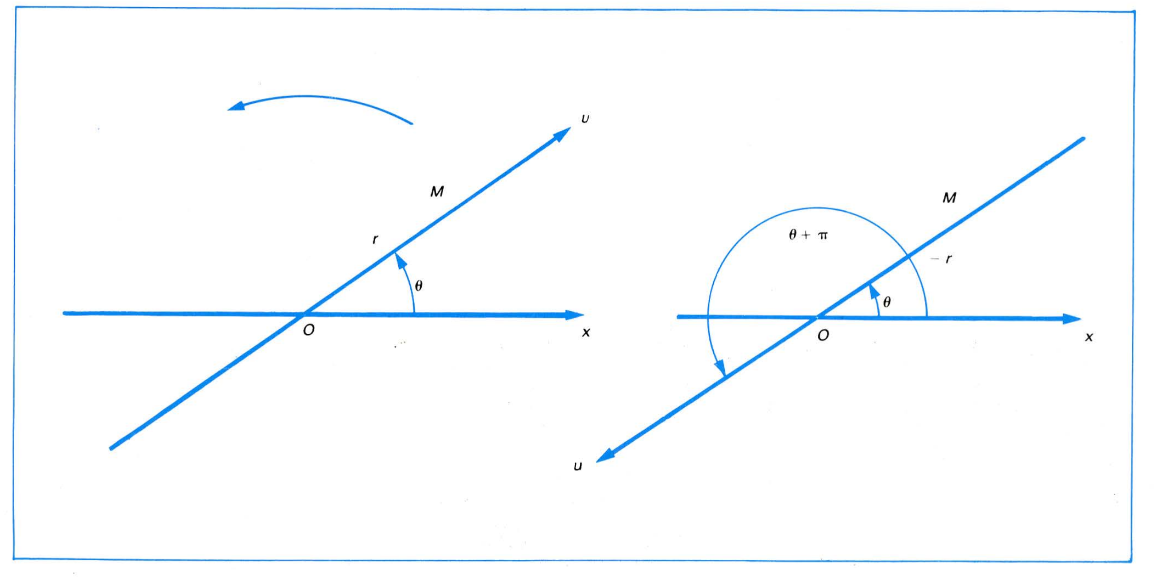
Inconvénient des coordonnées polaires.

A tout couple (r, θ) correspond un point M et un seul ; par contre, à un point M correspondent une infinité de coordonnées polaires, comme l'explique la figure ci-dessous.

Un point M possède une infinité de coordonnées polaires.

I - $\overrightarrow{OM} = r$ est positif ; $\overrightarrow{Ox}$ s'applique sur $\overrightarrow{Ou}$ par rotation d'angle θ, ou $\theta + 2\pi$, ou, d'une manière générale, $\theta + 2k\pi$.

II - $\overrightarrow{OM} = r$ est négatif ; $\overrightarrow{Ox}$ s'applique sur $\overrightarrow{Ou}$ par rotation de $\theta + \pi$, ou $\theta + 3\pi$, ou, d'une manière générale, $\theta + (2k + 1)\pi$.



Toutes les coordonnées du point M sont donc englobées dans les deux expressions suivantes :

$$\theta + n\pi \quad \text{et} \quad (-1)^n r. \tag{2}$$

Si n est pair, $(-1)^n$ est égal à $+1$ et l'on se trouve dans le premier cas de figure ; si n est impair, $(-1)^n = -1$, il faut changer r en $-r$ et l'on se trouve dans le second cas.

Ainsi donc, il n'y a pas un seul couple (r, θ) pour un point M, mais une infinité de couples possibles : la correspondance entre les points du plan et les coordonnées polaires n'est donc pas *biunivoque*.

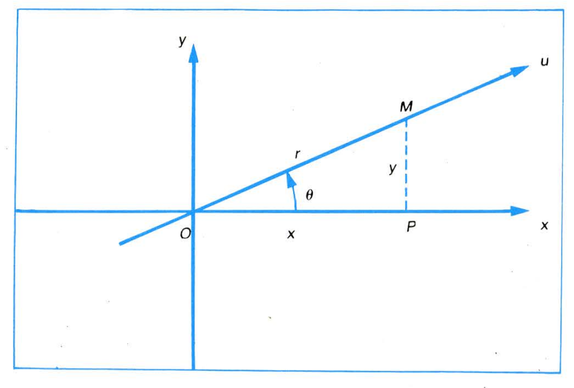
Relations entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes.

Associons à l'axe Ox un axe Oy perpendiculaire à Ox, tel que le repère Oxy soit orthonormé. On a immédiatement, dans le triangle rectangle OPM (voir p. 90),

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \,; \\ y = r\sin\theta . \end{cases} \tag{3}$$

et :

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \text{ (théorème de Pythagore) ;} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r},\ \sin\theta = \dfrac{y}{r},\ \text{(d'où } \theta\text{)}. \end{cases} \tag{4}$$



Passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes, et réciproquement.

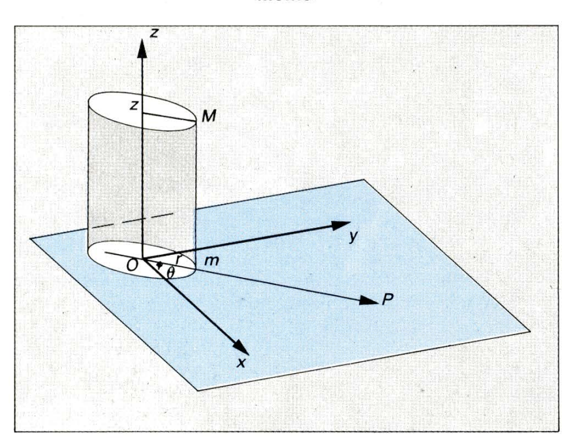
● *Remarque* : Le passage des coordonnées polaires (r, θ) aux coordonnées cartésiennes (x, y) est immédiat ; le passage inverse est plus délicat. En effet, l'angle θ est déterminé *modulo* 2π, ce qui impose de le définir *à la fois* par son cosinus et par son sinus (voir p. 90).

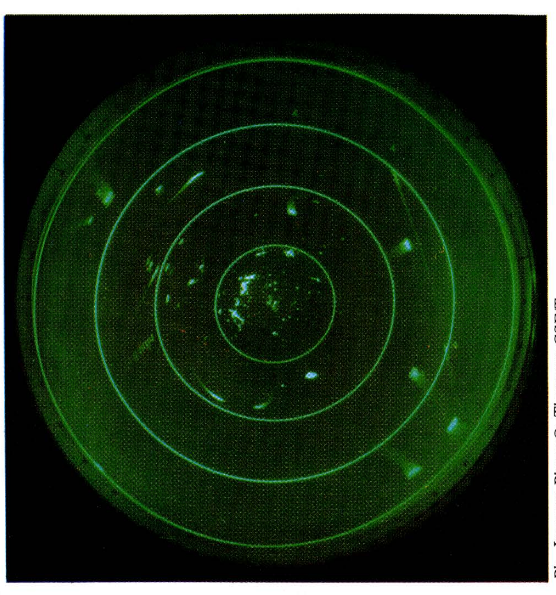
Autres systèmes de coordonnées.

Coordonnées cylindriques (ou semi-polaires).

Considérons dans l'espace un repère orthonormé $Oxyz$ et un point M, de cote z, qui se projette en m sur le plan xOy. Appelons (r, θ) les coordonnées polaires de m par rapport au système de pôle O et d'axe polaire Ox ; les trois nombres r, θ, z sont les *coordonnées cylindriques* du point M.

Coordonnées cylindriques.
Ce système tire son nom du fait que la seconde coordonnée (r) de tous les points situés sur la surface cylindrique de révolution d'axe Oz et de rayon r est la même.





La position d'un point sur cet « écran radar » est définie par ses coordonnées polaires, dans un système dont l'origine est le centre de l'écran.

Coordonnées sphériques.

On peut aussi déterminer le point M de l'espace en associant à chaque point M une sphère de rayon $OM = R$ sur laquelle on se donne un grand cercle et un demi grand cercle perpendiculaires : l'*équateur* et le *méridien origine*. La position de M est définie par les nombres θ, γ, R, qui désignent respectivement la *longitude* (θ), la *colatitude* (γ) et le rayon (R) de la sphère.

La longitude se mesure à partir du méridien origine, sur lequel on a choisi un sens de parcours ; la colatitude est le complément à 90° de la latitude, λ, du point, mesurée à partir de l'équateur. Sur la figure ci-dessous, où les deux grands cercles origines ont été tracés en bleu, on a :

$$\begin{cases} \text{longitude} = \theta = \text{arc } \widehat{mM} \\ \text{colatitude} = \gamma = \dfrac{\pi}{2} - \lambda \,. \end{cases} \tag{1}$$

On peut associer à la sphère un trièdre euclidien ; les coordonnées du point M dans ce repère sont (x, y, z) ; les coordonnées sphériques sont reliées aux coordonnées cartésiennes par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x = R\sin\gamma\cos\theta \,, \\ y = R\sin\gamma\sin\theta \,, \\ z = R\cos\gamma \end{cases} \tag{2}$$

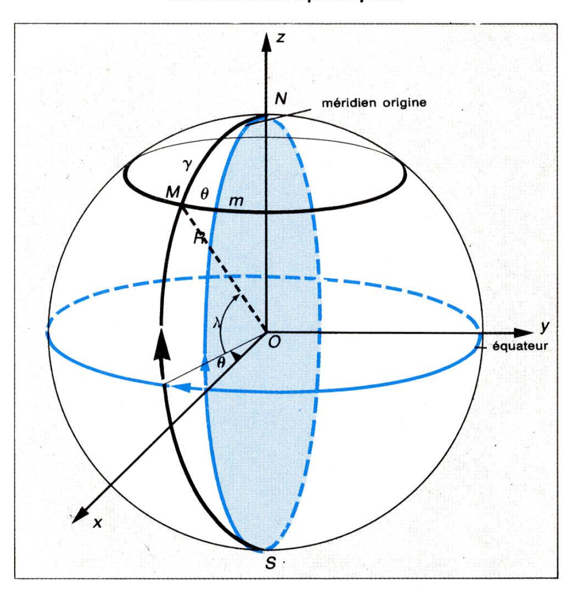
et

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{3}$$

Coordonnées barycentriques.

Le lecteur est prié de revoir la définition du *barycentre* d'un système de points p. 82.

Coordonnées sphériques.



Choisissons trois points fixes, A_1, A_2 et A_3, dans le plan, et considérons un point M quelconque du plan. Il est toujours possible de trouver trois nombres, x_1, x_2 et x_3, tels que, quel que soit le point O choisi dans le plan, on ait

$$\boldsymbol{OM} = \frac{x_1\boldsymbol{OA}_1 + x_2\boldsymbol{OA}_2 + x_3\boldsymbol{OA}_3}{x_1 + x_2 + x_3}\,, \tag{4}$$

c'est-à-dire tels que M soit le barycentre des points A_1, A_2 et A_3 affectés des coefficients x_1, x_2 et x_3.

Inversement, étant donné trois nombres x_1, x_2 et x_3, il leur correspond un point M et un seul tel que l'égalité précédente soit vérifiée. Ces trois nombres sont appelés les *coordonnées barycentriques* du point M.

Comme le barycentre d'un système de points affectés de coefficients x_1, x_2, ... ne change pas si ces coefficients sont multipliés par un même nombre $k \neq 0$, les coordonnées barycentriques d'un point M sont définies à un facteur k près : on exprime cela en disant qu'elles sont *homogènes*.

On définit de façon analogue, avec quatre points, A_1, A_2, A_3 et A_4, les coordonnées barycentriques d'un point dans l'espace.

PROBLÈMES FONDAMENTAUX EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Dans ce qui précède, nous avons appris à traduire par ses coordonnées la situation d'un point M dans le plan ou dans l'espace. Pour que la géométrie analytique soit un instrument commode, il faut que nous apprenions à traduire algébriquement les notions fondamentales suivantes :

— le produit scalaire de deux vecteurs ;
— le produit vectoriel de deux vecteurs ;
— la mesure des distances, des aires et des volumes ;
— la définition d'une direction et de l'angle de deux directions (orientées ou non).

Ces opérations fondamentales sont un *encodage* : il s'agit d'établir des formules qui soient toujours valables et qui remplacent avantageusement et d'une façon très générale les raisonnements géométriques. Bien entendu, les mathématiciens ne se servent de la géométrie analytique que dans les cas où le calcul donne des résultats plus rapides que la considération des figures : pour déterminer la médiatrice d'un segment, il est préférable d'utiliser — rapidement — la construction géométrique élémentaire plutôt que d'écrire une équation ; mais, en général, pour rechercher un « lieu géométrique », il sera plus opportun — et plus systématique — d'employer la géométrie analytique.

Expression du produit scalaire de deux vecteurs.

Repère euclidien.

Le produit scalaire faisant intervenir une propriété métrique (l'angle des deux vecteurs), nous avons intérêt à nous placer dans un repère euclidien (c'est-à-dire orthonormé).

Appelons X, Y, Z les composantes d'un vecteur $\boldsymbol{V}$ et X', Y', Z' les composantes d'un vecteur $\boldsymbol{V}'$. On a

$$\boldsymbol{V} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k} \tag{1}$$

et

$$\boldsymbol{V}' = X'\boldsymbol{i} + Y'\boldsymbol{j} + Z'\boldsymbol{k}\,. \tag{2}$$

Le produit scalaire $\boldsymbol{V}\,.\,\boldsymbol{V}'$ s'écrit donc :

$$\boldsymbol{V}\,.\,\boldsymbol{V}' = (X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k})\,.\,(X'\boldsymbol{i} + Y'\boldsymbol{j} + Z'\boldsymbol{k})\,. \tag{3}$$

En effectuant ce produit, on va trouver :
— d'une part, des termes comme :

$$XX'\,\boldsymbol{i}\,.\,\boldsymbol{i} = XX'\,\boldsymbol{i}^2\,; \tag{4}$$

mais, du fait que $\boldsymbol{i}^2 = 1$ (le module de $\boldsymbol{i}$ est égal à 1) :

$$XX'\,\boldsymbol{i}^2 = XX'\,; \tag{5}$$

— d'autre part, des termes comme :

$$X\boldsymbol{i}\,.\,Y'\boldsymbol{j} = XY'\boldsymbol{i}\,.\,\boldsymbol{j}\,; \tag{6}$$

mais $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ étant des vecteurs orthogonaux (ils orientent les axes rectangulaires Ox et Oy), leur produit scalaire est nul, donc :

$$X\boldsymbol{i}\,.\,Y'\boldsymbol{j} = 0\,. \tag{7}$$

Ainsi, en développant les calculs, on obtiendra comme expression du produit scalaire :

$$\boldsymbol{V}\,.\,\boldsymbol{V}' = XX' + YY' + ZZ'\,. \tag{8}$$

Dans un repère affine (coordonnées obliques), les produits $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j}$, etc., ne sont pas nuls, puisque les axes ne sont pas rectangulaires ; l'expression du produit scalaire ferait alors intervenir les *angles* des axes de coordonnées et serait plus compliquée.

Applications.

Nous pouvons, dès maintenant, « encoder » quelques énoncés géométriques, en traduisant algébriquement les propriétés du produit scalaire. Nous choisirons un repère euclidien, puisqu'il s'agit de géométrie métrique.

Relations géométriques	Traduction analytique
Grandeur géométrique du vecteur **V**.	$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V} = \lvert \boldsymbol{V}^2 \rvert = X^2 + Y^2 + Z^2$, puisque $X = X'$, $Y = Y'$, $Z = Z'$; donc $\lVert \boldsymbol{V} \rVert = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$.
Le vecteur **V** est orthogonal au vecteur **V'**.	$XX' + YY' + ZZ' = 0$. (L'orthogonalité des deux vecteurs entraîne la nullité du produit scalaire).
Angle θ de deux demi-droites parallèles aux vecteurs **V** et **V'** et de même sens qu'eux.	$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V'} = XX' + YY' + ZZ'$; mais, d'après la définition du produit scalaire, on a aussi $\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V'} = \lVert \boldsymbol{V} \rVert \cdot \lVert \boldsymbol{V'} \rVert \cdot \cos \theta$, d'où $\cos \theta = \dfrac{\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V'}}{\lVert \boldsymbol{V} \rVert \cdot \lVert \boldsymbol{V'} \rVert}$ avec $\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V'} = XX' + YY' + ZZ'$, $\lVert \boldsymbol{V} \rVert = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ et $\lVert \boldsymbol{V'} \rVert = \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}$

Traduction analytique de quelques relations géométriques

Expression du produit vectoriel.

Composantes du produit vectoriel.

(Si le lecteur a oublié ce qu'est le produit vectoriel, qu'il se reporte à la p. 87).

Soient les vecteurs **V** et **V'**, de composantes (X, Y, Z) et (X', Y', Z'). En procédant, comme pour le produit scalaire, dans un repère euclidien, on démontre que les composantes λ, μ et ν, du produit vectoriel $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V'}$ sont :

$$\lambda = YZ' - ZY', \quad \mu = ZX' - XZ', \quad \nu = XY' - YX', \tag{1}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V'} = \lambda \boldsymbol{i} + \mu \boldsymbol{j} + \nu \boldsymbol{k} \tag{2}$$

et

$$-\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V'} \times \boldsymbol{V} = -\lambda \boldsymbol{i} - \mu \boldsymbol{j} - \nu \boldsymbol{k}. \tag{3}$$

Utilisation des déterminants.

Nous avons défini, p. 59, les règles du *calcul des déterminants*. Rappelons qu'un déterminant D comprenant quatre termes écrits de la sorte :

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \tag{4}$$

est un nombre réel qui se calcule selon la règle $D = ad - bc$.

Or les composantes λ, μ et ν du produit vectoriel peuvent s'écrire précisément sous cette forme :

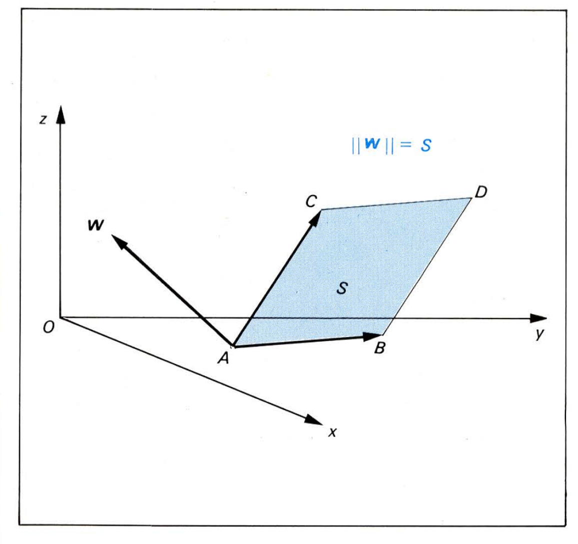
$$\lambda = \begin{vmatrix} Y & Z \\ Y' & Z' \end{vmatrix} = D_x, \quad \mu = \begin{vmatrix} Z & X \\ Z' & X' \end{vmatrix} = D_y, \quad \nu = \begin{vmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{vmatrix} = D_z. \tag{5}$$

(Noter que λ, composante selon Ox, ne contient ni X, ni X' ; μ, composante selon Oy, ne contient ni Y, ni Y' ; ν, composante selon Oz, ne contient ni Z, ni Z').

Calcul d'aires.

● *Aire du parallélogramme.* Soit un parallélogramme *ABCD*, dont les sommets sont dans cet ordre (voir figure). Nous avons vu, p. 87, que le produit vectoriel $\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC}$ est un vecteur **W** dont la norme est égale à l'aire S du parallélogramme ABCD ; on a donc :

$$\lVert \boldsymbol{W} \rVert = S. \tag{6}$$



L'aire du parallélogramme est égale à la norme du produit vectoriel.

Pour exprimer analytiquement l'aire de ce parallélogramme à partir des coordonnées (x_1, y_1, z_1) du point A, des coordonnées (x_2, y_2, z_2) du point B et des coordonnées (x_3, y_3, z_3) du point C, on procède comme suit :

1 - On détermine les composantes, X, Y et Z, X', Y' et Z', des vecteurs **AB** et **AC** ; on trouve :

$$\text{composantes de } \boldsymbol{AB} : \begin{cases} X = x_2 - x_1, \\ Y = y_2 - y_1, \\ Z = z_2 - z_1, \end{cases} \tag{7}$$

$$\text{composantes de } \boldsymbol{AC} : \begin{cases} X' = x_3 - x_1, \\ Y' = y_3 - y_1, \\ Z' = z_3 - z_1. \end{cases} \tag{8}$$

2 - On calcule les composantes, λ, μ, ν, du produit vectoriel $\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC}$ à l'aide des formules (1) du paragraphe **B**, *a*).

3 - L'aire du parallélogramme *ABCD* est

$$S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}. \tag{9}$$

● *Aire du triangle ABC.* Un triangle est la moitié d'un parallélogramme ; par conséquent, avec la notation précédente, l'aire cherchée serait :

$$\text{aire du triangle } ABC = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}{2}. \tag{10}$$

Volume du parallélépipède.

Considérons dans l'espace trois vecteurs, **OA**, **OB** et **OC**, pris *dans cet ordre.* La valeur arithmétique du volume du parallélépipède construit sur ces trois vecteurs est égale au produit de la base par la hauteur. Or nous venons de voir que l'aire de la base est égale à la norme du produit vectoriel $\boldsymbol{OB} \times \boldsymbol{OC}$. Quant à la hauteur du parallélépipède, elle est la projection de **OA** sur la perpendiculaire au plan *OBC*, c'est-à-dire sur la droite qui porte le produit vectoriel $\boldsymbol{OB} \times \boldsymbol{OC}$. Donc, en appelant θ l'angle que fait ce produit vectoriel avec **OA** :

$$\text{Hauteur} = \lVert \boldsymbol{OA} \rVert \cos \theta. \tag{11}$$

Le volume cherché est donc, en valeur absolue, le produit suivant (en appelant **W** le produit vectoriel $\boldsymbol{OB} \times \boldsymbol{OC}$) :

$$\text{Volume du parallélépipède} = \lVert \boldsymbol{W} \rVert \lVert \boldsymbol{OA} \rVert \cos \theta,$$

c'est-à-dire que le volume du parallélépipède est égal à la valeur absolue du produit scalaire :

$$\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{OA} = \boldsymbol{OA} \cdot (\boldsymbol{OB} \times \boldsymbol{OC}). \tag{12}$$

Si l'on appelle

a, a', a'' les composantes de **OA**,
b, b', b'' les composantes de **OB**,
c, c', c'' les composantes de **OC**,

le volume cherché a pour valeur absolue

$$\lvert a(b'\,c'' - c'\,b'') + a'(b''\,c - c''\,b) + a''(bc' - cb') \rvert. \tag{13}$$

Si l'on supprime le symbole « valeur absolue », c'est-à-dire si l'on considère l'expression précédente *avec son signe*, elle représente, par définition, la *valeur algébrique du volume du parallélépipède.* On désigne souvent ce volume algébrique sous la forme (**OA . OB . OC**), les vecteurs étant pris dans cet ordre (à cause de la non-commutativité du produit vectoriel). On remarque que (**OA . OB . OC**) est égal au déterminant dont les lignes contiennent les composantes de **OA**, **OB** et **OC**.

Mesure des angles.

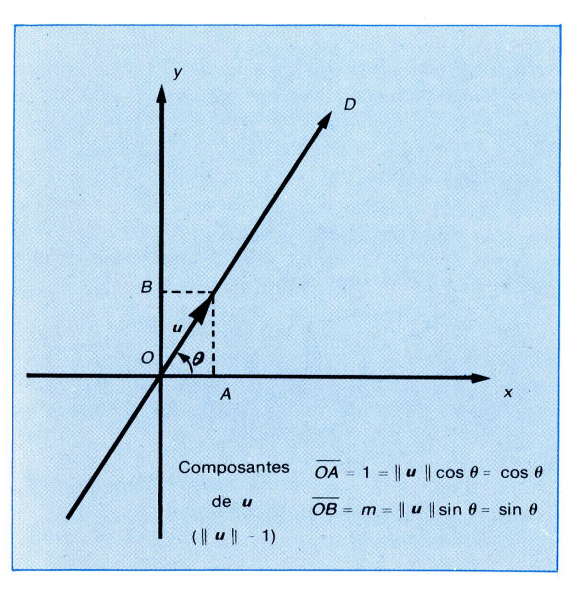
Détermination d'une direction.

Pour connaître la direction d'une droite D, il suffit de connaître les composantes, a, b et c, d'un vecteur **V** quelconque porté par cette droite. Comme la *direction* est une propriété affine, on prendra un repère affine. Les nombres a, b et c constituent les *paramètres directeurs* de la direction D ; un autre vecteur **V'** de D aurait pour composantes a', b', c', telles que :

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \tag{1}$$

et (a', b', c') est aussi un système de paramètres directeurs de D.

Quand D est orientée, on choisit de préférence le *vecteur unitaire* de $\vec{D}$ pour caractériser la direction en cause. Dans un repère euclidien, les composantes (l, m, n) de ce vecteur ne sont autres que les cosinus des angles que fait la droite $\vec{D}$ avec les axes (voir figure ci-après).



Cosinus directeur d'une droite dans le plan (repère euclidien). Les composantes $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$ se calculent immédiatement à partir de la définition des lignes trigonométriques, en tenant compte de ce que

$$(\vec{Oy}, \vec{D}) = -\frac{\pi}{2} + (\vec{Ox}, \vec{D}) = -\frac{\pi}{2} + \theta.$$

Dans un système euclidien $Oxyz$, on aurait :

$$l = \cos(\vec{Ox}, \vec{D}), \quad m = \cos(\vec{Oy}, \vec{D}) \quad \text{et} \quad n = \cos(\vec{Oz}, \vec{D}).$$

Dans le plan, compte tenu de la relation

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta, \tag{2}$$

les paramètres directeurs de $\vec{D}$ sont $\cos \theta$ et $\sin \theta$ (figure ci-dessus).

Angle de deux directions.

● *Les deux directions sont orientées.* Nous choisissons un *repère euclidien*, puisqu'il s'agit de géométrie métrique. Soient $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ deux droites orientées par les vecteurs unitaires **u** et **u'**, de composantes (l, m, n) et (l', m', n'). Comme nous ne nous intéressons qu'à la direction de ces droites (et non pas à leur position dans l'espace), nous pouvons supposer

qu'elles passent toutes deux par l'origine O (sinon, on mènerait par O deux parallèles à ces directions et l'on raisonnerait sur ces deux parallèles). Le produit scalaire $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ est égal, par définition, à :

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| \cos(\vec{D}, \vec{D'}) = 1 \times 1 \times \cos\theta = \cos\theta$$

et, d'autre part (voir ci-dessus),

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = ll' + mm' + nn' ; \qquad (3)$$

donc :

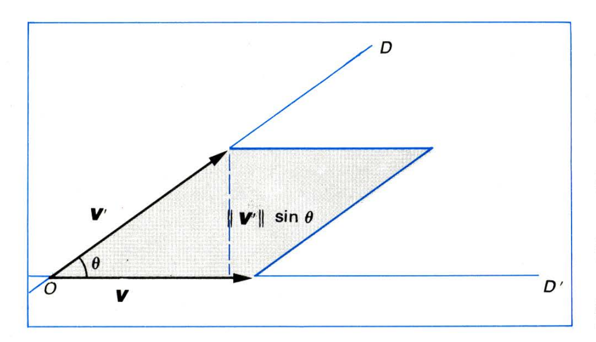
$$\cos\theta = ll' + mm' + nn', \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi .$$

Si θ était supérieur à π, on calculerait $\cos(\vec{D'}, \vec{D})$ au lieu de $\cos(\vec{D}, \vec{D'})$, puisque $\cos(\vec{D'}, \vec{D}) = \cos(\vec{D}, \vec{D'})$.

● *Les directions ne sont pas orientées.* Par définition, l'angle de deux droites non orientées est l'un quelconque des angles θ ou $\pi - \theta$ (voir p. 90). Or on montre, en trigonométrie, que :

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \quad \text{et} \quad \sin(\pi - \theta) = \sin\theta .$$

Il est donc préférable, dans le cas de droites non orientées, de définir θ par son sinus, en utilisant le produit vectoriel, $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V'}$, de deux vecteurs quelconques appartenant aux droites D et D' et de composantes respectives (a, b, c) et (a', b', c'). On a, en effet, en appelant S l'aire du parallélogramme construit sur $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{V'}$:



***Angle de deux droites non orientées** D **et** D'.*

$$S = \|\boldsymbol{W}\| = \|\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V'}\| = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}, \qquad (4)$$

et :

$$S = \text{base} \times \text{hauteur} = \|\boldsymbol{V}\| \|\boldsymbol{V'}\| \sin\theta, \qquad (5)$$

d'où

$$\sin\theta = \frac{\|\boldsymbol{W}\|}{\|\boldsymbol{V}\| \|\boldsymbol{V'}\|}$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} . \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} . \qquad (6)$$



Antoine Pevsner (1884-1962) : Construction de surface développable (1938.) : l'objet du mathématicien devient objet d'art. (Pevsner est à l'origine du mouvement plastique appelé constructivisme.)

Coll. Particulière, Bâle. Ph. © Editions Skira, Genève. D.R./T.

Changement de repère.

Le problème.

Ce qui précède laisse entrevoir au lecteur l'intérêt de la géométrie analytique. Schématiquement, un problème de géométrie consiste à déterminer certains points, ou certains ensembles de points, à partir de données concernant d'autres points ou d'autres ensembles de points. Pour le résoudre analytiquement, on cherche à établir des équations dans lesquelles les coefficients (nombres connus) sont les coordonnées des points connus, et dont les inconnues sont les coordonnées du (ou des) points à déterminer. Les calculs précédents montrent comment on exprime facilement les angles et les distances à l'aide des coordonnées des points ou, ce qui revient au même, à l'aide des *composantes* des vecteurs associés à ces points.

Il est parfois utile de changer de repère, soit pour simplifier les calculs, soit pour mettre en évidence certains parallélismes de formules. Les coordonnées (x, y, z) d'un point M dans un repère deviennent (x', y', z') dans un autre repère, et il existe entre elles une relation caractéristique du changement de repère effectué, qui permet de calculer les unes à partir des autres et inversement.

Expression matricielle du problème.

Soit un repère affine quelconque $Oxyz$, défini par les vecteurs unitaires $\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{i}$ sur Ox, $\boldsymbol{OB} = \boldsymbol{j}$ sur Oy et $\boldsymbol{OC} = \boldsymbol{k}$ sur Oz. Un point M a, dans ce système, des coordonnées (x, y, z) telles que :

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \qquad (1)$$

Nous désignerons ces coordonnées par une *matrice unicolonne* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ (une matrice, rappelons-le, est un *tableau ordonné* de nombres ; voir n° **512.7, C**). Considérons un autre repère affine, caractérisé par un point O' dont les coordonnées dans $Oxyz$ sont (α, β, γ) et par trois vecteurs unitaires $\boldsymbol{O'A'} = \boldsymbol{i'}$, $\boldsymbol{O'B'} = \boldsymbol{j'}$, $\boldsymbol{O'C'} = \boldsymbol{k'}$. Comme nous nous plaçons dans le cas le plus général, nous supposerons que ces vecteurs sont différents des vecteurs $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{k}$: ils n'ont ni même direction, ni même norme (même grandeur géométrique). Pour les définir, nous donnerons leurs composantes par rapport au système $Oxyz$:

— $\boldsymbol{i'}$ a pour composantes (a, b, c), d'où :

$$\boldsymbol{i'} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k} ; \qquad (2)$$

— $\boldsymbol{j'}$ a pour composantes (a', b', c'), d'où :

$$\boldsymbol{j'} = a'\boldsymbol{i} + b'\boldsymbol{j} + c'\boldsymbol{k} ; \qquad (3)$$

— $\boldsymbol{k'}$ a pour composantes (a'', b'', c''), d'où :

$$\boldsymbol{k'} = a''\boldsymbol{i} + b''\boldsymbol{j} + c''\boldsymbol{k} . \qquad (4)$$

Nous aurons donc, en appelant (x', y', z') les coordonnées de M dans le second repère :

$$\boldsymbol{O'M} = x'\boldsymbol{i'} + y'\boldsymbol{j'} + z'\boldsymbol{k'} . \qquad (5)$$

Ces coordonnées constituent la *matrice unicolonne*

$$X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} .$$

Si nous appliquons la *relation de Chasles* aux vecteurs ici en cause, nous pouvons écrire :

$$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'M} ; \qquad (6)$$

mais, si nous écrivons la relation (5) ci-dessus en y remplaçant $\boldsymbol{i'}, \boldsymbol{j'}, \boldsymbol{k'}$ par leur expression en fonction de $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, nous obtenons :

$$\boldsymbol{O'M} = x'(a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}) + y'(a'\boldsymbol{i} + b'\boldsymbol{j} + c'\boldsymbol{k}) + z'(a''\boldsymbol{i} + b''\boldsymbol{j} + c''\boldsymbol{k}) , \qquad (7)$$

soit, en groupant les termes en $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$,

$$\boldsymbol{O'M} = (ax' + a'y' + a''z')\,\boldsymbol{i} + (bx' + b'y' + b''z')\,\boldsymbol{j} + (cx' + c'y' + c''z')\,\boldsymbol{k} . \qquad (8)$$

Les sommes entre parenthèses désignent les composantes du vecteur $\boldsymbol{O'M}$ par rapport au repère $Oxyz$; d'autre part, les composantes du vecteur $\boldsymbol{OO'}$ étant, dans ce repère, (α, β, γ) et celles du vecteur $\boldsymbol{OM}$ étant (x, y, z), l'égalité vectorielle (6) correspond aux trois égalités suivantes entre les composantes de ces vecteurs :

$$\begin{cases} x = \alpha + (ax' + a'y' + a''z') , \\ y = \beta + (bx' + b'y' + b''z') , \\ z = \gamma + (cx' + c'y' + c''z') . \end{cases} \qquad (9)$$

Or, si le lecteur veut bien se reporter aux pp. 59-62, où l'on donne les règles du produit matriciel, il constatera que les termes entre parenthèses dans le second membre de ces trois dernières égalités ne sont autres que les éléments du produit de matrices

$$\begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax' + a'y' + a''z' \\ bx' + b'y' + b''z' \\ cx' + c'y' + c''z' \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Appelons donc P et A les matrices

$$\begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix},$$

qui sont, respectivement, la matrice des composantes de $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ par rapport à $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ et la matrice des coordonnées de O' par rapport à $Oxyz$. Les trois équations établissant les formules de changement de coordonnées se résument en une seule équation matricielle :

$$X = A + PX'; \qquad (11)$$

P s'appelle la *matrice de passage.*

Pour exprimer les coordonnées (x', y', z') en fonction de (x, y, z), on aurait la relation

$$X' = A' + P^{-1}X, \qquad (12)$$

A' étant la matrice des coordonnées de O par rapport à $O'x'y'z'$ et P^{-1} l'inverse de la matrice P.

Ces formules semblent peut-être abstraites et compliquées. Nous allons en voir l'intérêt à propos de quelques changements de repère classique.

Translation des axes.

Ce changement de coordonnées consiste à déplacer le trièdre de référence, les axes restant orientés de la même façon par les vecteurs $\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k}$. Les composantes de ces vecteurs selon le repère initial sont donc (1, 0, 0) pour $\boldsymbol{i}'$, (0, 1, 0) pour $\boldsymbol{j}'$ et (0, 0, 1) pour $\boldsymbol{k}'$, soit la matrice de passage :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (13)$$

La relation matricielle $X = A + PX'$ correspond donc à :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \qquad (14)$$

c'est-à-dire

$$x = \alpha + x', \quad y = \beta + y', \quad z = \gamma + z'. \qquad (15)$$

Sur la figure ci-après on a donné un exemple de translation d'axes dans le cas d'un repère plan que l'on déplace par translation en $x'O'y'$ ou $x''O''y''$, les axes $\boldsymbol{Ox}$, $\boldsymbol{Ox}'$ et $\boldsymbol{Ox}''$ étant confondus. Dans un cas comme dans l'autre, on a $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}''$ et $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j}''$, ce qui correspond à la matrice de passage

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (16)$$

Avec les unités indiquées sur la figure, les coordonnées des points O' et O'' sont données par les matrices

$$A' = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A'' = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (17)$$

On a donc :

— pour $O'x'y'z'$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \qquad (18)$$

d'où :

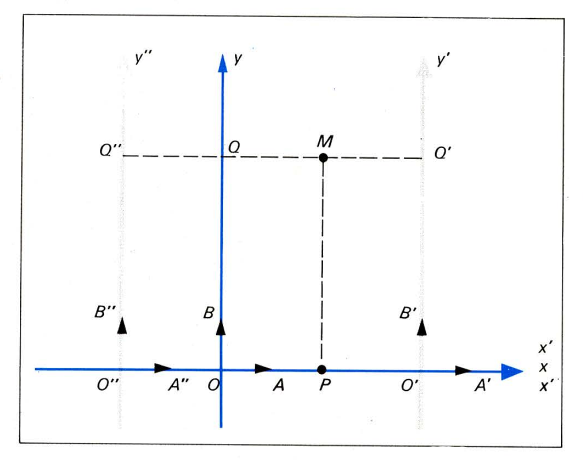
$$x = 4 + x' \quad \text{et} \quad y = y'; \qquad (19)$$

— pour $O''x''y''z''$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}, \qquad (20)$$

d'où :

$$x = -2 + x'' \quad \text{et} \quad y = y''. \qquad (21)$$



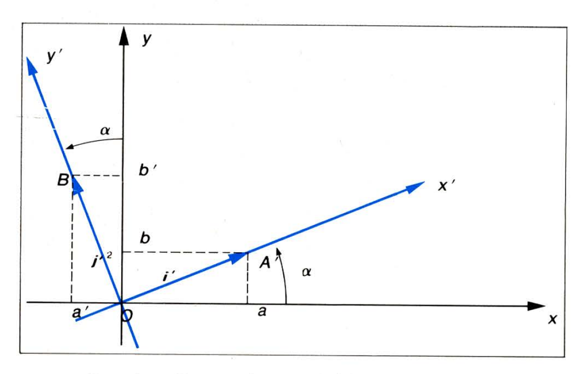
***Translation des axes en géométrie plane. On a choisi comme repère euclidien initial le système** xOy **(en bleu) ; la translation** $\overrightarrow{OO'}$ ($\overline{OO'} = +4$) **conduit au repère** x' O' y' **; la translation** $\overrightarrow{OO''}$ ($\overline{OO''} = -2$) **conduit au repère** x'' O'' y''.*

Rotation d'un repère euclidien dans le plan.

Soit Oxy le repère ; une rotation d'angle α dans le sens positif l'amène en $Ox'y'$. L'origine étant invariante on a $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$. La matrice de passage s'écrit en inscrivant dans chacune de ses colonnes les composantes de $\boldsymbol{i}'$ et de $\boldsymbol{j}'$ par rapport à Oxy. On a évidemment :

$$\text{pour } \boldsymbol{i}' : \begin{cases} a = \cos\alpha, \\ b = \sin\alpha; \end{cases} \qquad (22)$$

$$\text{pour } \boldsymbol{j}' : \begin{cases} a' = -\sin\alpha, \\ b' = \cos\alpha. \end{cases} \qquad (23)$$



***Rotation d'un repère euclidien dans le plan. Les composantes,** (a, b), (a', b'), **des vecteurs unitaires** $\vec{i'} = \overrightarrow{OA'}$ **et** $\vec{j'} = \overrightarrow{OB'}$ **s'obtiennent en projetant ces vecteurs sur les axes** Ox **et** Oy.*

d'où :

$$P = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad (24)$$

et :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \qquad (25)$$

ce qui donne (règle du produit matriciel) :

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \qquad (26)$$

D'autre part, l'inverse de P étant :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

(le lecteur vérifiera aisément que

$$P^{-1} \times P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}), \qquad (27)$$

on a :

$$X' = P^{-1}X; \qquad (28)$$

soit :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad (29)$$

d'où :

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha; \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases} \qquad (30)$$

LA DROITE ET LE PLAN.

Généralités sur la représentation des lignes et des surfaces.

Nous en savons assez, maintenant, pour traduire en langage algébrique les données d'un problème de géométrie. Examinons séparément le cas des lignes et celui des surfaces.

Représentation d'une ligne plane.

Une ligne plane est une figure tracée dans un plan ; elle peut être droite ou courbe.

Pour chacune de celles que nous serons conduits à envisager, il existe, entre les coordonnées x et y de tous ses points, une relation caractéristique appelée *équation de cette ligne.* Ainsi, dans un repère euclidien d'origine O, tous les points $M(x, y)$ d'un cercle de centre O et de rayon R vérifient la relation de Pythagore $x^2 + y^2 = R^2$. Cette relation peut s'écrire de deux façons :

— soit sous la forme $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$: c'est ce qu'on appelle l'*équation explicite* de la ligne considérée ;

— soit sous la forme $x^2 + y^2 - R^2 = 0$: c'est ce qu'on appelle l'*équation implicite* de la ligne considérée.

Plus généralement, on écrira :

$$y = f(x) \quad \text{(équation explicite)} \qquad (1)$$

ou

$$F(x, y) = 0 \quad \text{(équation implicite)}. \qquad (2)$$

On peut encore définir une ligne plane en exprimant les coordonnées x et y de l'un quelconque de ses points en fonction d'une grandeur variable t et écrire :

$$x = f(t) \quad \text{et} \quad y = g(t) \qquad (3)$$

(on choisit deux lettres distinctes f et g, car les relations entre x et t d'une part, y et t d'autre part ne sont pas les mêmes). Ce mode de représentation s'appelle *représentation paramétrique* ; t est le *paramètre.*

Représentation d'une surface.

Une surface est définie par une relation entre les coordonnées x, y et z d'un quelconque de ses points. On écrira soit :

$$z = f(x, y) \quad \text{(équation explicite par rapport à } x \text{ et } y\text{)}, \qquad (4)$$

soit :

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{(équation implicite)}. \qquad (5)$$

On peut aussi se donner les *équations paramétriques* d'une surface en utilisant deux paramètres, s et t :

$$x = f(s, t), \quad y = g(s, t), \quad z = h(s, t). \qquad (6)$$

Représentation d'une ligne dans l'espace.

Une ligne dans l'espace peut être considérée comme l'intersection de deux surfaces : le cas le plus simple est celui d'une droite, qui est l'intersection de deux plans. Les modes de représentation d'une ligne quelconque dans l'espace sont rappelés à la p. 149.

Géométrie affine de la droite.

Nous étudierons d'abord la représentation d'une droite dans un repère affine (axes obliques), pour examiner les propriétés qui ne font intervenir ni la mesure des distances, ni la mesure des angles.

Quand on se donne une *droite*, en géométrie plane, on la définit :

— soit comme la droite reliant deux points déterminés M_1 et M_2 ;

— soit comme la droite passant par un point M_1 et parallèle à une direction donnée par un vecteur $\boldsymbol{V}$.

Dans un cas comme dans l'autre, établir *l'équation de la droite*, c'est trouver la relation qui existe entre les coordonnées x et y d'un point M quelconque de la droite. Nous allons donner le détail des calculs, afin de faire comprendre au lecteur le *principe* de la méthode employée.

Premier cas : équations barycentriques de la droite.

La droite D est définie par les deux points, $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$. Nous allons nous servir de la notion de barycentre, étudiée p. 82. Un point $M(x, y)$ quelconque de D peut être considéré comme le barycentre des points M_1 et M_2 affectés respectivement des coefficients 1 et λ (λ : nombre réel quelconque). Cela signifie que, quelle que soit l'origine O choisie, on a (voir p. 83)

$$\boldsymbol{OM} = \frac{\boldsymbol{OM}_1 + \lambda \boldsymbol{OM}_2}{1+\lambda}. \qquad (1)$$

Par exemple, si le point M est le milieu du segment $M_1 M_2$, on prendra $\lambda = 1$ et l'on aura

$$\boldsymbol{OM} = \frac{\boldsymbol{OM}_1 + \boldsymbol{OM}_2}{2} \qquad (2)$$

(c'est-à-dire que $\boldsymbol{OM}$ est la demi-diagonale issue de O du parallélogramme construit sur $\boldsymbol{OM}_1$ et $\boldsymbol{OM}_2$).

Comme le barycentre d'un système de points est indépendant de l'origine choisie, on peut prendre comme origine le point M lui-même ; on a alors $\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{0}$ et l'équation vectorielle (1) s'écrit :

$$\frac{\boldsymbol{MM}_1 + \lambda \boldsymbol{MM}_2}{1+\lambda} = \boldsymbol{0}, \qquad (3)$$

équation équivalente à :

$$\boldsymbol{MM}_1 + \lambda \boldsymbol{MM}_2 = \boldsymbol{0}. \qquad (4)$$

Si $\lambda = -1$, cette équation s'écrit $\boldsymbol{MM}_1 - \boldsymbol{MM}_2 = \boldsymbol{0}$, ce qui n'a de sens que pour M éloigné *à l'infini* sur la droite $D(M_1, M_2)$.

Pour établir l'équation de D, on va *projeter* l'équation vectorielle (1) sur chacun des axes de coordonnées Ox et Oy parallèlement à l'autre, c'est-à-dire qu'on va remplacer chacun des vecteurs $\boldsymbol{OM}$, $\boldsymbol{OM}_1$, $\boldsymbol{OM}_2$ par sa composante selon l'axe sur lequel on le projette :

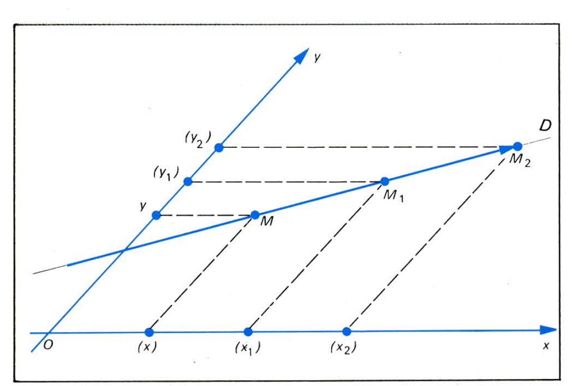
— sur Ox, on remplace $\boldsymbol{OM}$ par x, $\boldsymbol{OM}_1$ par x_1 et $\boldsymbol{OM}_2$ par x_2 ;

— sur Oy, on remplace $\boldsymbol{OM}$ par y, $\boldsymbol{OM}_1$ par y_1 et $\boldsymbol{OM}_2$ par y_2 ;

on obtient ainsi deux équations :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \qquad (5)$$

qui sont la traduction algébrique de l'énoncé géométrique : « la droite D passe par les points M_1 et M_2 ». Nous remarquons que les coordonnées x et y d'un point M de D sont exprimées en fonction d'un *paramètre* λ : les équations précédentes sont donc des *équations paramétriques* de la droite D. Comme on a considéré le point M comme un barycentre, on dit aussi que ce sont les *équations barycentriques* de la droite D.



Équations barycentriques d'une droite.

Premier cas : équation cartésienne de la droite.

La droite D étant définie par les deux points M_1 et M_2, dire que M appartient à cette droite, c'est dire que $\boldsymbol{M_1 M_2}$ et $\boldsymbol{M_1 M}$ sont colinéaires (voir p. 86), ce qui revient à écrire :

$$\boldsymbol{M_1 M} = k \boldsymbol{M_1 M_2} \quad \text{ou} \quad \frac{\boldsymbol{M_1 M}}{\boldsymbol{M_1 M_2}} = k. \qquad (6)$$

On a :

$$\text{composantes de } \boldsymbol{M_1 M} : \begin{cases} x - x_1, \\ y - y_1 ; \end{cases} \qquad (7)$$

$$\text{composantes de } \boldsymbol{M_1 M_2} : \begin{cases} x_2 - x_1, \\ y_2 - y_1 ; \end{cases} \qquad (8)$$

donc l'équation (6), projetée parallèlement aux axes, donne :

$$\text{sur } Ox : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = k \qquad (9)$$

$$\text{sur } Oy : \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = k, \qquad (10)$$

d'où *l'équation cartésienne* de la droite D :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \qquad (11)$$

équation qui peut s'écrire aussi sous la forme suivante :

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (12)$$

D étant un *déterminant* (voir p. 59) pour les règles de calcul d'un déterminant.

Cas particulier intéressant : Le point M_1 est sur Ox ($x_1 = a$, $y_1 = 0$) et le point M_2 sur Oy ($x_2 = 0$, $y_2 = b$). L'équation (11) s'écrit alors, comme le lecteur le vérifiera aisément,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0. \qquad (13)$$

Deuxième cas.

La droite est définie par le point $M_1(x_1, y_1)$ et par un vecteur directeur $\boldsymbol{V}$ de composantes p et q selon les axes. Un point $M(x, y)$ quelconque appartenant à la droite D est tel que le vecteur $\boldsymbol{M_1 M}$ et le vecteur $\boldsymbol{V}$ aient même direction (voir figure ci-dessous), ce qui s'écrit :

$$\boldsymbol{M_1 M} = \rho \boldsymbol{V} \qquad (\rho = \textit{réel}), \qquad (14)$$

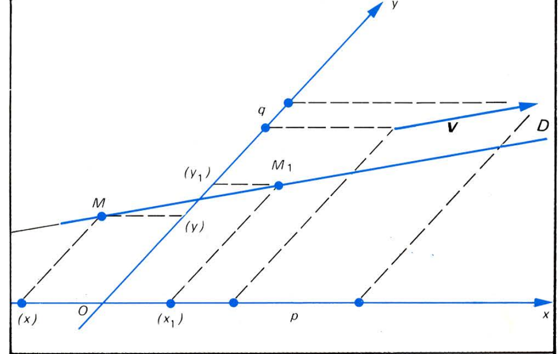
d'où, par projection sur chacun des deux axes parallèlement à l'autre,

$$x - x_1 = \rho p \quad \text{et} \quad y - y_1 = \rho q. \qquad (15)$$

On en tire :

— les équations paramétriques de D :

$$x = x_1 + \rho p \qquad y = y_1 + \rho q ; \qquad (16)$$



Équation d'une droite définie par un point et une direction.

— l'équation cartésienne de D :

$$\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q}. \qquad (17)$$

● *Cas particuliers.*

— Si $\boldsymbol{V}$ est parallèle à Ox, $q = 0$ et l'équation de D est $y = y_1$;

— Si $\boldsymbol{V}$ est parallèle à Oy, $p = 0$ et l'équation de D se réduit à $x = x_1$.

● *Remarque.* Si $p \neq 0$, on peut poser $q/p = m$, et l'équation (17) devient :

$$y - y_1 = m(x - x_1) ; \qquad (18)$$

m s'appelle le *coefficient directeur* de la droite D (nous verrons, en géométrie métrique, ce qu'il signifie). D'une manière générale, l'équation d'une droite D non parallèle à Oy peut se mettre sous la forme :

$$y = mx + h, \qquad (19)$$

m étant son coefficient directeur et h l'ordonnée du point où la droite coupe l'axe Oy ($x = 0$, $y = h$), appelée aussi *ordonnée à l'origine.*

Théorème important.

Toute droite D d'un plan rapporté à un repère affine Oxy est représentée par une équation du premier degré

$$Ax + By + C = 0, \qquad (20)$$

A et B n'étant pas nuls en même temps.

Nous venons de voir que toute droite non parallèle à Oy a une équation de cette forme ; l'équation (19) peut en effet s'écrire

$$mx - y + h = 0. \qquad (21)$$

Par comparaison entre (20) et (21) on voit que la droite d'équation $Ax + By + C = 0$ a pour coefficient directeur et pour ordonnée à l'origine, respectivement

$$m = -\frac{A}{B} \quad \text{et} \quad h = -\frac{C}{B}. \qquad (22)$$

Enfin l'équation d'une droite parallèle à Oy ($x = x_1$, ou $x - x_1 = 0$) est aussi de la forme (20).

On déduit immédiatement de ce théorème que deux droites D et D' d'équations respectives $Ax + By + C = 0$ et $A'x + B'y + C' = 0$ sont *parallèles* (au sens large) si et seulement si :

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} \quad (\text{ou } BA' - AB' = 0). \qquad (23)$$

Si, en outre, $\dfrac{A'}{A} = \dfrac{B'}{B} = \dfrac{C'}{C}$, elles sont *confondues.*

Ce théorème achève notre effort de traduction en ce qui concerne la géométrie affine de la droite. Nous pouvons dire, dorénavant, en langage géométrique, « la droite D » ; en langage analytique,

« l'équation $Ax + By + C = 0$ ».

A titre d'exemple (figure ci-dessous), considerons la droite D ayant pour équation $4x + y - 6 = 0$ dans le repère d'origine O et de vecteurs unitaires $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$.

1 - Les points où la droite D coupe les axes sont $A(3/2, 0)$ sur Ox et $B(0, 6)$ sur Oy, d'où l'équation équivalente de D :

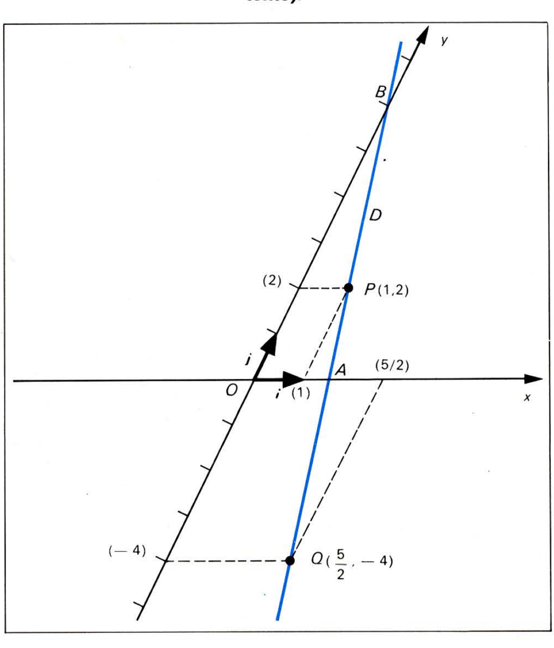
$$\frac{2x}{3} + \frac{y}{6} - 1 = 0 \quad \left(\text{car } \frac{x}{3/2} = \frac{2x}{3}\right). \qquad (24)$$

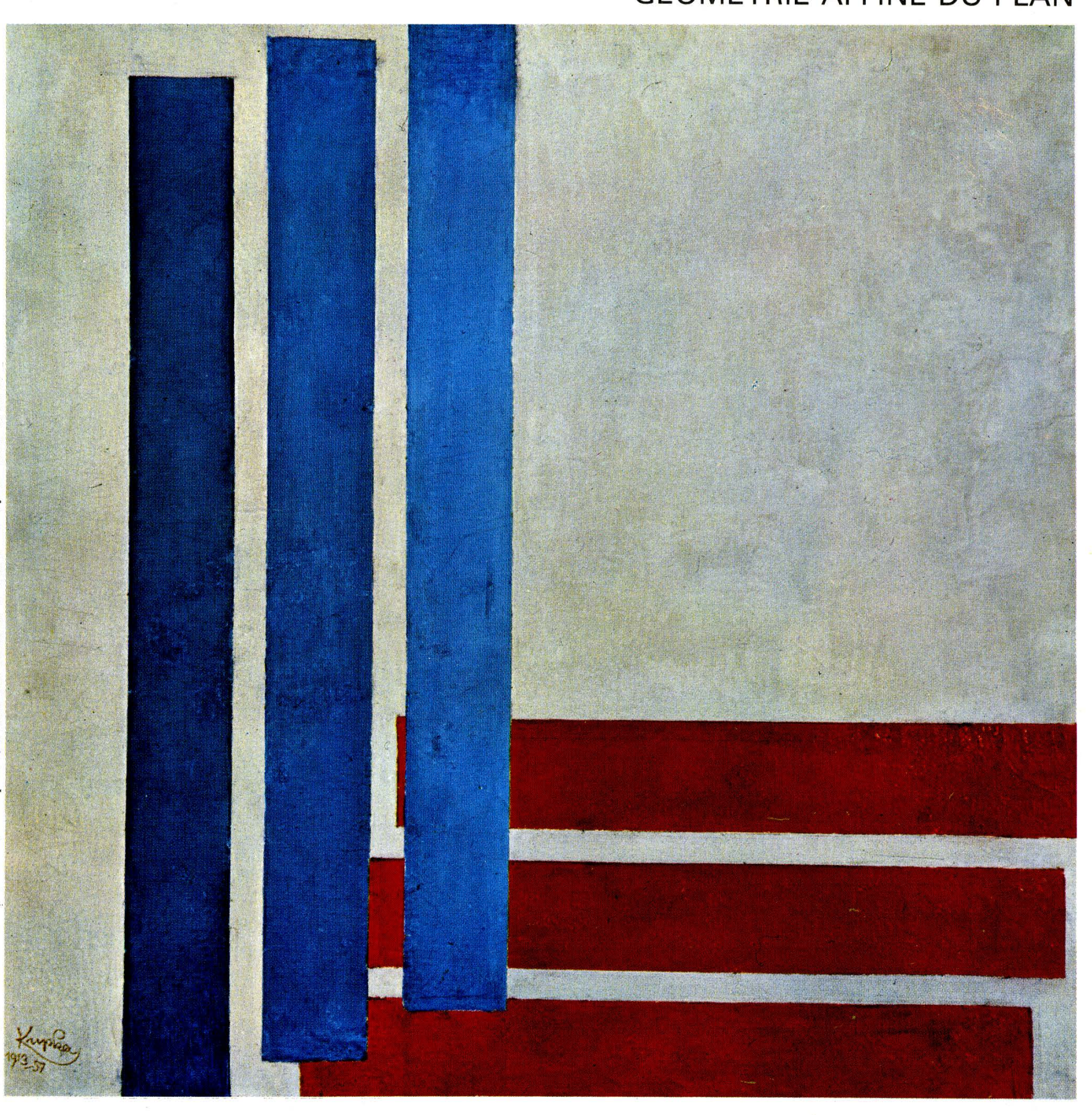
2 - Le coefficient directeur de D est $m = -A/B = -4/1 = -4$; l'ordonnée à l'origine est $h = 6$, d'où l'équation (équivalente) :

$$y = -4x + 6. \qquad (25)$$

3 - On vérifiera que deux points quelconques,

Représentation analytique d'une droite (exemple du texte).





Franz Kupka (1871-1957) : *l'un des premiers peintres abstraits ; il a été séduit par la plastique des formes géométriques. Ci-dessus :* **Trois bleus, trois rouges.**

tels $P(1, 2)$ et $Q(5/2, -4)$, ont des coordonnées qui satisfont aux trois relations :

$$\begin{aligned} &4x + y - 6 = 0\,, \\ &\frac{2x}{3} + \frac{y}{6} - 1 = 0\,, \\ &y = -4x + 6\,, \end{aligned} \qquad (26)$$

qui sont des équations équivalentes représentant la droite D.

4 - Réciproquement, la droite passant par les points P et Q a pour équation :

$$\frac{x-1}{\frac{5}{2}-1} = \frac{y-2}{-4-2} \qquad (27)$$

ou, ce qui revient au même (et qui a l'avantage de s'écrire « automatiquement ») :

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{5}{2} & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (28)$$

d'après l'équation (12) ci-dessus.

La droite dans l'espace (propriétés affines).

Dans un repère affine $Oxyz$, on retrouverait les résultats précédents, en tenant compte des composantes selon Oz des égalités vectorielles considérées. On obtiendrait ainsi :

— les équations barycentriques d'une droite passant par deux points, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\,; \qquad (29)$$

— les équations cartésiennes de cette droite :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\,; \qquad (30)$$

— les équations d'une droite passant par $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et parallèle au vecteur $\boldsymbol{V}$ de composantes (p, q, r) :

$$x = x_1 + \rho p, \quad y = y_1 + \rho q, \quad z = z_1 + \rho r \qquad (31)$$

(équations paramétriques), ou :

$$\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r} \qquad (32)$$

(équations cartésiennes, dites *équations normales* de la droite).

Représentation affine du plan.

L'image la plus banale d'un plan est donnée par le plateau d'une table supposé sans épaisseur et prolongé à l'infini dans toutes les directions. Pour définir un plan en géométrie, on peut se donner les éléments suivants :

— trois points non alignés (un *trépied* est toujours en équilibre, car les trois « points » qui représentent les extrémités de ses pieds déterminent un plan et un seul ; par contre, une chaise à quatre pieds peut être « boiteuse » si le quatrième pied n'est pas dans le plan des trois autres) ;

— un point et deux directions (représentées par deux vecteurs non parallèles).

Équations barycentriques du plan défini par trois points donnés.

Soient trois points, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ et $M_3(x_3, y_3, z_3)$; pour traduire algébriquement le fait qu'ils déterminent un plan, c'est-à-dire un ensemble de points $M(x, y, z)$ tel que — si l'on peut se permettre cette comparaison grossière — une chaise dont les quatre pieds (supposés infiniment effilés) reposant en M, M_1, M_2, M_3, ne serait pas « boiteuse » (on dit en géométrie que les quatre points sont *coplanaires*), on peut procéder comme pour la droite, en considérant M comme le barycentre des points M_1, M_2 et M_3 affectés de coefficients convenables, 1, λ, μ. On aurait alors, vectoriellement,

$$\boldsymbol{OM} = \frac{\boldsymbol{OM}_1 + \lambda \boldsymbol{OM}_2 + \mu \boldsymbol{OM}_3}{1 + \lambda + \mu}, \qquad (1)$$

d'où les coordonnées barycentriques (*à deux paramètres*) d'un point du plan :

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3}{1 + \lambda + \mu}, \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2 + \mu y_3}{1 + \lambda + \mu}, \\ z &= \frac{z_1 + \lambda z_2 + \mu z_3}{1 + \lambda + \mu}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Plan défini par un point et deux directions.

Soit un plan défini par le point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et deux directions non parallèles, $\boldsymbol{V}(p, q, r)$ et $\boldsymbol{V}'(p', q', r')$. Dire qu'un point M appartient au plan $(M_1\,;\ \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{V}')$, c'est dire que le vecteur $\boldsymbol{M_1 M}$ peut être obtenu en appliquant la règle du parallélogramme à deux vecteurs $\rho \boldsymbol{V}$ et $\rho' \boldsymbol{V}'$, de même direction que $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{V}'$ (ρ et ρ' étant deux scalaires), c'est-à-dire qu'on peut écrire :

$$\boldsymbol{M_1 M} = \rho \boldsymbol{V} + \rho' \boldsymbol{V}'\,. \qquad (3)$$

Cette équation vectorielle est équivalente aux équations suivantes, qui font intervenir les composantes de $\boldsymbol{M_1}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{V}'$:

$$x - x_1 = \rho p + \rho' p', \quad y - y_1 = \rho q + \rho' q', \quad z - z_1 = \rho r + \rho' r'\,; \qquad (4)$$

d'où les *équations paramétriques du plan* :

$$x = x_1 + \rho p + \rho' p', \quad y = y_1 + \rho q + \rho' q', \quad z = z_1 + \rho r + \rho' r', \qquad (5)$$

et, en éliminant ρ et ρ' entre ces équations, *l'équation cartésienne* du plan, qui s'écrit, tous calculs faits,

$$(qr' - rq')(x - x_1) + (rp' - pr')(y - y_1) + (pq' - qp')(z - z_1) = 0\,, \qquad (6)$$

ou, en utilisant les déterminants,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ p & q & r \\ p' & p' & r' \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (7)$$

D'où le théorème : l'équation générale du plan dans l'espace, rapportée au repère affine $Oxyz$, s'écrit :

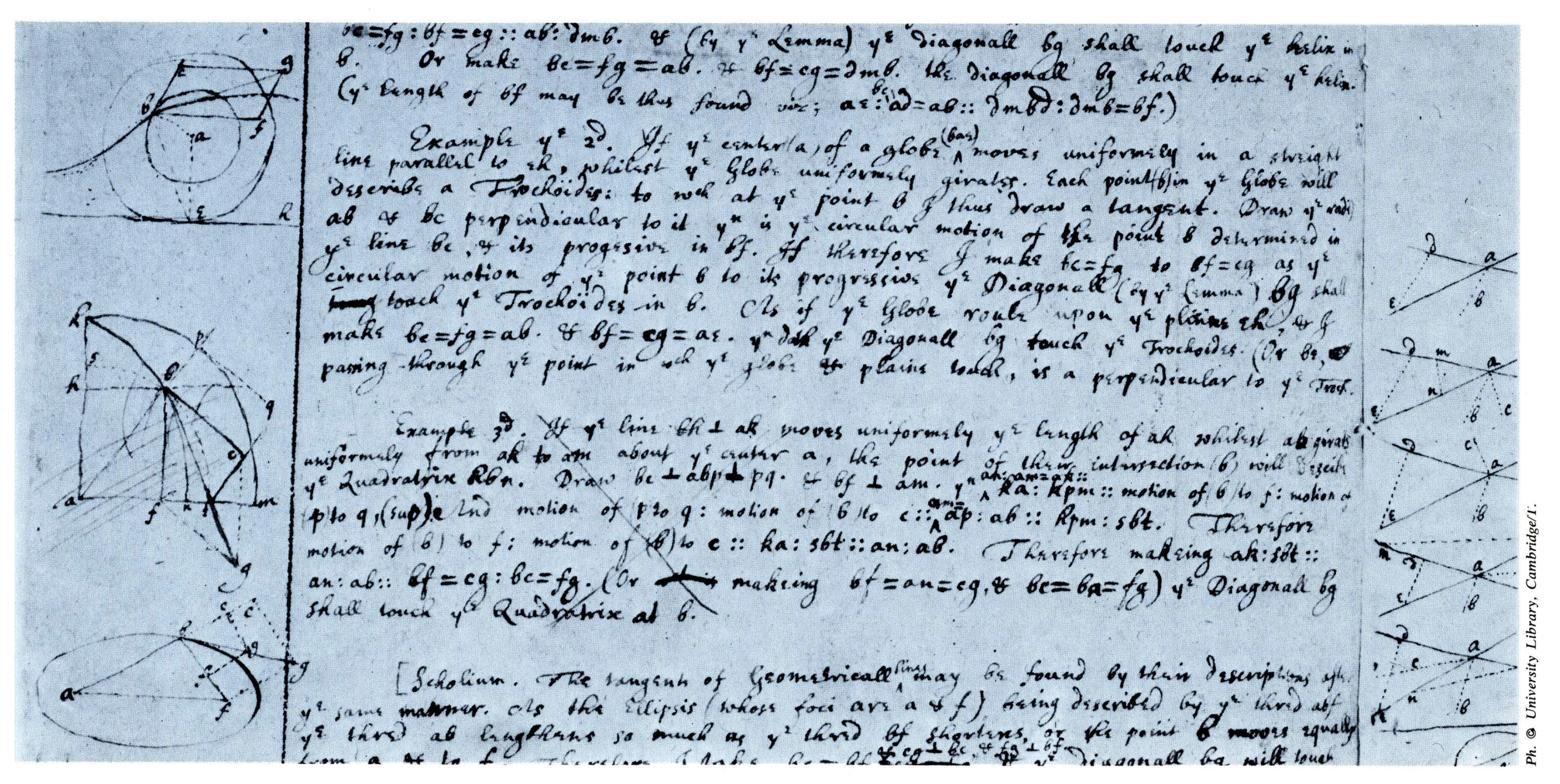
$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \qquad (8)$$

A, B et C n'étant pas nuls en même temps.

Développement de la géométrie analytique.

Nous pensons que les observations précédentes auront fait comprendre au lecteur quel est le principe général de la géométrie analytique. Ce n'est évidemment pas le lieu, ici, de développer les calculs, parfois longs et compliqués, qui permettent de traduire algébriquement les *faits* géométriques. Cela exigerait, en effet, la rédaction d'un traité de géométrie analytique, qui n'est pas notre propos. Néanmoins, pour que le lecteur n'ait pas l'impression de rester « sur le seuil » d'une théorie dont le développement et les prolongements sont très importants, nous avons groupé les principaux résultats (sans les démonstrations, bien entendu) pp. 149-153, où le lecteur trouvera notamment des informations sur les questions suivantes :

— Géométrie métrique de la droite et du plan.
— Éléments à l'infini, éléments imaginaires.
— Propriétés générales des courbes et des surfaces.
— Lieux géométriques.
— Traduction analytique de quelques transformations (déplacements, symétries, homothétie et similitude, transformations homographiques, inversion, involution).
— Corrélation ; problèmes des tangentes et des enveloppes.
— Problèmes de courbures.
— Courbes du second ordre (coniques).
— Surfaces du second ordre (quadriques).



Ph. © University Library, Cambridge/T.

L'œuvre mathématique de Newton est en étroite relation avec son œuvre de physicien, ou, comme on disait au XVIIe siècle, de « philosophe naturel » et qui concerne l'optique et la mécanique. C'est en 1665-1666 qu'il élabora ses premières idées sur le calcul infinitésimal — qu'il nommait calcul des fluxions **— et sur la gravitation ; mais ses théories ne furent connues du grand public cultivé européen qu'à partir de 1687, année où furent publiés les fameux** Principia**, dans lesquels est énoncée la loi de la gravitation universelle. En physicien et astronome qu'il était, Newton se posa avant toutes choses le problème du mouvement d'un point matériel sur une trajectoire : que peut-on dire des éléments de ce mouvement (espace parcouru, vitesse, accélération) lorsque l'intervalle de temps Δt pendant lequel on l'étudie devient infiniment petit ? La réponse à cette question repose sur l'établissement de règles de calcul sur des grandeurs infiniment petites et elle débouche sur les applications importantes, telles la détermination de la vitesse et de l'accélération d'un mobile ou la construction des tangentes à une courbe. Ci-dessus : fragment d'un manuscrit de Newton sur la construction des tangentes à des courbes mécaniques (= courbes que l'on peut tracer à l'aide d'instruments autres que la règle et le compas).**

ANALYSE

INTRODUCTION HISTORIQUE.

L'*analyse* est une discipline mathématique qui comprend plusieurs théories, dont les principales sont :

— le calcul infinitésimal proprement dit (calcul différentiel et intégral) ;

— la théorie des fonctions, et plus spécialement des fonctions d'une ou plusieurs variables réelles ou complexes ;

— le calcul des variations d'une fonction d'une variable réelle ou complexe, la théorie des fonctions analytiques, etc.

C'est une partie importante de l'édifice mathématique, née au XVIIe siècle des découvertes de Cavalieri, Fermat, Pascal, Wallis, Newton et Leibniz. Elle a été développée au XVIIIe siècle par Euler et Lagrange, et unifiée et généralisée au XIXe siècle par Cauchy, Abel, Jacobi, Riemann, Weierstrass et Cantor, puis, au XXe siècle, par Lebesgue, Borel, Volterra, Fréchet, etc. Ses applications à la physique ne se comptent plus.

Naissance du calcul infinitésimal.

Le calcul infinitésimal, c'est-à-dire le calcul sur les infiniment petits, est né à la fin du XVIIe siècle. Toutefois l'invention de Leibniz et de Newton a été précédée de nombreux tâtonnements dont ces deux grands savants ont su tirer les conséquences fécondes. Voici un bref panorama chronologique de cette invention.

Les précurseurs.

● *Eudoxe et Archimède.* Au IVe siècle av. J.-C., Eudoxe de Cnide inventa la *méthode par exhaustion*, qui consiste à diviser par la pensée une surface ou un volume en une infinité de petits éléments et de considérer la surface ou le volume en cause comme la somme à l'infini de ces éléments « infiniment petits ». Archimède se servit avec une grande élégance de cette méthode pour *quarrer* (= mesurer la surface) le cercle et la parabole, pour évaluer le volume des « corps ronds » (cylindre, cône, sphère). Ainsi, en divisant un segment de parabole en triangles de plus en plus petits dont les aires sont a, $a/4$, $a/16$, ..., on peut approcher l'aire du segment de parabole par la somme :

$$A = a\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right), \qquad (1)$$

avec autant de précision qu'on le veut.

● *La méthode par exhaustion est une décomposition* d'une grandeur en éléments ; en grec, « décomposition » se dit *analusis*, d'où le français *analyse*.

● *François Viète*, dont le rôle en *algèbre* a été signalé p. 10, a été l'un des premiers mathématiciens des temps modernes à calculer sur des séries infinies. En 1593, dans un ouvrage intitulé « *Variorum de rebus mathematicis responsorum* », il aborde le problème de la détermination du nombre π — déjà approché par Archimède — en étudiant le rapport qui existe entre la surface d'un carré et celle d'un cercle dans lequel ce carré est inscrit. On démontre en géométrie que ce rapport est égal à $2/\pi$ et Viète a établi que ce nombre est la limite, à l'infini, du produit :

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \cdots \qquad (2)$$

Chaque terme f_n de ce produit étant déduit du terme f_{n-1} par la relation :

$$f_n = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_{n-1}}. \qquad (3)$$

La relation (2) s'écrit aussi trigonométriquement :

$$\cos\frac{\pi}{4} \times \cos\frac{\pi}{8} \times \cos\frac{\pi}{16} \times \cdots \times \cos\frac{\pi}{2^n} \times \cdots \qquad (4)$$

La formule (2) est le premier *algorithme* (= procédé systématique de calcul) infini connu.

● *Kepler*, le grand astronome qui établit les lois du mouvement des planètes autour du Soleil, s'est posé lui aussi le problème du calcul de la longueur d'un arc de courbe quelconque, en l'assimilant à une ligne polygonale brisée dont le nombre de côtés tend vers l'infini (*Nova stereometria doliorum vinarium*, 1615). Il reprend, ce faisant, la méthode archimédienne, avec — il faut le dire — un peu trop de légèreté et beaucoup d'erreurs.

● *Cavalieri* est un jésuite italien, disciple de Galilée et professeur de mathématiques à Bologne de 1629 à 1647, date de sa mort. Il a établi le point de départ du calcul infinitésimal moderne dans un livre célèbre publié en 1635 : *Geometria indivisibilium continuorum nova quadam ratione promota*, titre qu'on résume habituellement en français par *Géométrie des indivisibles.* Sans entrer dans les détails de l'exposé de Cavalieri, il est intéressant d'en exposer les

résultats, dans le langage des mathématiques classiques.

Le problème qui se pose est de « quarrer » une portion de courbe plane. Soit par exemple la parabole $y = x^2$, et la corde AB, parallèle à l'axe des x, le point A ayant pour abscisse $x = a$ et, par conséquent, pour ordonnée $y = a^2$. L'aire du secteur (AOB) est égale à l'aire du rectangle $ABB'A'$ (voir figure ci-après) diminuée de l'aire des deux triangles mixtilignes hachurés sur la figure AOA' et BOB'. Pour calculer l'aire S du triangle AOA' par exemple, Cavalieri propose de le diviser en une infinité de segments indivisibles dont l'aire infiniment petite serait notée dS dans notre notation moderne. L'aire S est alors la somme d'une infinité d'aires élémentaires dS, comprises entre les abscisses $x = 0$ et $x = a$, ce qui s'écrit, en notation moderne :

$$S = \int_0^a dS\,, \qquad (5)$$

le signe $\int$ est un S (initiale de « somme ») allongé, et le membre de droite se lit :

« intégrale définie de 0 à a de dS ».

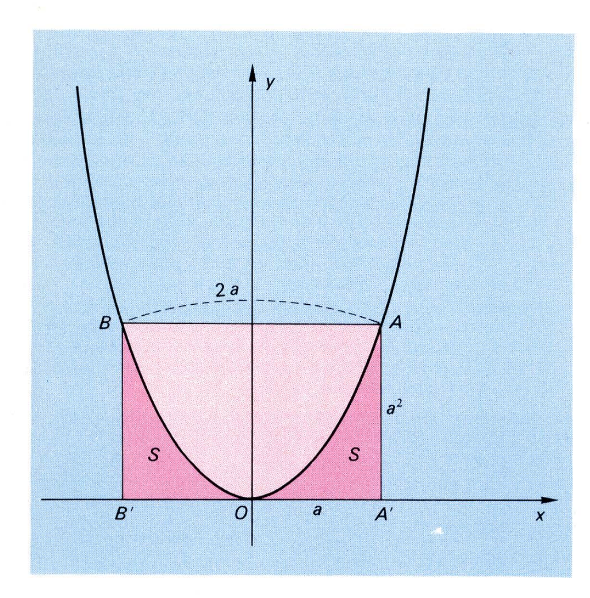
Ce qui importe, ici, c'est le résultat. Cavalieri a montré que la somme infinie avait pour limite :

$$S = \frac{a^3}{3}, \qquad (6)$$

d'où l'aire de la portion de parabole (AOB) :

$$\text{Aire}\,(AOB) = 2\,a^3 - \frac{2\,a^3}{3} = \frac{4\,a^3}{3} \qquad (7)$$

(en effet l'aire du rectangle $ABB'A'$ vaut $2\,a^3$ et le triangle mixtiligne BOB' a la même surface que le triangle AOA').



La parabole $y = x^2$ (pour que la figure soit plus nette, on a choisi des unités différentes pour les deux axes de coordonnées). Le point A pour abscisse a, d'où $A'A = a^2$; l'aire du rectangle $ABB'A'$ est égale à $2\,a \times a^2 = 2\,a^3$, et l'aire de chaque triangle mixtiligne coloré est égale à $S = a^3/3$. Donc l'aire du segment de parabole OAB est égale à $4\,A^3/3$.

Plus généralement, si, au lieu de la parabole $y = x^2$, nous considérons la courbe $y = x^m$ (m : entier positif), l'aire S comprise entre la courbe, l'axe Ox et une ordonnée $A'A$, d'abscisse $OA' = a$, peut être calculée par une méthode analogue et on peut montrer qu'elle a pour valeur :

$$S = \frac{a^{m+1}}{m+1}. \qquad (8)$$

Ce résultat a été démontré par Cavalieri en 1629 pour $m = 1$ et $m = 2$, par la suite, Cavalieri le démontra pour $m = 3$ et $m = 4$, et le généralisa — avec une rigueur très douteuse — pour tout m entier positif (c'est Fermat qui en donnera la première démonstration générale en 1635) ; il s'exprime, en langage moderne, des deux manières équivalentes suivantes :

1 - l'aire S est la primitive de la fonction $y = x^m$ qui s'annule pour $x = 0$.

2 - l'aire S est l'intégrale définie :

$$\int_0^a x^m\,dx = \frac{a^{m+1}}{m+1} \qquad (9)$$

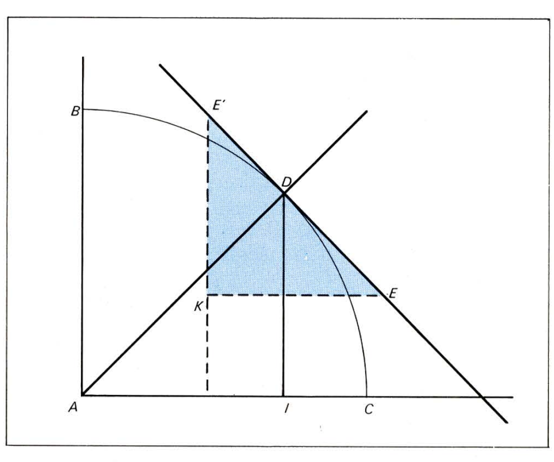
Premières applications et généralisations.

Entre 1635 et 1684, les mathématiciens utilisent la « méthode des indivisibles » et les procédés de calcul sur des grandeurs infiniment petites pour résoudre des problèmes de géométrie : détermination de la tangente à une courbe en un point, rectification (calcul de la longueur) d'une courbe, calculs de surfaces et de volumes.

● *Fermat* s'est penché sur les problèmes de minimums et de maximums, qui sont liés à la détermination des tangentes. Sa méthode consiste à supposer que la grandeur A à calculer et qui est donnée par une équation de la forme $f(A) = 0$ peut être remplacée par $A + E$, l'équation $f(A + E) = 0$ étant valable. Il appelle cela *adégaler* $f(A)$ et $f(A+E)$ (« adégaler » signifie « égaler approximativement »). On calcule donc $f(A + E)$, on réduit les termes et, après avoir posé dans les derniers résultats $E = 0$, on obtient l'expression de A. En langage moderne, la méthode consiste à calculer sur $A + E$, E étant un infiniment petit auquel on applique les règles du calcul ordinaire et qu'on annule ensuite.

Fermat a maîtrisé cette « méthode des tangentes » dès 1632 (donc avant la publication du livre de Cavalieri) ; on notera qu'elle est intimement liée à la géométrie analytique naissante. Descartes a été conduit, à la même époque (vers 1636) à se poser le problème de la construction des normales aux courbes géométriques, problème qu'il résout par l'algèbre. On retrouve des préoccupations analogues chez Roberval, puis, à la génération suivante, chez l'Anglais Isaac Barrow, qui fut le maître de Newton.

● *Pascal*, dans son *Traité des sinus et du quart de cercle*, est amené à considérer — dans le cadre d'un théorème de trigonométrie — ce qu'on nomme le triangle caractéristique (voir figure) : ce triangle rectangle, dont l'hypoténuse EE' est portée par la tangente en D à une courbe C, peut devenir aussi petit que l'on veut quand E et E' tendent vers D tout en restant constamment semblable à un triangle fixe AID. Le rapport des côtés de l'angle droit reste donc constant quand le triangle devient infiniment petit.



Le triangle caractéristique de Pascal (en bleu) associé au quart de cercle.

● *John Wallis* a sans doute été le mathématicien anglais le plus important avant l'avènement de Newton. Homme d'église, il aborda les mathématiques assez tardivement, en 1647 (il avait alors trente et un ans), par la lecture de la *Clavis mathematicae* (« Clé pour les mathématiques », 1631) du mathématicien et théologien William Oughtred, ouvrage assez traditionnel pour l'époque, et qui traitait de notation, des logarithmes, des fractions décimales et de trigonométrie. L'œuvre principale de Wallis est l'*Arithmetica infinitorum* (« Arithmétique des Infinis »), publiée en 1655 et qui porte sur la méthode des indivisibles de Cavalieri telle que le physicien italien Torricelli l'avait interprétée ; à titre d'anecdote, signalons qu'on lui doit d'avoir introduit le symbole « ∞ » pour désigner l'infini.

Wallis a été, avant tout, un calculateur et un algébriste, qui a cherché à résoudre certains problèmes de quadratures par des approximations numériques illimitées, et non plus par des divisions géométriques à l'infini. Il a notamment établi le célèbre produit infini qui permet de calculer le rapport $4/\pi$ avec toute la précision désirée :

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \times 11 \times 11 \times \cdots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \times 10 \times \cdots}. \qquad (10)$$

● *Les suites convergentes.* C'est dans l'esprit de ces approximations illimitées que se place l'introduction des *séries convergentes* dont il sera question plus loin (voir p. 119). La notion et l'expression apparaissent en 1667 dans l'œuvre de l'astronome écossais James Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (« Véritable quadrature du cercle et de l'hyperbole »). Chez cet auteur, il s'agit de calculer l'aire d'un secteur circulaire à l'aide d'une suite de valeurs de cette aire par excès et par défaut. L'Allemand Nicolaus Kaufmann, dit Mercator, a publié une méthode de développement d'une fonction en série en 1668 ; il a notamment montré que la fonction ln x (voir p. 115) pouvait être calculée par la somme infinie

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \frac{x^{2n}}{2n} + \cdots$$

dont les termes sont successivement positifs et négatifs. Cette méthode de représentation d'une fonction de x par un développement en série sera perfectionnée par Newton, MacLaurin et Taylor : elle est à l'orée du calcul différentiel et intégral.

● *Christiaan Huygens* est le dernier grand précurseur de Newton et de Leibniz. Il a été conduit par ses recherches techniques sur le réglage des horloges à déterminer la trajectoire de l'extrémité pesante d'un pendule simple pour que le pendule soit rigoureusement isochrone, c'est-à-dire d'une régularité parfaite. L'étude mathématique du problème aboutit au calcul, par la méthode des indivisibles améliorée, de l'intégrale définie

$$\int_0^h \frac{dz}{\sqrt{z(h-z)}},$$

h désignant la hauteur maximale du point pesant par rapport à la position d'équilibre et z son altitude à l'instant t quelconque par rapport à cette position. La trajectoire correspondante est une courbe qu'on appelait au XVIIe siècle *roulette* (Pascal), et que les mathématiciens nomment maintenant *cycloïde*. Elle fit l'objet d'un défi célèbre lancé aux savants de l'époque, par Pascal, en 1658. L'un des points les plus importants du défi concernait la *rectification* (calcul de la longueur d'un arc) et la *quadrature* de la cycloïde.

● *Les logarithmes.* Il n'est pas inutile de parler ici de l'invention des *logarithmes*, qui remonte aux premières années du XVIIe siècle et dont les conséquences pour l'analyse ont été très importantes. Le précurseur en la matière fut un horloger suisse du nom de Joost Bürgi, vers 1603. Celui-ci fut l'assistant, à Prague, des astronomes Tycho Brahé et Kepler, pour lequel il construisit des horloges d'une précision remarquable pour l'époque. C'est grâce à la qualité de ces instruments que Kepler put établir sa théorie du système solaire, résumée par les fameuses lois qui portent son nom.

Comme tous ceux qui travaillaient sur des observations astronomiques, Bürgi avait besoin de calculer sur des grandeurs trigonométriques (sinus, cosinus, etc. d'un angle). Les astronomes se servaient alors de tables trigonométriques, dont les plus remarquables avaient été publiées par Viète en 1579. C'est pour simplifier les calculs trigonométriques que Bürgi inventa ce qu'on devait appeler ultérieurement des logarithmes. Toutefois son invention ne fut pas connue, et c'est à un baron écossais, grand propriétaire terrien et amateur éclairé, que revient, finalement, la gloire d'avoir créé ces « nombres artificiels », comme on les nommait alors, et qu'il baptisa *logarithmes* : John Napier, baron de Merchiston, connu sous le nom de Neper, qui publia en 1614 sa *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (« Description de la règle merveilleuse des logarithmes »).

Pour Neper, un logarithme est uniquement le logarithme du sinus d'un angle, tel que, notamment, sin 90° ait pour logarithme 0. A partir d'une définition géométrique simple, combinée à des considérations arithmétiques, Neper a ainsi établi une table des logarithmes des sinus d'un angle ; l'intérêt du système est alors lié à une relation célèbre qui dit que le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes des termes de ce produit, ce qui permet de simplifier grandement les



Jacques Bernoulli (1654-1705).

calculs numériques. La notion fut simplifiée et généralisée par Henry Briggs (1617), qui introduisit le concept de *logarithme décimal* d'un nombre (et non plus uniquement d'un sinus). La notion de *logarithme népérien* n'est pas de Neper ; elle a été introduite par S. Lacroix vers 1800.

Newton et le calcul des fluxions.

Les premières découvertes de Newton concernant le calcul infinitésimal datent de 1665 ; mais elles n'ont été rendues publiques que tardivement, dans les ouvrages suivants :

— 1687 - *Philosophiae naturalis principia mathematica* (*Principes mathématiques de la philosophie naturelle*), le chef-d'œuvre newtonien, où est exposée la loi de la gravitation ;

— 1704 - *Tractactus de quadratura curvarum* (*Traité de la quadrature des courbes*), écrit en 1676 et publié en appendice à son traité d'optique ;

— 1711 - *De analysis per aequationes numero terminorum infinitas*, écrit en 1689 ;

— 1736 - *Method of fluxions and infinite series* (*Méthode des fluxions et séries infinies*), écrit en latin en 1671 et publié dans une traduction anglaise après la mort de Newton.

● *Fluxion et fluente.* Soit x une grandeur qui dépend d'une variable t (Newton est préoccupé par des problèmes de mécanique, dans lesquels la variable est le temps t). Appelons *moment* de x ou de t un accroissement *infiniment petit* de ces grandeurs, et notons :

$$\text{moment de } t = 0 \qquad \text{moment de } x = \dot{x}0\,; \tag{11}$$

la grandeur $\dot{x}$ est appelée *fluxion* de x, et x est la *fluente* de $\dot{x}$. Dans notre langage actuel, $\dot{x}$ est la *dérivée* de la fonction x, et x la *primitive* de la fonction $\dot{x}$.

● *La méthode de calcul est la suivante.* Soit par exemple $x = 3\,t$; calculons sa fluxion $\dot{x}$.

1 - Donnons à t l'accroissement 0 ; il en résulte pour x l'accroissement $\dot{x}0$ et l'on peut écrire :

$$x + \dot{x}0 = 3(t + 0)\,. \tag{12}$$

2 - On tire de (12) :

$$\dot{x}0 = 3(t + 0) - x \tag{13}$$

mais, comme $x = 3\,t$, il vient :

$$\dot{x}0 = 3\,.\,0\,, \tag{14}$$

0 désignant une variation infiniment petite de t.

3 - En divisant les deux membres de gauche par l'infiniment petit 0, il vient :

$$\dot{x} = 3\,, \tag{15}$$

qui est la fluxion cherchée.

En généralisant la méthode, on montre que $x = t^n$ admet pour fluxion $\dot{x} = nt^{n-1}$, ainsi que les formules bien connues de dérivation (voir p. 113).

● *Application au calcul de l'aire d'une courbe.* Reprenons le cas de la parabole, étudiée p. 103. L'aire S que nous avons à calculer (voir figure) est une fonction de x ; on montre que cette aire a pour fluxion x^2 (c'est-à-dire a^2 dans le cas de figure). Le problème est donc de trouver la fluente de x^2 qui s'annule pour $x = 0$; cette fluente est égale à :

$$S = \frac{x^3}{3}\,. \tag{16}$$

(en effet la fluxion $\dot{S}$ de S est égale à $3\,x^2/3 = x^2$).

Leibniz et le calcul des différences.

Leibniz est arrivé aux mêmes résultats que Newton en 1672 et il les a publiés dès 1684 (*Nova methodus pro maximis et minimis*). Il a abordé le problème de la détermination des tangentes en considérant le triangle caractéristique de Pascal, défini plus haut (p. 103). Leibniz a introduit un système de notation plus clair que celui de Newton, en appelant dx le « moment », c'est-à-dire l'accroissement infiniment petit, de la grandeur x, moment qu'il nomme une *différence*. Il définit aussi la *différence de la différence* ou *différence seconde* ddx (ou d^2x) ; etc. Enfin il note la sommation à l'infini de grandeurs infiniment petites à l'aide du symbole $\int$.

Soit donc $y = f(x)$ une fonction de x ; un accroissement infiniment petit dx de la variable entraîne un accroissement infiniment petit dy de la fonction. La valeur limite du quotient dy/dx est la *dérivée* de la fonction y, c'est-à-dire ce que Newton appelait la fluxion $\dot{y}$ de cette fonction. La « différence » dy a donc pour valeur :

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) dx\,, \tag{17}$$

soit, avec la notation moderne due à Lagrange :

$$dy = y'\,dx\,. \tag{18}$$

Comme on le verra plus loin (p. 113) ces définitions manquent encore de rigueur (il y manque notamment la théorie des limites). Quoi qu'il en soit, l'outil infinitésimal est créé : il ne reste plus qu'à s'en servir pour étudier les fonctions et les relations entre les fonctions, objet principal de l'analyse.

De Leibniz à Euler et Lagrange.

Les continuateurs immédiats de Leibniz et de Newton.

Entre 1690 et 1770 environ, les premiers disciples de Leibniz et de Newton ont principalement étudié les *séries convergentes*, le calcul des infiniment petits conduisant à des calculs sur les séries. En particulier ils fournissent des méthodes pour développer les fonctions sous la forme d'une somme de termes constituant une série convergente.

Sur le continent (principalement à Paris et en Suisse) les propagateurs des théories de Leibniz furent Guillaume de L'Hospital, auteur d'un traité d'ensemble sur l'*Analyse des infiniment petits* (1696), Jean et Jacques Bernoulli (ce dernier professeur à Bâle), Varignon, Saurin, Riccati, Fagnano, etc. L'algébriste Michel Rolle se rallia à la nouvelle théorie dans les dernières années du XVIIe siècle. Les problèmes abordés à l'aide du calcul infinitésimal par ces savants concernent principalement la géométrie infinitésimale.

En Grande-Bretagne, à côté des auteurs de traités sur le calcul newtonien, on doit citer les noms des mathématiciens qui ont étudié les développements des fonctions en séries : Brook Taylor (1715), Stirling (qui établit la série dite « de MacLaurin » en 1717 ; MacLaurin la retrouvera en 1742), Abraham de Moivre. *Le Traité des fluxions* (1742) de MacLaurin clôt cette période.

Euler et l'analyse au XVIIIe siècle.

Les derniers disciples de Leibniz et de Newton s'éteignent dans les années 1740 (Jean Bernoulli meurt en 1748, MacLaurin en 1746). Il va leur succéder deux grandes générations d'analystes : la première est représentée par Daniel Bernoulli (fils de Jean Bernoulli), Euler, Clairaut et D'Alembert ; la seconde par Lagrange, Monge, Laplace et Le Gendre, celui-ci faisant le lien avec les mathématiciens du XIXe (il est mort en 1833). Ce sont les travaux d'Euler (*Institutions du calcul différentiel*, 1755, *Institutions du calcul intégral*, 1768-1770, tous deux en latin) et de Lagrange (*Théorie des fonctions analytiques*, 1797 ; *Traité de la résolution des équations numériques*, 1798 ; *Leçons sur le calcul des fonctions*, 1799), qui dominent cette période, au cours de laquelle se développe la *théorie des fonctions* qui utilise toutes les ressources du calcul infinitésimal, et la théorie des *équations différentielles* (déterminer une fonction y lorsqu'on donne une relation entre cette fonction et ses dérivées successives). Voici quelques points de repère chronologiques.

Dates	Evénements
1718	Première définition (après Leibniz) de la notion de fonction par Jean Bernoulli (voir p. 20).
1724	Riccati résout l'équation différentielle qui porte son nom, de la forme : $y' = P(x) + yQ(x) + y^2 R(x)$.
1728	Euler commence à se poser le problème du calcul des variations δI d'une intégrale I, en rapport avec ce qu'on nomme des « problèmes d'extremum S ». De ces travaux naîtra, en 1744, un traité d'ensemble sur le *Calcul des variations*, nouvelle branche de l'analyse.
1734	Euler introduit les *équations aux dérivées partielles.*
1747	D'Alembert étudie l'équation aux dérivées partielles des cordes vibrantes : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
1748	Euler : étude systématique des fonctions élémentaires, classées en algébriques et transcendantes, dans l'*Introduction à l'analyse des infinis.*
1749	Généralisation de la notion de fonction par Euler (voir p. 20).
1750	Euler : résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Fagnano : publie ses recherches (entreprises à partir de 1716) sur la *rectification* (= calcul de la longueur des arcs) de l'ellipse et de l'hyperbole.
1756	Reprise du problème de la rectification de l'ellipse et de l'hyperbole par Euler ; la solution conduit à calculer des intégrales contenant la racine carrée d'un polynôme du 3e ou du 4e degré, et qu'on nomme des *intégrales elliptiques* (elles furent dénommées ainsi par Le Gendre). Le problème du calcul des intégrales elliptiques devant être résolu au XIXe siècle seulement, par Abel.
1762	Lagrange : *Mémoire sur le calcul des variations* ; Lagrange perfectionne le symbolisme, généralise la méthode d'Euler, et applique le nouveau calcul à des problèmes de mécanique et de minimums.
1767	D'Alembert développe la *théorie des limites*, base de l'analyse.
1772	Lagrange : *théorie des fonctions*, fondée sur l'emploi des développements en série (ses travaux seront présentés d'une façon systématique dans les traités de 1797 et 1799, déjà cités). Lagrange introduit la notation $y' = f'(x)$ pour désigner la dérivée de la fonction $y = f(x)$.
1783	Le Gendre : introduction, dans le calcul de l'attraction par un point extérieur, des coefficients du développement de $\sqrt{1 - 2\,\alpha x + x^2}$ selon les puissances croissantes de α (*polynômes de Le Gendre*). Clairaut : définition de la fonction *potentiel V.*
1785	Laplace montre que la fonction $V(x, y, z)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0\,.$
1786-1793	Travaux de Le Gendre sur les intégrales elliptiques (classification, réduction aux formes canoniques, approximations).
1788	Lagrange : *Mécanique analytique.*
1797-1799	Publication des grands traités d'algèbre et d'analyse de Lagrange.

L'analyse au XIXe siècle.

Le XIXe siècle est marqué, dans le domaine de l'analyse, par les idées fulgurantes de Gauss, la grande et rigoureuse synthèse de Cauchy, les applications multiples de l'analyse à la physique théorique, la solution des problèmes en suspens concernant les séries et les intégrales elliptiques (Le Gendre, Jacobi, Abel), le large développement de la théorie des fonc-

tions d'une variable complexe et des fonctions analytiques, la généralisation de cette théorie par Riemann et Weierstrass, qui abordent systématiquement le problème des discontinuités, et la création de la théorie des ensembles par Cantor.

Une chronologie, même succincte des travaux innombrables des mathématiciens du XIXe siècle dans le domaine de l'analyse exigerait plusieurs pages de ce volume. Nous nous bornerons donc à classer certains problèmes fondamentaux.

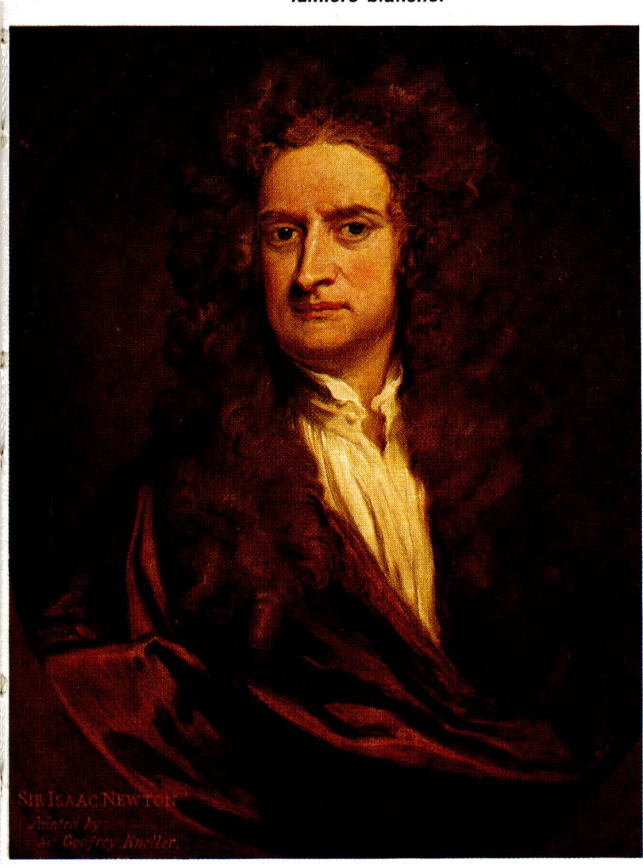
Théorie des fonctions et séries.

● *Cauchy*, dont l'œuvre s'étend sur la première moitié du XIXe siècle (il est mort en 1857) a donné une nouvelle définition de la continuité des fonctions, qui reste encore à la base de la théorie des fonctions (1821), et il a été l'un des fondateurs de la *théorie des fonctions d'une variable complexe* (1821-1825), avec Gauss, qui s'intéressait au problème depuis 1799.

● *Les fonctions elliptiques* sont des fonctions rationnelles de deux variables dépendantes x et y, où y est la racine carrée d'un polynôme en x du 3e ou du 4e degré ; elles interviennent, comme on l'a dit p. 104, dans le calcul des arcs d'ellipse (*rectification de l'ellipse*), d'où leur nom. Le Gendre y consacra la majeure partie de ses travaux, de 1785 jusqu'à 1832, époque à laquelle il publie un gros traité en trois volumes sur la question, sans l'avoir vraiment résolue.

En fait, le problème du calcul des intégrales elliptiques exigeait d'être abordé d'une manière non classique, c'est-à-dire non « legendrienne ». Cette méthode, Gauss l'avait découverte dès 1798, mais, fidèle à une attitude ésotérique qu'il conserva jusqu'à sa mort, il ne l'avait pas fait connaître à ses contemporains. De sorte que la solution de ce grand problème d'analyse ne fut obtenue qu'en 1828 et 1829, par Jacobi et par le jeune Abel, dont la petite histoire retiendra la précocité (il est mort à 27 ans, trois ans avant Galois). Abel a montré que les intégrales elliptiques étaient un cas particulier d'intégrales plus générales appelées *intégrales abéliennes*, et qu'on pouvait les résoudre simplement en pratiquant une transformation appelée *inversion d'une fonction.* Jacobi prolongea les travaux d'Abel en décrivant les quatre fonctions elliptiques fondamentales, exprimées à l'aide de fonctions exponentielles appelées les *fonctions* θ, qui jouent aussi un rôle très important en théorie des nombres.

Sir Isaac Newton (1642-1727) : il fut l'un des plus illustres hommes de science de tous les temps. Ses découvertes les plus importantes concernent l'invention du calcul différentiel et intégral, la théorie de la gravitation universelle et la théorie de la lumière blanche.



Portrait de G. Kneller, 1702. National Portrait Gallery, Londres. Ph. © du Musée-Photeb.

● *Dans la deuxième partie du XIXe siècle*, la théorie des fonctions s'élargit considérablement, à partir, notamment, des résultats obtenus par Abel.

— Dès 1844, Hermite transforme la théorie des fonctions elliptiques, en les rattachant non pas aux intégrales de Le Gendre mais à la fonction θ dont il vient d'être question. Il découvre ainsi une fonction invariante quand on change la variable x en :

$$x' = \frac{ax + b}{a'x + b'} \quad (ab' - ba' = 1), \qquad (1)$$

a, b, a' et b' étant des entiers, changement qui se nomme *transformation homographique.* Cette fonction a été appelée *fonction modulaire*, et son étude est reliée à la *théorie des groupes.* Deux fonctions modulaires particulières ont eu un succès considérable en analyse : les *fonctions kleinéennes*, étudiées par F. Klein, et les *fonctions θ-fuchsiennes* (du nom du mathématicien allemand L. Fuchs), étudiées par Poincaré en 1881.

L'étude des fonctions abéliennes (à plusieurs variables complexes) est développée par Jacobi, Göpel, Hermite, Riemann, Weierstrass, Clebsch et Gordan. Leur théorie peut être considérée comme achevée en 1866, lorsque Clebsch et Gordan les rattachent à la géométrie des courbes algébriques. Toutefois, Weierstrass devait en proposer un exposé beaucoup plus général et beaucoup plus simple vers 1880.

— Jusqu'à 1851, la théorie des fonctions est dominée par le point de vue de Cauchy, donnant le primat à l'idée de *continuité*, tant pour les fonctions de variables réelles que pour les fonctions de variables complexes. En 1851, Riemann soutient une thèse célèbre (*Fondements d'une théorie générale des fonctions d'une variable complexe*), et reprenant le point de vue exprimé par Gauss une douzaine d'années auparavant, il établit une relation entre l'étude de la fonction $f(z) = u + iv$, avec $z = x + iy$, et l'équation différentielle $u''(x) + u''(y) = 0$, qui n'est autre que l'équation d'une fonction potentiel.

La méthode de Riemann est plus générale que celle de Cauchy et repose sur des considérations dites *topologiques* qui seront expliquées ultérieurement. Elle a fait de nombreux adeptes chez les « topologistes » (Neumann, Gordan, Hankel, Clebsch, Fuchs, C. Jordan, Enrico Betti et Poincaré).

— La théorie des séries — qui fait suite aux travaux de l'École britannique du XVIIIe siècle — a été élaborée par Cauchy (séries entières, 1821), Dirichlet (notion de *convergence uniforme*, en 1840) et Abel (1826). Toutefois, et cela jusqu'à la fin du XIXe siècle, les mathématiciens se sont méfiés des séries divergentes, qualifiées de « diaboliques » par Abel. Les mathématiciens se sont surtout préoccupés de définir des *critères de convergence* : Cauchy (1812), Joseph Bertrand (1842), O. Bonnet (1843), du Bois-Reymond (1873), Dirichlet, Dedekind, Kronecker, Weierstrass. On isolera les travaux de J. Fourier (entre 1807 et 1822) sur les séries trigonométriques, dites *séries de Fourier.*

Calcul différentiel et intégral.

● *La notion d'intégrale définie* a été définie par Cauchy en 1823, par référence aux deux notions de continuité d'une fonction entre deux valeurs a et b de la variable et de limite.

Elle fut généralisée par Riemann (1854), qui introduisit en analyse ce qu'on nomme « l'intégrale au sens de Riemann » (notion reprise par Darboux en 1875). Deux autres généralisations furent données en 1894, par Stieltjes, et en 1902 par Lebesgue (« intégrale au sens de Lebesgue »).

● *La résolution des équations différentielles* (et des équations aux dérivées partielles dans le cas de fonctions à plusieurs variables) est un problème très vaste et dont la solution est indispensable aux progrès de la physique théorique, qui se construit dans le courant du XIXe siècle.

Diverses méthodes générales ont été proposées, en particulier : la méthode des *approximations successives* (Fuchs, Peano, É. Picard, etc. entre 1870 et 1900) ; la méthode dite des « *fonctions majorantes* » (c'est le « calcul des limites » exposé par Cauchy en 1831, et reprise ultérieurement par Weierstrass, Darboux, É. Picard, Poincaré, etc.) ; la méthode de la *variation des constantes* (Cauchy, 1840 ; Poincaré).

Enfin, tous les analystes du XIXe siècle ont élaboré des méthodes d'intégration, générales ou particulières, dont le détail ne peut être donné ici.

La théorie des ensembles.

Cette théorie coiffe à la fois la théorie des nombres, l'algèbre, la géométrie et l'analyse. Son histoire est résumée p. 13.



Peinture anonyme, 1787. Musée historique, Hanovre. Ph. © Bildarchiv Preussischer Kulturbesitz.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) : philosophe, historien, mathématicien, astronome, physicien, Leibniz est l'incarnation moderne de l'idéal encyclopédique de la Renaissance. Il fait partie de cette lignée de grands penseurs à qui la civilisation occidentale doit d'être ce qu'elle a été, de Platon et Aristote à Hegel et Einstein.

L'analyse au XXe siècle.

Théorie des fonctions.

● *Fonctions de variables réelles.* Leur théorie a été modifiée par l'apport de la théorie des ensembles. A l'époque de Cauchy (ou même de Riemann), on étudiait les variations d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$; en appelant *point* un nombre réel, on définissait le *voisinage* d'un point x, comme un intervalle. Après les travaux de Dedekind et Cantor, on étudie une fonction sur un ensemble quelconque de points, et le *voisinage* d'un point devient un point de cet ensemble. La perspective n'est plus la même et de nouveaux concepts, de nouvelles classifications s'imposent, d'où les théories de Baire sur les fonctions continues et discontinues (1899-1905) et de Lebesgue (1902) sur la notion de *fonction mesurable* en rapport avec une généralisation de la notion d'intégrale.

D'autres problèmes sont soulevés : sommation des séries divergentes (Cesarò), introduction des fonctions quasi analytiques (Borel, 1912), étude des séries trigonométriques et des ensembles analytiques (Luzin, 1930), introduction des fonctions presque périodiques (H. Bohr, 1922 ; H. Weyl ; K. Schwarz ; etc.).

● *Fonctions de variables complexes.* La classification de ces fonctions par les analystes du XIXe siècle laisse à désirer ; elle a été reprise avec plus de rigueur par É. Borel, P. Montel, Goursat, Men'šov, etc. (fonctions *monogènes*, *analytiques*, *holomorphes*, etc.). La théorie des fonctions entières a été entreprise et complétée par Poincaré, Hadamard, É. Borel, Valiron, et synthétisée par R. Nevanlinna, et l'étude des *familles normales* de fonctions a été menée par des mathématiciens de toutes Écoles durant la première moitié du XXe siècle.

Il serait vain, ici, de proposer des listes de noms et de dates qui n'évoqueraient pas grand-chose chez la plupart de nos lecteurs. L'idée générale à retenir est que, de 1902 à 1970 environ, les fonctions des variables complexes ont été approfondies, classées en familles, structurées, grâce à une multitude de travaux de la communauté des mathématiciens.



Leonhard Euler (1707-1783). *Ce grand mathématicien helvétique a été le maître à penser des mathématiciens du XVIIIe siècle. Son œuvre, à peu près uniquement consacrée à l'analyse (calcul infinitésimal, théorie des fonctions), est capitale.*

Équations différentielles.

Elles ont bénéficié de la théorie des groupes (Picard, 1883 ; J. Drach, 1893 ; J. F. Ritt, 1950). Les équations aux dérivées partielles ont été traitées analytiquement par Élie Cartan (1901), Janet (1913), Vessiot (1924), etc. Ici aussi, les travaux sont devenus rapidement innombrables, et leur présentation synthétique est impossible dans le cadre de cet ouvrage.

Signalons simplement l'apport de la topologie dans ce domaine (Leroy, Schauder, 1933), des théories probabilistes, de l'analyse fonctionnelle, etc.

Généralisation de l'analyse.

● *L'analyse fonctionnelle* a pour origine les travaux de Volterra, vers 1900. Elle se propose pour but l'étude d'une fonction d'une infinité de variables. Cette infinité de variables peut être représentée par les points d'une ligne courbe (« fonctions de lignes »), ou par les valeurs prises par une fonction d'un nombre fini de variables (« fonctions fonctionnelles »). En 1915, M. Fréchet a élargi le domaine de l'analyse fonctionnelle en l'étendant à un ensemble de variables abstraites (non nécessairement numériques).

● *L'analyse générale* a pour objet l'étude des transformations d'éléments y de nature quelconque (pas nécessairement numérique) en éléments quelconques, transformations notées par la fonction $Y = f(y)$. Cette théorie généralise les concepts classiques (continuité, différentiation, etc...) et en particulier le concept de *limite*, qui devient, ici, le concept de *contiguïté*. On rejoint alors les préoccupations de la *topologie générale* (voir p. 127).

NOTIONS FONDAMENTALES.

L'introduction historique qui vient d'être faite montre qu'il existe, en analyse, des théories nombreuses et diverses, reliées par certains liens, par exemple par le fait qu'on utilise dans toutes ces théories des notions comme *infiniment petit, continuité, limite, différentielle, intégrale*, etc. Il ne peut être question, ici, de résumer un cours d'analyse : nous allons nous contenter d'en présenter les grandes lignes. Pour cela nous étudierons d'abord les notions fondamentales sans lesquelles aucune explication n'est possible. Nous aborderons par la suite, un par un, les domaines les plus importants de l'analyse (théorie des fonctions d'une variable réelle, d'une variable complexe, de plusieurs variables, calcul différentiel et intégral, etc.).

Structures des ensembles de l'analyse.

Les objets de l'analyse.

L'analyse mathématique étudie divers objets qui se nomment : nombres réels, nombres complexes ou hypercomplexes, fonctions, opérations sur les nombres et les fonctions, etc. Ces objets constituent des ensembles et, si l'on définit sur ces ensembles certaines lois de composition, nous pouvons parler de leur *structure* (voir p. 37).

Lorsque les mathématiciens ont inventé ou découvert les objets de l'analyse, ils ne les ont pas d'abord considérés comme appartenant à un ensemble muni d'une structure déterminée, pour la bonne raison que cette notion est très récente (elle a quelque 100 ans d'âge, alors que l'analyse a environ 300 ans). Ils ont donc défini ces objets et les opérations sur ces objets avec plus ou moins de rigueur, et cela leur a parfois joué des tours pendables (voir, par exemple, nos remarques sur les séries, p. 52), car telle formule, telle loi, valable pour certains objets dans certaines conditions et qui semble « aller de soi », peut devenir fausse lorsque les conditions changent.

Depuis un siècle environ — un peu moins peut-être — on a pris l'habitude en mathématiques de définir les objets d'une théorie à l'aide d'*axiomes* indépendants, compatibles, et en nombre aussi restreint que possible. Ce faisant, on prend une assurance contre toutes les conséquences absurdes (donc fausses) des notions ou des opérations mal définies.

Structures fondamentales de l'analyse.

La plupart des ensembles dont nous aurons à traiter ont une structure d'espace vectoriel sur un corps K. Si cette expression vous semble mystérieuse, reportez-vous à la p. 46 où elle est expliquée. En bref, cela signifie que les éléments d'un ensemble E sont eux-mêmes des ensembles de 1, 2, 3, ... n éléments d'un corps K ; nous nommerons les éléments appartenant à E des *points* ou des *vecteurs* (ne pas confondre le sens général de ce terme avec le sens particulier qu'on lui donne en géométrie élémentaire) et les éléments appartenant à K des *scalaires*. Un élément $\boldsymbol{x}$ de E s'écrira :

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x} = (\alpha), \\ \boldsymbol{x} = (\alpha, \beta), \\ \boldsymbol{x} = (\alpha, \beta, \gamma), \\ \boldsymbol{x} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta), \\ \dots \\ \boldsymbol{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \end{array}\right. \qquad (1)$$

selon qu'il appartient à un espace vectoriel à une, deux, trois, quatre, ..., n dimensions. Les scalaires tels que α sont les *composantes* du vecteur $\boldsymbol{x}$ (on dit aussi ses *coordonnées*). Ajoutons enfin que les scalaires α, β, ... peuvent être des « n'importe quoi », du moment qu'on peut les combiner selon les axiomes de la structure de corps, énoncé p. 43 ; ici, nous supposerons toujours que ces scalaires sont des *nombres*, réels ou complexes (le corps $\mathbb{R}$ des réels et le corps $\mathbb{C}$ des complexes sont décrits pp. 53-57).

Si nous définissons axiomatiquement des propriétés ou des opérations supplémentaires dans un espace vectoriel, cet ensemble possédera une structure nouvelle, et nous lui donnerons un autre nom. Nous allons étudier rapidement ici les *espaces métriques* et les *espaces vectoriels normés*.

● *Espaces métriques.* Des éléments — que nous nommerons *points* — constituent un *espace métrique* E si l'on peut définir une règle qui fait correspondre à deux points quelconques x et y un nombre $D(x, y)$ appelé *distance entre x et y* et tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} 1 - D(x, y) > 0, \text{ pour } x \neq y \,; \\ \quad D(x, x) = 0, \text{ pour tout } x \,; \\ 2 - D(x, y) = D(y, x) \,; \\ 3 - D(x, z) \leqslant D(x, y) + D(y, z), \text{ pour tout } x, y, z \,. \end{array}\right. \qquad (2)$$

La règle D est la *métrique* de l'espace E.

L'exemple le plus simple d'un espace métrique est la droite numérique : les éléments x, y, ... sont les points de la droite (c'est-à-dire les nombres réels), et la distance $D(x, y)$ n'est autre que la valeur absolue de la différence des deux nombres x et y, soit $D(x, y) = |x - y|$.

— Il est important de définir la notion d'espace borné. Nous allons utiliser les définitions fondamentales sur les relations d'ordre (p. 17).

1 - Un ensemble $A \subset E$ est dit *borné* si, pour tout $x \in E$ et quel que soit $y \in A$, la distance $D(x, y)$ est majorée par une constante fixe. Il est dit *non borné* si, pour tout nombre réel C, il existe dans A deux points x, y, tels que $D(x, y) > C$. Si $A = E$, l'espace E est dit lui-même borné ou non borné.

2 - On appelle *boule ouverte* l'ensemble des points $x \in E$ tels que $D(x, x_0) < r$; x_0 est le *centre* de la boule. Si l'on a $D(x, x_0) \leqslant r$, la boule est dite *fermée*.

3 - Toute boule de centre x_0 est dite *voisinage* du point x_0.

— Ces définitions nous permettront de définir une *suite convergente* et sont à la base de la *théorie des limites*, étudiées ci-après, au paragraphe **C**. Nous verrons aussi que divers ensembles de fonctions peuvent être munis d'une métrique D et constituer, par conséquent, des espaces métriques.

● *Espace vectoriel normé.* Comme on l'a dit, c'est un espace vectoriel doté d'une métrique. Prenons le cas très simple (et très important) des nombres réels. Ils forment un corps $\mathbb{R}$, mais on peut aussi les considérer comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, chaque nombre étant un vecteur à une composante.

Pour définir une métrique dans $\mathbb{R}$, choisissons un point fixe O, et associons à chaque $x \in \mathbb{R}$ sa distance au point O, notée $|x|$, satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} 1 - \text{Si } x \neq 0,\ |x| > 0 \,;\quad |0| = 0. \\ 2 - \text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{R},\ |\lambda x| = |\lambda|\,|x|. \\ 3 - |x + y| \leqslant |x| + |y|. \end{array}\right. \qquad (3)$$

$|x|$ est appelé *norme* du vecteur point x. Si l'on définit la distance entre deux points x et y par $D(x, y) = |x - y|$, on constatera que (3) est bien équivalent à (2), c'est-à-dire qu'un espace vectoriel normé est métrique : on peut donc y mesurer la distance entre deux de ses points et se servir de la méthode appelée « passage à la limite ». Un espace vectoriel normé qui respecte en outre le *critère de Cauchy* (voir ci-après, p. 107) est dit *complet* ; on l'appelle aussi *espace de Banach*.

Suites convergentes.

Définition.

Considérons les points $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ d'un espace métrique E ; ils constituent ce qu'on nomme une *suite*, qu'on peut écrire $\{x_n\}$, les accolades soulignant qu'il s'agit d'un ensemble de points de cet espace, ou x_n s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Soit maintenant un point x de l'espace considéré et étudions la distance $D(x, x_n)$ d'un point x_n à x, c'est-à-dire le nombre $D(x, x_n)$. Si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$ (et donc aussi petit que l'on veut), on peut trouver un nombre entier N, tel que, pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$D(x, x_n) < \varepsilon \,; \qquad (1)$$

la suite x_n est dite *convergente vers x*. En d'autres termes, si tous les points de la suite, à partir d'un point quelconque, appartiennent à toute boule de centre x (et de rayon ε), la suite est convergente vers x. On écrit :

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n \,, \qquad (2)$$

ce qui se lit : « x = limite de x_n quand n tend vers l'infini » ; ou encore :

$$x_n \to x \qquad (3)$$

(lire : « x_n converge vers x »).

Le lecteur a bien noté qu'on ne peut parler de suite convergente que si l'espace auquel appartient x est muni d'une métrique ; sinon la notion n'aurait pas de signification. Enfin, s'il n'existe aucun $x \in E$, tel que $x_n \to x$, la suite est dite *divergente*.

Exemples et problèmes.

● *Exemples.* Si E est l'espace des réels, avec la métrique $D(x, y) = |x - y|$, la suite est dite numérique. Prenons par exemple la suite $x_n = 1/n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Est-elle convergente et, si oui, vers quel nombre converge-t-elle ? Il ne suffit pas de dire « on voit bien que plus x est grand, plus $1/n$ est petit, donc la limite de x_n pour $n \to \infty$ est 0 ». Le résultat est vrai, mais la manière dont on l'obtient n'est pas rigoureuse (et pourtant on procédait de la sorte au XVIIIe siècle !).

Il faut raisonner ainsi : choisissons un entier naturel

$N > 1/\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) ; alors, pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon \ ; \qquad (4)$$

donc, puisque $x_n = 1/n$:

$$0 < x_n < \varepsilon \ . \qquad (5)$$

De sorte que les points x_n, quel que soit $n \geqslant N$, appartiennent à toute boule de centre O et de rayon ε : donc $x_n \rightarrow x$.

Si l'on ne prend pas la précaution de raisonner avec autant de rigueur, on ne se trompera sans doute pas pour la suite $x_n = 1/n$; mais pour des suites plus sophistiquées, la convergence n'est pas aussi évidente, et il faudra faire appel à ce type de raisonnement.

● *Le problème général* posé par une suite dans un espace métrique est donc de décider si elle est ou non convergente. Un certain nombre de théorèmes, que nous n'énoncerons pas ici, permettent de résoudre ce problème sans refaire toujours les mêmes et fastidieuses démonstrations. Par exemple on démontre que si les suites numériques x_n et y_n convergent respectivement vers x et y, alors leur somme $x_n + y_n$ converge vers $x + y$; etc.

● *Deux définitions* importantes peuvent maintenant être introduites.

— Si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier naturel N on peut trouver un nombre n tel que :

$$D(y,\ x_n) < \varepsilon \ , \qquad (6)$$

le point y est appelé une *valeur d'adhérence* de la suite x_n.

Cette définition — à première vue — ressemble à celle d'un point de convergence, les relations (1) et (6) ayant la même forme. Mais il ne faut pas s'y tromper, et nous allons le comprendre en examinant deux boules dont le centre est x dans un cas (valeur de convergence) et y dans l'autre (valeur d'adhérence) :

1 - si x est une valeur de convergence, c'est-à-dire la limite de x_n, cela signifie que *tous* les points x_n appartiennent à la boule de centre x et de rayon ε si l'on prend n suffisamment grand ;

2 - si y est une valeur d'adhérence, cela signifie que, si n est suffisamment grand, *des* points x_n appartiennent à la boule, *mais pas nécessairement tous*.

En d'autres termes, si la suite x_n est convergente, sa limite x est une valeur d'adhérence *unique*, et c'est pourquoi on peut l'appeler « limite ». Sinon, il peut exister une ou plusieurs valeurs d'adhérence (il peut aussi ne pas exister de valeur d'adhérence) et la suite ne converge pas (voir exemples au paragraphe *c* ci-dessous).

— La deuxième définition à introduire est celle de *point d'accumulation*. Soit A un sous-ensemble d'un ensemble métrique E et y un point quelconque de E ; si toute boule de centre y contient un point $x \in A$ autre que y, y est dit *point d'accumulation* de l'ensemble A. Comme nous avons dit plus haut qu'une boule de centre x_0 s'appelait aussi un *voisinage de* x_0, nous pouvons aussi nous exprimer ainsi : y est un point d'accumulation de l'ensemble A si tout voisinage de y contient $x \in A$ ($x \neq y$).

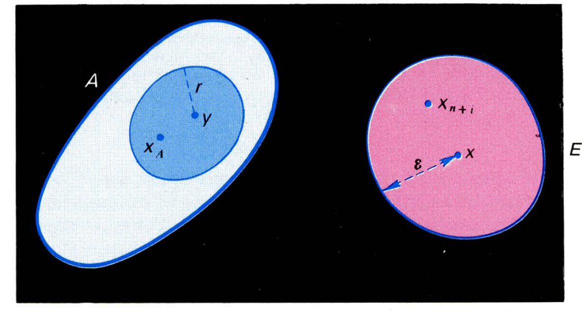
Représentation et compléments.

● *Droite numérique.* Soit l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ; son image est une ligne droite infinie, dont chaque point (au sens géométrique) est l'image d'un point (au sens ensembliste) appartenant à $\mathbb{R}$, c'est-à-dire d'un nombre réel x, y, ... Définissons la distance entre deux points x et y comme la valeur absolue $|x - y|$ de la différence des deux réels x et y : l'ensemble $\mathbb{R}$ est alors un espace métrique. Une *boule* de centre x et de rayon ε est figurée par un segment de centre x et de longueur $2\,\varepsilon$. Une suite x_n est convergente vers x si, pour n suffisamment grand, *tous* les points images des nombres x_n appartiennent à ce segment. En revanche x n'est qu'une simple valeur d'adhérence si, pour n suffisamment grand, il existe un/des points à l'intérieur du segment de centre x, mais aussi un/des points à l'extérieur de ce segment.

● *Ensembles quelconques.* Soit un espace métrique E dont la nature des éléments, que nous appelons des points, ne nous intéresse pas ici. On peut utiliser les diagrammes ensemblistes classiques pour figurer une boule de centre x et de rayon ε dans cet ensemble. Un point x_n appartient à la boule si le nombre $D(x,\ x_n)$ est inférieur ou égal à ε (bien entendu, il faudrait définir la règle de détermination du nombre D, mais cela fait partie, précisément, de la donnée d'espace métrique).

Si, à partir de n suffisamment grand, un élément $x_n \in E$ et *tous les éléments* x_{n+1}, x_{n+2}, ... se trouvent dans la boule $(x,\ \varepsilon)$, la suite $\{x_n\}$ converge vers x. Si, toujours dans les mêmes conditions, certains éléments à partir de x_n se trouvent dans la boule et d'autres à l'extérieur de la boule, x est une valeur d'adhérence pour la suite $\{x_n\}$. Enfin la boule $(y,\ r)$ dans A contient au moins un point autre que y appartenant à A : y est un point d'accumulation de l'ensemble A.

E est un espace métrique, dont les points** x, x_1, **etc., sont les éléments. La suite** $\{x_n\}$ **converge vers** x **si, pour** n **suffisamment grand, tout point tel que** x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+i}, ..., **appartient à la boule (en rose). Si certains points** x_{n+i} **n'appartienne pas à la boule,** x **est une valeur d'adhérence. Enfin** y **est un point d'accumulation de** A **(en bleu) si la boule** $(y,\ r)$ **contient un point de** A **autre que** y **(le point** x_A **par exemple).



● *Remarques complémentaires* :

1 - Il existe des théorèmes assurant l'existence ou la non-existence de points d'accumulation ou de valeurs d'adhérence pour certaines grandes classes d'ensembles (par exemple, le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les réels : tout segment $[a,\ b]$ des réels possède au moins un point d'accumulation ou une valeur d'adhérence).

2 - Étant donné une suite x_1, x_2, ..., s'il existe un entier N tel que, pour n et $m \geqslant N$, on ait $D(x_n,\ x_m) \leqslant \varepsilon$ (c'est-à-dire que, pour n et m suffisamment grands, la distance entre x_n et x_m devient aussi petite que l'on veut), la suite est dite *suite de Cauchy*. On démontre que toute suite convergente est une suite de Cauchy et que toute suite de Cauchy est bornée.

3 - Un espace métrique est dit *complet* si toute suite de Cauchy de ses éléments converge vers un élément de cet espace (c'est le cas des réels, dotés de la métrique $|x - y|$). Un espace vectoriel normé complet est un *espace de Banach* (voir ci-contre, p. 106).

4 - Un espace non complet peut être inclus dans un espace complet (théorème de Hausdorff).

5 - Un espace métrique dans lequel toute suite $\{x_n\}$ possède une valeur d'adhérence est appelé *compact*. On démontre que tout espace compact est complet.

Conclusion pratique.

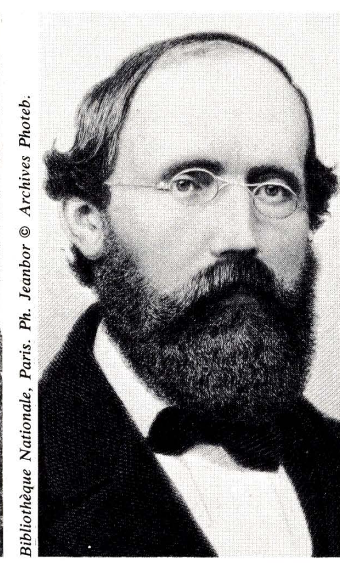
Nous raisonnerons principalement sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, muni de la métrique $D(x,\ y) = |x - y|$. D'après ce qui vient d'être dit, c'est un espace complet. Donc toute suite réelle x_1, x_2, ... telle que l'inégalité $|x_n - x_m| < \varepsilon$ est satisfaite pour tout $\varepsilon > 0$, dès que n et m sont plus grands que N est une suite convergente. Cette propriété est appelée *critère de Cauchy*, et elle n'a rien d'évident *a priori*.

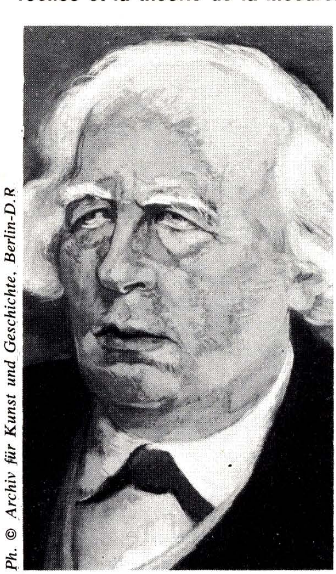
En revanche, $\mathbb{R}$ n'est pas compact, car il existe des suites réelles qui n'ont pas de valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$ (par exemple la suite 1, 2, ..., n, ...). Toutefois, puisque nous avons dit (remarque n° 1) que tout intervalle $[a,\ b]$ possédait au moins une valeur d'adhérence, l'intervalle $[a,\ b]$ est compact : nous dirons que $\mathbb{R}$ est *localement compact*.

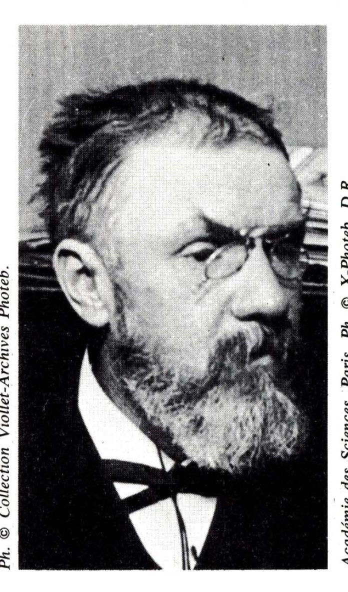
Lorsque nous aborderons le développement de l'analyse, et principalement la théorie des fonctions, nous serons conduits à examiner la ou les valeurs prises par une fonction $f(x)$ quand x tend vers une valeur x_0 particulière. Si x est réel et si $f(x)$ est réel, nous pourrons utiliser les définitions et propriétés des suites convergentes pour étudier ce problème. Si x est complexe, il faudra s'assurer que les théorèmes sont valables sur $\mathbb{C}$. Si x n'est pas un nombre, mais « autre chose », les mêmes précautions devront être prises. Jusqu'aux environs de 1810-1820, les mathématiciens ont raisonné sur les fonctions d'une variable réelle sans trop se soucier de ces préliminaires sur les suites. Mais cette attitude interdirait tout progrès de l'analyse, et le besoin de définition rigoureuse de la convergence s'est fait sentir au début du XIX[e] siècle, si l'on voulait éviter le piège des cercles vicieux.

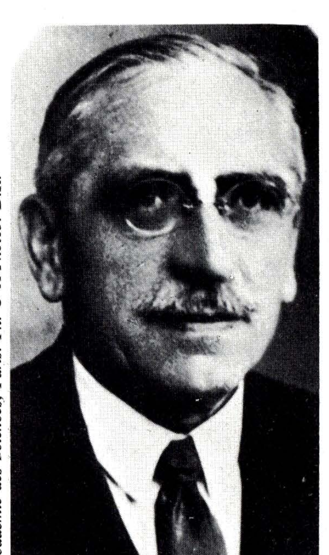
Quelques grands mathématiciens qui ont contribué aux progrès de l'analyse au XIX[e] siècle et au début du XX[e] siècle. De gauche à droite : Augustin Cauchy (1789-1854), qui est à l'origine de la théorie des limites, de la théorie des séries, de la théorie des fonctions analytiques ; Bernhard Riemann (1826-1866), qui a renouvelé la théorie des fonctions d'une variable complexe et qui est l'initiateur de la géométrie algébrique et de la topologie ; Karl Weierstrass (1815-1897) — « notre maître à tous » disait Hermite en 1900 — qui a généralisé les théories de l'analyse classique et présidé au renouveau de cette science (Peinture de F. Duda) ; Henri Poincaré (1854-1912), auteur de travaux fondamentaux sur la théorie des fonctions, la topologie, le calcul des probabilités ; Henri Lebesgue (1875-1941), qui a généralisé la notion d'intégrale, développé la théorie des fonctions de variables réelles et la théorie de la mesure.











Théorie des limites.

La notion de *fonction* a été définie en théorie des ensembles, p. 20; nous n'avons pas à revenir sur cette définition. Rappelons simplement la notation employée : on appelle x les éléments d'un ensemble E et $f(x)$ les éléments d'un ensemble F mis en correspondance par une loi f déterminée. On écrit alors :

$$E \xrightarrow{f} F \quad \text{ou} \quad x \rightarrow f(x) . \tag{1}$$

L'expression $f(x)$ se lit « f de x » ou « fonction de x ». Si x est un nombre et $f(x)$ un nombre, la fonction est numérique ; mais ce n'est là qu'un cas particulier (néanmoins très important... !). Voir aussi p. 109.

Définitions générales.

Considérons la fonction numérique $f(x) = x - 1$ et donnons à x des valeurs positives supérieures à 1, par exemple :

$$x_1 = 1{,}1 \; ; \quad x_2 = 1{,}01 \; ; \quad x_3 = 1{,}001 \; ; \ldots \; ; \quad x_n = \underbrace{1{,}00 \ldots 1}_{n \text{ termes}}, \ldots \tag{2}$$

Nous constatons *intuitivement* que la différence $x - 1$ diminue au fur et à mesure que n augmente : elle vaut 10^{-1} pour $x = x_1$, 10^{-2} pour $x = x_2$; ... 10^{-n} pour $x = x_n$, ... Comme nous avons confiance (pourquoi donc ?) dans la structure de l'ensemble des réels, nous avons tendance à affirmer : « quand n tend vers l'infini, $x_n - 1$ tend vers 0, donc quand x tend vers 1 par valeurs positives, la fonction $f(x)$ tend vers 0 et l'on peut écrire $f(0) = 1$ ». Cette intuition — vraie en l'occurrence — ne peut plus s'exercer si x et $f(x)$ ne sont pas des nombres réels. D'où la nécessité de définir d'une manière générale la notion de *limite* d'une fonction $f(x)$, quitte à retrouver des méthodes particulières dans le cas des fonctions numériques.

● *Notion de direction.* Soit E un ensemble, soit $S = \{A, B, C, \ldots\}$ un système de sous-ensembles A, B, C, ... de E. Si, pour tout couple de ces sous-ensembles, A et B par exemple, on a soit $A \subset B$, soit $B \subset A$, et si l'intersection de tous les ensembles A est vide, S est appelé une *direction*.

● *Définition de la limite d'une fonction.* Soit un ensemble E, composé d'éléments x, soit $y = f(x)$ une fonction donnée sur cet ensemble, l'ensemble F auquel appartiennent les éléments $y = f(x)$ étant doté d'une métrique D, et soit S une direction (au sens de la définition précédente). S'il existe un élément $L \in F$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ensemble $A \in S$ pour tous les éléments y duquel on a :

$$D(L, y) < \varepsilon , \tag{3}$$

l'élément L est appelé *limite de la fonction $y = f(x)$ selon la direction S.* On écrit :

$$L = \lim_{S} f(x) , \tag{4}$$

ou plus simplement :

$$f(x) \rightarrow L \tag{5}$$

(la flèche se lit « tend vers » ; ne pas la confondre avec la flèche $\xrightarrow{f}$ définissant une application).

Exemples.

● *Donnons d'abord des exemples de direction S.* Considérons l'ensemble $E = \mathbb{N}^*$ (entiers naturels) et considérons le système S de sous-ensembles A_1, A_2, A_3, ..., A_n :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 2, 3, \ldots\} ; \\ A_2 &= \{2, 3, \ldots\} ; \\ A_n &= \{n, n+1, n+2, \ldots\} ; \end{aligned} \tag{6}$$

etc.

Quels que soient deux sous-ensembles A_n et A_m, on a toujours soit $A_n \subset A_m$, soit $A_m \subset A_n$ (il y en a toujours un des deux qui est inclus dans l'autre). D'autre part, il est clair qu'il n'existe aucun nombre entier qui appartienne à la fois à tous les ensembles A_n : l'intersection de tous ces ensembles est vide. On peut donc dire que S est une *direction*, au sens du paragraphe *a*. Pour désigner cette direction, nous écrirons :

$$n \rightarrow \infty \tag{7}$$

(« n tend vers l'infini »), car on ne peut affirmer que l'intersection :

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots \tag{8}$$

n'est vide que si n tend vers l'infini : l'intersection $A_1 \cap A_2$ n'est pas vide, et pas davantage $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, etc. ; elle n'est vide que pour $n \rightarrow \infty$.

— Soit l'ensemble $E = \{\text{réels positifs } x \geqslant a\}$, qui s'écrit :

$$E = \{a, \ldots\} \tag{9}$$

Considérons le système S des sous-ensembles A_α, formés d'éléments $x \in E$, tels que $x \geqslant \alpha$; par exemple, si $\alpha = \sqrt{2} > a$:

$$A_{\sqrt{2}} = \{\sqrt{2}, \ldots\} \tag{10}$$

Ici aussi, deux sous-ensembles quelconques A_α et A_β sont toujours inclus l'un dans l'autre, et l'intersection de tous les ensembles A_α est vide : S est une direction qu'on note :

$$x \rightarrow +\infty . \tag{11}$$

— De même l'ensemble $E = \{\text{réels } x \leqslant a\}$ possède la direction :

$$x \rightarrow -\infty \tag{12}$$

et l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels possède les directions $+\infty$ et $-\infty$, qu'on note :

$$x \rightarrow \pm\infty . \tag{13}$$

● *Exemples de limites.*

— Soit $E = \{\text{réels positifs } x \geqslant a\}$ et la fonction numérique $f(x)$ appartenant à l'espace métrique F, la métrique étant définie par la valeur absolue de la différence entre deux éléments, qui est la métrique classique attribuée aux réels. Si, pour $x \rightarrow +\infty$, il existe une valeur $L \in F$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$ on ait :

$$|L - f(x)| \leqslant \varepsilon , \tag{14}$$

L est la limite de la fonction pour la direction $S = x \rightarrow +\infty$, et on écrit :

$$L = \lim_{x \to +\infty} f(x) . \tag{15}$$

— Soit $E = \mathbb{R}$ et supposons encore que les fonctions $f(x)$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire $F = \mathbb{R}$). S'il existe un réel L tel que, pour $x \rightarrow a$, on ait, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$|L - f(x)| \leqslant \varepsilon , \tag{16}$$

L est la limite de la fonction pour $x \rightarrow a$ et l'on écrit :

$$L = \lim_{x \to a} f(x) . \tag{17}$$

(Bien noter que nous ne cherchons pas la valeur de x pour $x = a$, mais le comportement de la fonction quand x tend vers a, ce qui n'est pas la même chose.)

Camille Jordan (1838-1922) : son œuvre a prolongé celle d'Evariste Galois en ce qui concerne la théorie des équations ; il est aussi à l'origine de la topologie. Le portrait ci-dessus a été fait par son oncle, P. Puvis de Chavannes, en 1858.



● *Remarques* : On démontre les théorèmes généraux suivants :

1 - Si une fonction $f(x)$ est constante et prend la même valeur L pour tout x appartenant à E, alors elle admet L comme limite suivant S.

2 - Une fonction $f(x)$ ne peut avoir qu'une limite selon S.

Cas des fonctions numériques réelles.

Nous allons considérer les fonctions définies par l'application $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, c'est-à-dire dont les variables x appartiennent aux réels et dont les valeurs $f(x)$ appartiennent aussi aux réels.

● *Généralités.* Étant donné une fonction numérique $y = f(x)$, on calcule sa limite dans une direction S ($x \rightarrow a$ ou $x \rightarrow \pm\infty$), en appliquant des théorèmes généraux dont l'ensemble constitue la *théorie des limites* et que nous n'énoncerons pas ici.

Nous retiendrons toutefois deux définitions importantes, qui nous serviront par la suite, et qui concernent la comparaison de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$.

— La fonction $f(x)$ est dite *infiniment petite par rapport à* $g(x)$ si :

$$\lim_{S} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 . \tag{18}$$

— La fonction $f(x)$ est dite *infiniment grande par rapport à* $g(x)$ si, en valeur absolue :

$$\lim_{S} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \infty . \tag{19}$$

— Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont dites *équivalentes selon S* si :

$$\lim_{S} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 . \tag{20}$$

Il résulte de (20) que si l'on a en outre :

$$\lim_{S} \frac{g(x)}{h(x)} = L , \tag{21}$$

alors :

$$\lim_{S} \frac{f(x)}{h(x)} = L . \tag{22}$$

D'où une règle usuelle : pour chercher la limite d'un rapport, on peut remplacer le numérateur et/ou le dénominateur par des fonctions équivalentes.

● *Limite d'une fraction rationnelle pour $x \rightarrow \pm\infty$.* Sous sa forme générale, une telle fonction s'écrit :

$$f(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n} . \tag{23}$$

Supposons $a_0 \neq 0$ et $b_0 \neq 0$; on peut mettre $a_0 x^m$ et $b_0 x^n$ en facteur dans les deux termes, d'où :

$$f(x) = \frac{a_0 x^m \left(1 + \frac{a_1}{a_0} \frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_m}{a_0} \frac{1}{x^m}\right)}{b_0 x^n \left(1 + \frac{b_1}{b_0} \frac{1}{x} + \cdots + \frac{b_n}{b_0} \frac{1}{x^n}\right)} ; \tag{24}$$

quand $|x| \rightarrow \infty$, les termes en $1/x$, $1/x^2$, ..., $1/x^m$, ... tendent vers 0, ce qui permet d'écrire les parenthèses sous la forme $1 + \varepsilon(x)$, en convenant d'écrire sous la forme $\varepsilon(x)$ toute fonction qui tend vers 0 quand $|x| \rightarrow \infty$. L'équation (24) devient :

$$f(x) = \frac{a_0 x^m [1 + \varepsilon(x)]}{b_0 x^n [1 + \varepsilon(x)]} . \tag{25}$$

Quand $x \rightarrow \pm\infty$, $\varepsilon(x)$ tend vers zéro et :

$$f(x) \rightarrow \frac{a_0 x^m}{b_0 x^n} = \frac{a_0}{b_0} x^{m-n} ; \tag{26}$$

de sorte que :

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{si } m = n , \\ 0, & \text{si } m < n . \end{cases} \tag{27}$$

Si $m > n$, $f(x)$ a une limite infinie dont le signe est celui de a_0/b_0.

Exemple : la fonction :

$$f(x) = \frac{-3x^2 + 5x - 1}{x^2 - 7x + 3} \tag{28}$$

a pour limite $a_0/b_0 = -3$ quand $x \rightarrow \pm\infty$. De même $f(x) = ax$ tend, en valeur absolue, vers l'infini, quand $x \rightarrow \pm\infty$, avec les cas suivants :

$$a > 0 \begin{cases} x \to -\infty, \text{ alors } f(x) \to -\infty ; \\ x \to +\infty, \text{ alors } f(x) \to +\infty . \end{cases}$$
$$a < 0 \begin{cases} x \to -\infty, \text{ alors } f(x) \to +\infty ; \\ x \to +\infty, \text{ alors } f(x) \to -\infty . \end{cases} \quad (29)$$

● *Application de la théorie des limites aux suites numériques.* Nous allons retrouver ici le *critère de Cauchy* : une suite de nombres x_n possède une limite finie (= converge) si, et seulement si, pour $\varepsilon > 0$, il existe un nombre N tel que, pour tout m, $n \geqslant N$ on ait :

$$|x_m - x_n| < \varepsilon . \quad (30)$$

Un exemple des plus intéressants est celui de la suite :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, ...). \quad (31)$$

Le lecteur notera d'abord que u_n est un binôme de Newton, comme nous l'avons étudié en analyse combinatoire, p. 33 ; en faisant $a = 1$ et $x = 1/n$, et en développant le binôme selon la formule donnée à ce paragraphe, on trouve :

$$u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \cdots$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \quad (32)$$

On démontre, par la théorie des limites, que la suite u_n est convergente et l'on désigne classiquement sa limite par e :

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} . \quad (33)$$

L'examen de la formule (32) montre que e est compris entre $1 + 1 = 2$ et 3 :

$$2 < \mathrm{e} < 3 . \quad (34)$$

En faisant $n = 1, 2, 3, ...$ on peut obtenir des approximations de e, et l'on trouverait :

$$\mathrm{e} = 2{,}718\,28... \quad (35)$$



Cette photographie stroboscopique fixe à divers instants les mouvements d'un lanceur de disque. D'une façon analogue le calcul infinitésimal est utilisé pour figer un mouvement complexe et pour analyser le processus de la variation instant par instant.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE.

Généralités sur la notion de fonction.

Rappel de la définition générale.

Soit deux ensembles X et Y ; appelons X l'*ensemble de départ* et Y l'*ensemble d'arrivée.* On appelle *fonction* la mise en correspondance d'éléments x de X avec des éléments y de Y, cette opération s'appelle une application, et on la désigne usuellement par des lettres comme $f, g, h, ...$ On dit que x est la *variable*, l'*antécédent* ou l'*argument* de la fonction, et y l'*image* ou la *valeur* de la fonction. On écrit indifféremment :

$$\begin{cases} X \xrightarrow{f} Y ; \quad x \to f(x) ; \\ x \xrightarrow{f} y ; \quad y = f(x) . \end{cases} \quad (1)$$

Il peut se trouver que l'application f ne concerne qu'une partie E de l'ensemble X ($E \subset X$) et que les valeurs y de la fonction soient prises dans un sous-ensemble F de Y. $E \subset X$ est appelé *domaine de définition* de la fonction ; F est le *domaine des valeurs.* Si $E = X$, la fonction est dite *partout définie* dans X.

Fonctions de variables réelles.

Convenons de prendre comme ensemble de départ l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ; toute application $\mathbb{R} \xrightarrow{f} Y$ est une *fonction de variables réelles.*

● *Fonctions numériques et fonctions vectorielles.* Deux cas sont particulièrement intéressants, car ils correspondent notamment aux préoccupations des physiciens et à une combinatoire concrète à laquelle l'esprit humain s'est habitué depuis 2 500 ans qu'il fait des mathématiques.

— *Premier cas* : $Y \subseteq \mathbb{R}$. Cela signifie qu'à chaque réel x de l'ensemble E de définition on fait correspondre un réel $f(x)$ de l'ensemble des valeurs. La fonction est dite *numérique.* En voici quelques exemples simples.

$$y = 3x + 1 ; \quad y = -x^2 + x + 1 ; \quad y = \frac{1}{x} . \quad (2)$$

— *Deuxième cas* : Y est espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou F un sous-espace de Y). Cela signifie qu'à chaque réel x de l'ensemble E de définition, on fait correspondre un vecteur à 1, 2, ..., n composantes, selon le nombre de dimensions de l'espace Y choisi. La fonction est alors dite *vectorielle à n variables réelles.* Si $n = 1$, elle est appelée *fonction d'une variable réelle* ; si $n = 2$, elle est à deux variables réelles ; etc. On notera que, si $n = 1$, on est ramené au cas d'une fonction numérique (en effet un nombre réel peut être considéré comme un vecteur à une dimension).

Par exemple le vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ qui définit la position d'un point M dans le plan rapporté à deux axes de coordonnées est une fonction vectorielle des coordonnées x et y (réelles) du point M. La fonction :

$$\mathbf{r} = f(x, y) \quad (3)$$

est une fonction vectorielle de deux variables réelles, x et y.

● *Exemples et précisions.*

— La quantité de chaleur dégagée par un courant d'intensité I pendant le temps t dans une résistance R est donnée par la loi de Joule :

$$Q = RI^2 t , \quad (4)$$

Q est une fonction numérique de trois variables R, I et t *indépendantes* les unes des autres.

— La surface S d'un triangle dont les côtés mesurent x, y, z et dont le demi-périmètre est égal à p a pour valeur (voir p. 143) :

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} , \quad (5)$$

S est une fonction des trois variables indépendantes x, y, z ; p n'est pas une variable indépendante, car on le calcule à partir de :

$$p = \frac{x + y + z}{2} . \quad (6)$$

Nous pourrons donc écrire :

$$S = f(x, y, z) . \quad (7)$$

— Une fonction numérique exprime une relation entre des nombres réels. cette relation peut être donnée sous une forme *explicite* :

$$y = f(x) \quad (8)$$

ou sous une forme *implicite* :

$$F(x, y) = 0 . \quad (9)$$

Par exemple la fonction y donnée par la relation :

$$y^2 + x^3 = 0 \quad (10)$$

est une fonction implicite. Si nous résolvons (10) par rapport à y, il vient aussi :

$$y = \sqrt{-x^3} = -x^{3/2} ; \quad (11)$$

c'est une fonction explicite de x.

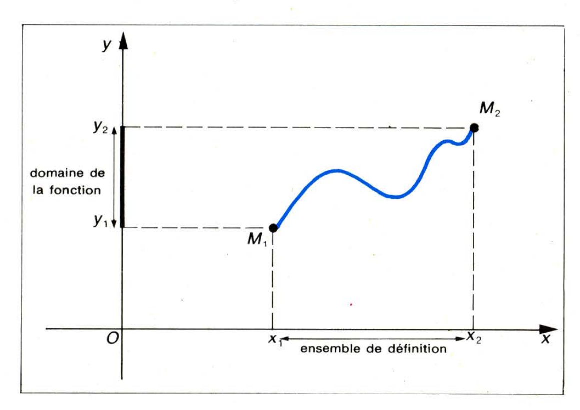
Calcul et représentation des fonctions.

● *Tables.* Certaines fonctions numériques sont d'un usage très courant ; on a donc calculé une fois pour toutes leurs valeurs, et on les a imrpimées sur des *tables fonctionnelles*, d'un emploi plus ou moins compliqué (exemples : tables de logarithmes, tables de fonctions circulaires, etc.). Ces tables ont maintenant laissé la place aux calculatrices électroniques, depuis les petites calculatrices de poche jusqu'aux « ordinateurs » géants : le programme de calcul des fonctions courantes est introduit dans la machine, une fois pour toutes, et on obtient la valeur de la fonction en appuyant sur quelques touches.

● *Graphiques.*

1 - *Fonctions d'une variable réelle* $y = f(x)$: il est commode de se faire une idée géométrique de telles fonctions en portant sur un axe Ox les valeurs de la variable et sur un axe Oy la valeur correspondante

de la fonction. Chaque couple (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... de coordonnées fournit un point du plan xOy et, en reliant tous ces points par un trait continu on obtient le *graphique* de la fonction, à savoir une courbe plane d'équation $y = f(x)$.



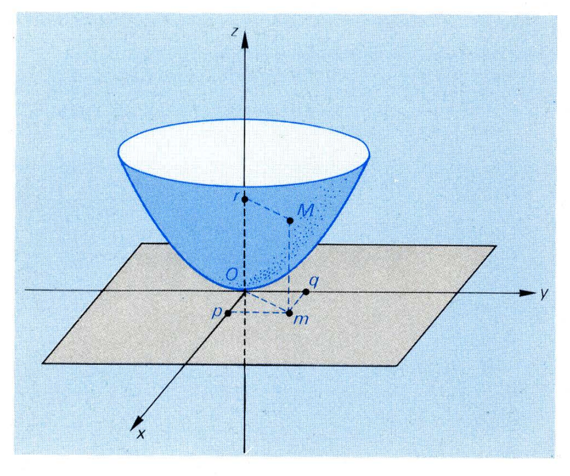
La courbe qui joint les points M_1 et M_2 est le graphique de la fonction $y = f(x)$ définie dans l'intervalle $[x_1, x_2]$ de $\mathbb{R}$.

2 - *Fonctions de deux variables réelles* : $z = f(x, y)$. A deux valeurs x_1 et y_1 des variables correspond un point m_1 du plan xOy. Portons la valeur correspondante de z_1 sur l'axe Oz perpendiculaire à xOy : on définit un point M_1 de l'espace de coordonnées (x_1, y_1, z_1), avec $z_1 = f(x_1, y_1)$. L'ensemble des points ainsi construits constitue une *surface.* Si la fonction est « simple » la surface peut souvent être dessinée facilement. Exemples :

— la fonction $z = ax + by + c$ est représentée graphiquement par un plan, dont l'obliquité par rapport aux plans du repère dépend des coefficients a et b (appelés *coefficients angulaires*) ;

— la fonction $z = x^2 + y^2$ est représentée par un paraboloïde de révolution (voir figure) ;

— etc.



La fonction $z = x^2 + y^2$ est représentée par un paraboloïde de révolution. Les coordonnées (x, y, z) du point M s'obtiennent aisément en projetant M sur xOy : on a $\overline{Op} = x$ et $\overline{Oq} = y$. La relation $x^2 + y^2 = \overline{Om}^2$ (Pythagore) permet de construire $z = \overline{Or}^2 = \overline{Om}^2$.

3 - Si le nombre n de variables dépasse 2, on ne peut plus représenter graphiquement la fonction. A ce niveau, la vision géométrique des faits est largement dépassée par la méthode analytique.

Définitions complémentaires.

● *Fonctions inverses.* Soit une fonction numérique $y = f(x)$, dont la variable indépendante est x ; il est possible d'en déduire la fonction $x = \varphi(y)$, dans laquelle y joue le rôle de variable indépendante. Les fonctions f et φ sont dites *inverses* (ou *réciproques*), et l'on écrit parfois $\varphi = f^{-1}$. L'opération qui permet de passer de f à φ (ou de φ à f) est une *inversion.*

Par exemple $y = ax + b$ a pour inverse la fonction :

$$x = \frac{y - b}{a}. \qquad (12)$$

La fonction $y = x^3$ a pour inverse :

$$x = \sqrt[3]{y}. \qquad (13)$$

La fonction $y = e^x$, e étant la limite de $(1 + 1/n)^n$ quand $n \to \infty$ (voir p. 109) a pour inverse une fonction $\varphi(y)$ que nous étudierons p. 116 et qu'on appelle, pour des raisons historiques, *logarithme népérien de y* (symbole : ln) :

$$\varphi(y) = \ln y. \qquad (14)$$

● *Fonctions univoques, multivoques.* Une fonction est dite *univoque* lorsqu'à une valeur de x correspond une et une seule valeur de y. Par exemple $y = 3x + 5$, $y = x^2$, $y = 1/x$ sont des fonctions univoques.

Quand, pour une même valeur de x, une fonction prend deux ou plusieurs valeurs distinctes, elle est dite *multivoque.* Par exemple $y = \sqrt{x}$ est multivoque, puisque pour $x = 4$ par exemple, on a $y = \pm 2$.

● *Fonctions composées.* Soit la fonction numérique $y = f(u)$, dans laquelle u est une variable réelle. Supposons que u soit elle-même fonction d'une autre variable numérique x, relation fonctionnelle que nous écrirons $u(x)$. Alors on peut écrire :

$$y = f(u) = f[u(x)] = F(x). \qquad (15)$$

La fonction $y = F(x)$ est une *fonction composée*, ou encore une *fonction de fonction* : y est fonction de x par l'intermédiaire de $u(x)$.

● *Caractères des fonctions numériques.* Les principes de description des fonctions numériques sont nombreux, puisqu'on peut choisir des critères divers.

— On peut distinguer les fonctions numériques en *fonctions algébriques* et *fonctions transcendantes*, selon que leurs valeurs sont des réels algébriques ou transcendants. Ainsi $y = ax^2 + bx + c$ est une fonction algébrique, mais $y = e^x$ et $y = \ln x$ sont des fonctions transcendantes.

— On peut les caractériser d'après le domaine géométrique qu'elles recouvrent : les *fonctions circulaires* (sin x, cos x, tan x, cot x) sont liées au cercle ; les fonctions *elliptiques*, *hyperboliques* sont liées à l'ellipse et à l'hyperbole ; la *fonction linéaire* est liée à la ligne droite.

— On peut aussi considérer leurs caractéristiques, et parler de fonctions *continues*, *monotones*, *dérivables*, etc. Mais alors nous nous apercevons que, pour découvrir ces caractères, il nous faut faire appel à des outils nouveaux, qui ont été précisément forgés par l'analyse, et en particulier à la notion de *dérivée* qui est l'instrument par excellence de l'étude des fonctions (voir ci-après, p. 113).

— Enfin il ne faut pas oublier qu'il y a des fonctions non numériques, et que leur étude est un chapitre très important de l'analyse.

● *Qu'est-ce donc qu' « étudier une fonction » ?* Ce n'est pas simplement calculer ses valeurs dans un intervalle donné. C'est se poser à son sujet de nombreuses questions sur :

1 - son domaine de définition ;

2 - sa *continuité* (voir ci-dessous, paragraphe *e*) ;

3 - la manière dont elle varie par rapport à la variable (fonction croissante, décroissante ou constante) ;

4 - ses valeurs remarquables pour certaines valeurs de la variable (valeurs maximales et minimales, etc.) et ses limites quand la variable tend soit vers $\pm\infty$, soit vers des valeurs particulières ;

5 - la traduction graphique de tous ces faits, et l'allure de la courbe obtenue.

La clef de tous ces problèmes est fournie par l'étude des *dérivées* d'une fonction. Mais, avant d'aborder cette notion, il nous faut définir avec rigueur la notion de *fonction continue.*

Continuité.

● *Définition.* L'idée de continuité est intuitive : une courbe qu'on peut tracer sans lever la main qui tient le crayon est « continue » ; si le tracé est interrompu en un point et reprend en un autre, on parle de « discontinuité » au point de rupture. C'est à Bolzano (1817) et à Cauchy (1821) que l'on doit les premières définitions rigoureuses de la *continuité* d'une fonction. Voici la définition donnée par Cauchy dans son cours d'analyse :

> *« La fonction f(x) restera continue par rapport à x entre les limites données* [entre ces limites, la fonction est supposée partout définie] *si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même ».*

Nous pouvons exprimer cette définition simple avec le langage des mathématiques modernes. Supposons que l'ensemble E auquel appartient la variable x et l'ensemble F auquel appartient la fonction $f(x)$ sont des espaces métriques, et soit $a \in E$ un point fixe non isolé (c'est-à-dire un élément déterminé de E qui peut être le centre d'une boule). La fonction $f(x)$ est dite *continue pour* $x = a$ si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \qquad (16)$$

(Cette définition suppose en outre qu'on ait défini la direction $x \to a$ comme on l'a fait au n° **517.2, C.**) Autrement dit, $f(x)$ est continue pour $x = a$ si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une distance δ telle que $D(x, a) < \delta$ implique

$$D[f(x), f(a)] < \varepsilon. \qquad (17)$$

Si E et F sont des ensembles de réels munis de la métrique $|x - y|$, alors l'inégalité (17) s'écrit :

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon. \qquad (18)$$

● *Remarques.*

1 - Une autre définition de la continuité, liée à la théorie des limites et des suites convergentes, est la suivante : $f(x)$ est continue pour $x = a$ si, pour toute suite convergente $x_n \to a$ de la variable on a une suite convergente $f(x_n) \to f(a)$ de la fonction.

2 - Tout point tel que a est appelé un *point de continuité.*

3 - Si deux fonctions numériques $f(x)$ et $g(x)$ sont continues pour $x = a$, alors :

— $f(x) + g(x)$ est continue pour $x = a$;

— $f(x)\, g(x)$ est continue pour $x = a$;

— $f(x)/g(x)$ est continue pour $x = a$ si $g(a) \neq 0$.

4 - De ces trois propositions il résulte :

— que tout polynôme

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

est continu pour toute valeur de x ;

— que toute fonction rationnelle $P(x)/Q(x)$ est continue pour toute valeur de x différente des zéros de son dénominateur ; par exemple la *fonction homographique* :

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}, \qquad (19)$$

quotient des polynômes $ax + b$ et $a'x + b'$ est continue pour toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$, sauf pour $x = -b'/a'$, zéro du polynôme figurant au dénominateur ; de même la fonction :

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \qquad (20)$$

est continue pour toutes valeurs réelles de x, sauf pour :

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4a'c'}}{2a'}, \qquad (21)$$

qui sont les zéros de son dénominateur.

5 - Théorème de Bolzano : si une fonction $f(x)$ est continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et si elle prend des valeurs de signes contraires à ses extrémités, alors il existe dans l'intervalle un nombre c tel que $f(c) = 0$ (graphiquement, cela signifie que si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, la courbe coupe l'axe des x en un point d'abscisse $x = c$).

● *Fonctions monotones.* Soit deux valeurs x_1 et x_2 de la variable x dans un ensemble $E \subset \mathbb{R}$, et soit $f(x_1)$ et $f(x_2)$ les valeurs correspondantes de la fonction numérique $f(x)$. L'inégalité $x_1 < x_2$ implique l'une des quatre inégalités suivantes :

— $f(x_1) < f(x_2)$: la fonction est dite *croissante* sur E ;

— $f(x_1) > f(x_2)$: la fonction est dite *décroissante* sur E ;

— $f(x_1) \leqslant f(x_2)$: la fonction est dite *non décroissante* sur E ;

— $f(x_1) \geqslant f(x_2)$: la fonction est dite *non croissante* sur E.

Dans chacun des quatre cas, la fonction est dite *monotone sur E.*

En résumé, et d'une manière semi-intuitive, une fonction est croissante dans un intervalle E lorsqu'elle augmente ou diminue en même temps que la variable ; elle est décroissante dans le cas contraire. Elle est dite monotone sur E lorsqu'elle est constamment croissante ou décroissante sur cet intervalle.

● *Discontinuités.* Considérons la fonction $f(x) = x - 1$; il n'est pas difficile de voir que, lorsque $x \to 1$, $f(x) \to 0$, ce qui permet d'écrire $f(1) = 0$. Mais dire que « x tend vers 1 », cela signifie aussi bien que

l'on se rapproche de 1 par valeurs inférieures à 1 :

$$0{,}9 \dots 0{,}99 \dots 0{,}999 \dots 0{,}999\,999 \dots 0{,}\underbrace{999 \dots 9}_{n \text{ chiffres égaux à } 9} \dots \qquad (22)$$

ou par valeurs supérieures à 1 :

$$1{,}1 \dots 1{,}01 \dots 1{,}001 \dots 1{,}000\,001 \dots 1{,}\underbrace{000 \dots 1}_{n \text{ chiffres décimaux}} \dots \qquad (23)$$

Dans le premier cas, la différence $x - 1$ est négative ; dans le second cas, elle est positive, et c'est pour cette raison qu'on a considéré, plus haut, la valeur absolue $|x - 1|$ de ce genre de différences.

Pour spécifier que la limite de $f(x)$ quand $x \to 1$ est $f(1) = 0$ aussi bien lorsque x est *à gauche* de 1 qu'*à droite* de 1 ($x < 1$ ou $x > 1$), on écrit :

— quand $x \to 1$, avec $x < 1$,

$$\lim f(x) = f(1 - 0) = f(1) = 0 \,; \qquad (24)$$

— quand $x \to 1$, avec $x > 1$,

$$\lim f(x) = f(1 + 0) = f(1) = 0 \,. \qquad (25)$$

Dans le premier cas, la fonction est dite *continue à gauche* pour $x \to 1$; dans le second cas, elle est *continue à droite*. Quand elle est — comme dans notre exemple — à la fois continue à gauche et continue à droite, elle est dite *continue pour* $x = 1$, et l'on peut écrire :

$$f(1 - 0) = f(1 + 0) = f(1) \,. \qquad (26)$$

Mais il n'en est pas toujours ainsi. Par exemple, la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{x - 1} \qquad (27)$$

se comporte différemment quand x tend vers 1, selon que cette variation de x se fait par valeurs inférieures ou par valeurs supérieures à 1.

Si l'on prend pour x les valeurs : 0,9, 0,99, 0,999 999, ..., $1/g(x)$ prend successivement les valeurs -10^{-1}, -10^{-2}, -10^{-6}, ..., donc $g(x) = \{-10, -100, -1\,000\,000, \dots\}$ et l'on montrerait aisément que sa limite est $-\infty$; donc :

$$g(1 - 0) = -\infty \,. \qquad (28)$$

Si l'on fait tendre x vers 1 par valeurs supérieures à 1 : $x = \{\dots, 1{,}1, 1{,}01, 1{,}000\,001, \dots\}$, la fonction prend les valeurs $g(x) = \{\dots 10, 100, 1\,000\,000, \dots\}$ et, quand $x \to 1$, $g(x) \to +\infty$; donc :

$$g(1 + 0) = +\infty \,. \qquad (29)$$

On ne peut pas écrire $g(1 - 0) = g(1 + 0) = g(1)$: la fonction est dite *discontinue*.

Plus généralement, étant donné une fonction $f(x)$ définie sur un intervalle E, et une valeur x_0 de la variable :

— Si $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$, $f(x)$ est une fonction *continue* pour x_0 ; dans tous les autres cas, elle est *discontinue* pour x_0.

— Si $f(x_0 + 0)$ et $f(x_0 - 0)$ sont *finis et différents*, on dit que x_0 est une *discontinuité de première espèce*. Le nombre $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ s'appelle le *saut* de la fonction au point x_0 ; si, de plus,

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}, \qquad (30)$$

la discontinuité est dite *régulière*.

— Si l'une des deux valeurs (ou les deux valeurs) $f(x_0 - 0)$ et $f(x_0 + 0)$ est (ou sont) infinie(s), on dit que x_0 est une *discontinuité de deuxième espèce* (c'est le cas de $g(x) = 1/(x - 1)$).

Fonctions numériques usuelles.

Nous présenterons ici quelques fonctions très usuelles en analyse, et enseignées pour la plupart aux collégiens et aux lycéens. Nous ne justifierons pas les résultats proposés concernant la croissance, les *extrémums* (*maximums* et *minimums*) et l'allure des courbes. Signalons toutefois que ces particularités peuvent être découvertes — pour les fonctions en cause — sans utiliser les dérivées, sauf dans quelques cas que nous préciserons.

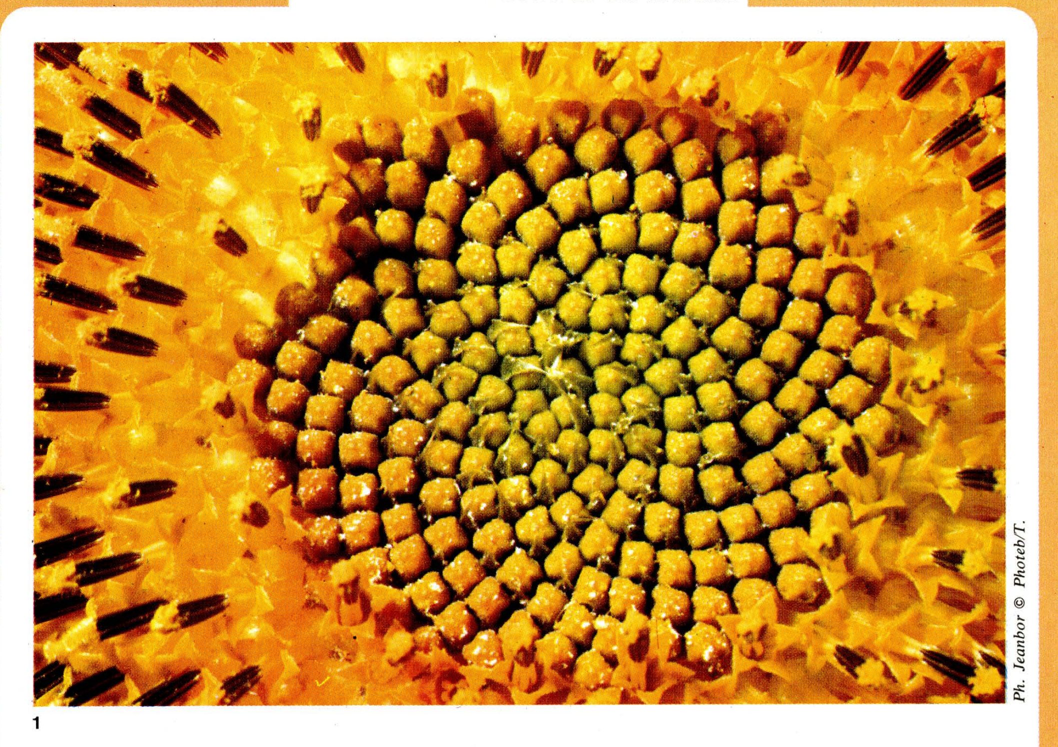
Fonctions rationnelles.

Ce sont des fonctions qui se calculent à l'aide des opérations « + », « − », « × » et « : ». Comme on l'a dit p. 110, elles sont continues pour tout $x \in \mathbb{R}$, à l'exception des valeurs de x qui annulent d'éventuels dénominateurs.

• *Fonction linéaire* (= *affine* = *du premier degré*). Sous sa forme générale elle s'écrit :

$$y = ax + b \,, \qquad (1)$$

LES MATHÉMATIQUES ET LA NATURE



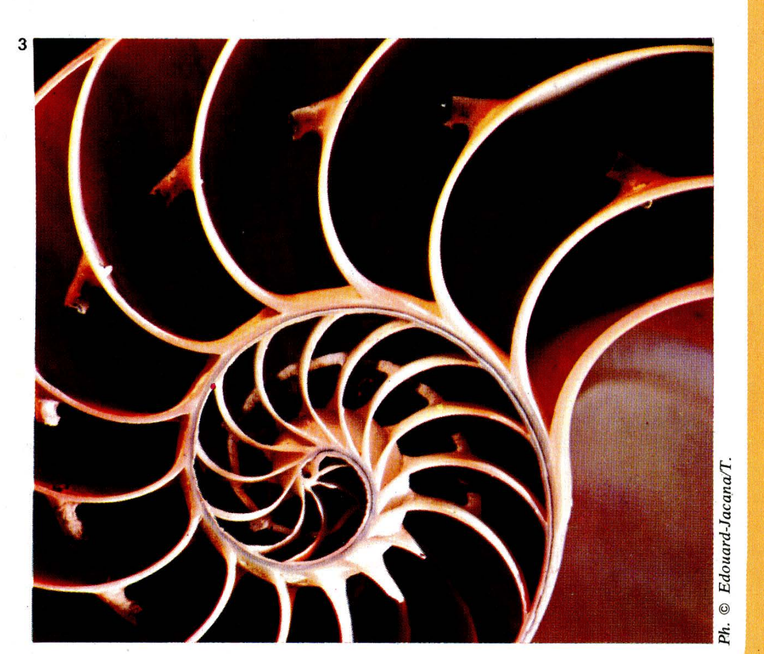
1

Ph. Jeanbor © Photeb/T.

2

Ph. © Des Prailles-Jacana/T.

3



Ph. © Édouard-Jacana/T.

Il est toujours satisfaisant pour l'esprit de constater que la réalité concrétise parfois ses rêves et ses abstractions. Voici quelques exemples de spirales naturelles.

1. Double circonvolution en spirale d'un cœur de Tournesol. Les fleurons du cœur sont disposés de façon à dessiner deux ensembles de spirales aux sens giratoires contraires.

2. Une Ammonite.

3. Coupe de la partie interne d'un Argonaute (spirale logarithmique).

a et b étant des coefficients réels. C'est une fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, croissante de $-\infty$ à $+\infty$ si a est positif, et décroissante dans le cas contraire. Elle est représentée graphiquement par une droite qui coupe l'axe des x au point d'abscisse $-b/a$ et l'axe des y au point d'ordonnée b. Le coefficient a est le *coefficient angulaire* ou *pente* de la droite, comme on l'a expliqué en géométrie analytique.

● *Fonction trinôme.* C'est la fonction du second degré :

$$y = ax^2 + bx + c. \qquad (2)$$

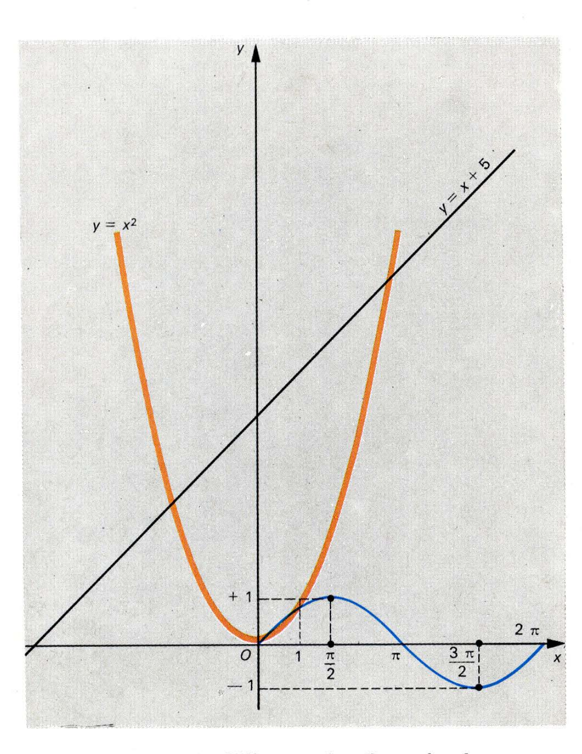
Cette fonction, continue pour tout $x \in \mathbb{R}$, possède un minimum si a est positif et un maximum si a est négatif, pour la valeur $\alpha = -b/2a$ de la variable. Ce maximum/minimum a pour valeur

$$\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}. \qquad (3)$$

La courbe représentative est une *parabole* (voir figure) dont le sommet a pour coordonnées (α, β) et dont la concavité est tournée vers le haut pour $a > 0$ et vers le bas pour $a < 0$. En faisant le changement d'axes défini par :

$$\begin{cases} X = x - \alpha, \\ Y = y - \beta, \end{cases} \qquad (4)$$

la fonction se met sous la forme $Y = aX^2$.



Graphique de différentes fonctions classiques. En noir : fonction linéaire $y = x + 5$. ***En orange :*** $y = x^2$ ***(cas particulier de la fonction trinôme*** $y = ax^2 + bx + c$, ***pour*** $a = 1$ ***et*** $b = c = 0$***). En bleu :*** $y = \sin x$ ***(voir texte).***

● *Fonction* $y = 1/x$. Cette fonction est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, sauf pour $x = 0$, qui annule son dénominateur. Elle est constamment décroissante et tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$. Établissons un *tableau de variation* de la fonction, en marquant par un double trait vertical la discontinuité (à droite et à gauche) $x = 0$.

x	$-\infty$			0			$+\infty$
$y = \frac{1}{x}$	0	↘	$-\infty$	‖	$+\infty$	↘	0

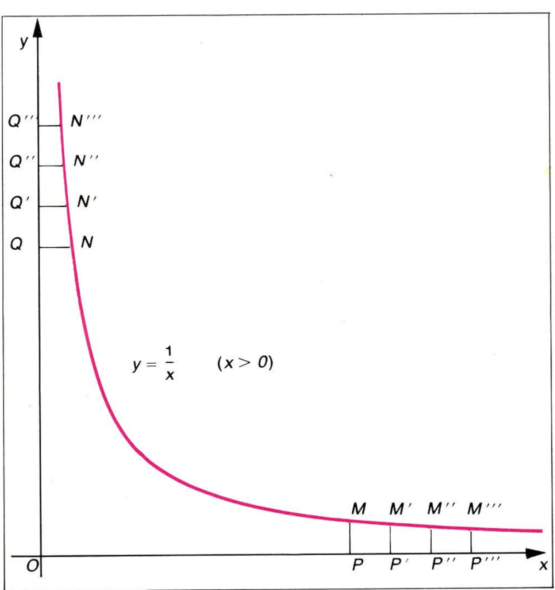
1 - Lorsque x varie de $-\infty$ à 0, la fonction varie de 0 à $-\infty$ (décroissante) ; quand $x \to -\infty$, $y \to 0$, et quand $x \to 0$, $y \to -\infty$;

2 - pour $x = 0$, il y a discontinuité ;

3 - quand $x \to 0$ en restant positif, $y \to +\infty$, puis décroît de $+\infty$ à 0 quand x varie de 0 à $+\infty$.

La courbe représentative est composée de deux « branches » : l'une dans l'angle $x'Oy'$ (non figurée ici), l'autre dans l'angle xOy ; les deux branches sont symétriques par rapport à l'origine. Étudions la branche correspondant à $x > 0$. Les points représentatifs de $y = 1/x$ se rapprochent de plus en plus de l'axe Oy quand x tend vers 0, et s'éloignent en même temps de plus en plus vers le haut. L'axe Oy est donc une droite remarquable pour la courbe représentant $y = 1/x$, car cette courbe s'en rapproche indéfiniment sans jamais la rencontrer (si elle la rencontrait, on aurait $x = 0$, ce qui est impossible, puisque $1/x$ n'a pas de signification pour $x = 0$) ; on dit que la droite Oy est *asymptote* à la courbe $y = 1/x$ en grec, *sumptōsis* = « rencontre » ; *a*- est le préfixe privatif : d'où *asymptote* = « qui ne rencontre pas ».

De même, quand x devient aussi grand que l'on veut ($x \to +\infty$), la valeur de $y = 1/x$ devient de plus en plus petite et la courbe se rapproche indéfiniment de l'axe Ox sans le couper : Ox est aussi *asymptote* à la courbe $y = 1/x$.



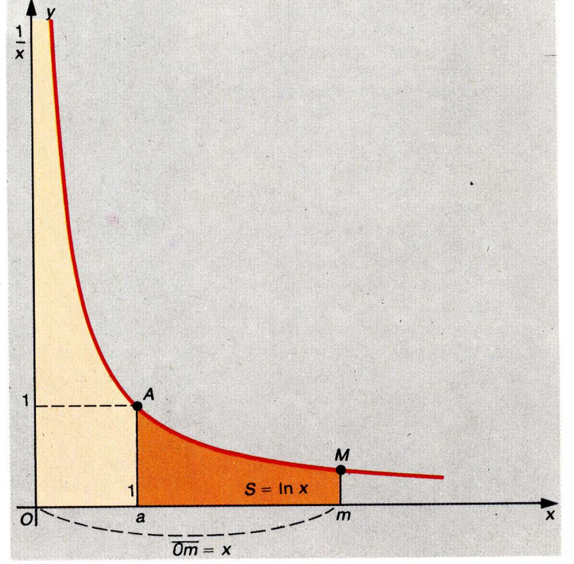
Graphique de la fonction $y = 1/x$ ***pour*** $x > 0$. ***Les distances*** *PM, P'M', P''M''*, ... ***et*** *QN, Q'N', Q''N'', Q'''N'''*, ... ***de la courbe aux axes*** *Ox* ***et*** *Oy* ***deviennent de plus en plus petites sans jamais s'annuler :*** *Ox* ***et*** *Oy* ***sont dits asymptotes à la courbe*** $y = 1/x$.

Fonctions circulaires, fonction logarithme, exponentielle.

● *Fonctions circulaires.* Voir leur définition p. 90 et leur étude ci-après, p. 117.

● *Fonction logarithme.* Considérons la fonction $y = 1/x$ pour $x > 0$, et l'aire S comprise entre la courbe, l'axe des x, l'ordonnée fixe aA et l'ordonnée variable mM. Posons $\overline{Om} = x$ et convenons de poser $S > 0$ pour $x > 1$ et $S < 0$ pour $x < 1$. L'aire S est une fonction de x, qui est nulle pour $x = 1$ (mM confondu avec aA), on l'appelle *logarithme népérien de x* et on la désigne par $\ln x$, ou $\log_e x$, ou parfois Lx (la première notation est recommandée).

L'aire *S* ***est une fonction de*** *x* ***appelée logarithme népérien de*** *x* : $S = \ln x$. ***Elle s'annule pour*** $x = 1$, ***elle est positive pour*** $x > 1$ ***(en foncé) et négative pour*** $x < 1$ ***(en clair).***



Lorsque Neper (= John Napier) inventa les « logarithmes » en 1614, il était loin de penser qu'ils devaient avoir une aussi belle destinée. Son but était de simplifier les calculs trigonométriques, et il y est d'ailleurs parvenu, et le mot *logarithme* qu'il forgea alors signifie, d'après son étymologie : « nombre du rapport », le rapport en question étant ici le sinus de l'arc x. Ce n'est qu'au XVIIIe siècle qu'on y vit une fonction d'un nombre x positif quelconque, calculée, d'ailleurs, d'une manière différente que par Neper et la définition de la fonction *logarithme népérien* a été donnée par Lacroix en 1797.

● *Le nombre e et la fonction exponentielle* $y = e^x$. La fonction logarithme sera étudiée ci-après, p. 116 ; elle va nous servir à introduire un nombre très important en analyse, le nombre e. C'est la valeur de x pour laquelle $\ln x = 1$. On écrira donc :

$$\ln e = 1. \qquad (5)$$

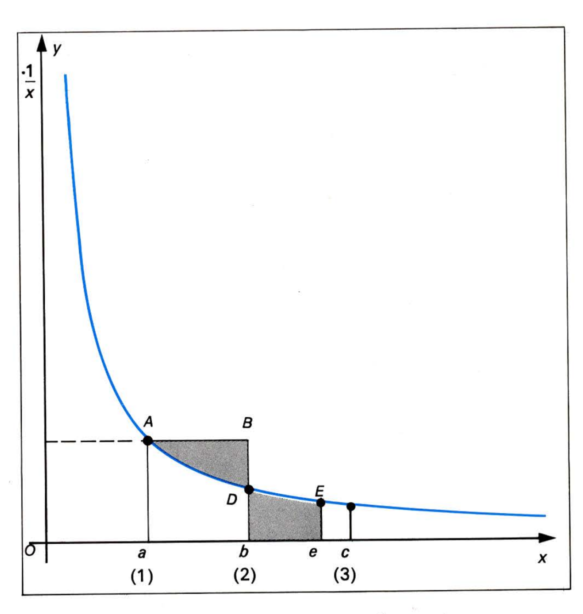
Il est facile d'estimer, sur un graphique, une valeur approchée de e : on voit immédiatement que e est compris entre 2 et 3. Page 109, nous avons expliqué que e était la limite du binôme $(1 + 1/n)^n$ quand $n \to \infty$; page 153, nous donnons une méthode de calcul de e.

La fonction $y = e^x$ est appelée fonction exponentielle ; on l'écrit aussi :

$$y = \exp x. \qquad (6)$$

Sa variation est étudiée ci-après, p. 117. Il est bon de noter que la fonction logarithme népérien et exponentielle sont inverses ; en effet on montre que :

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y. \qquad (7)$$



Détermination approximative du nombre e. Puisque $\overline{Oa} = 1$, ***le carré*** *abBA* ***a une aire égale à 1. Le point*** *E*, ***d'abscisse*** *e*, ***doit être tel que :*** aire $(aeEA) = 1 =$ ***aire*** $(abBA)$. ***Il faut donc déterminer*** *E* ***tel que l'aire*** *beED* ***soit égale à l'aire du triangle mixtiligne*** *ABD*. *E* ***est évidemment compris entre 2 et 3, et, en faisant un graphique soigné, on constaterait qu'il est compris entre 2,5 et 3.***

● *Fonctions périodiques.* S'il existe un nombre P tel que $f(x + P) = f(x)$, $P \neq 0$, la fonction est dite *périodique*, de période P. Par exemple, la fonction $y = \sin x$ est périodique (voir p. 90) car on a :

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) = \\ = \sin(x + 4\pi) = \cdots = \sin(x + 2k\pi).$$

On voit que, s'il existe une période P, il en existe une infinité ($2P$, ...). On convient de nommer *période* de $f(x)$ la *plus petite valeur strictement positive de P* si elle existe. Pour $y = \sin x$, la *période* est donc 2π.

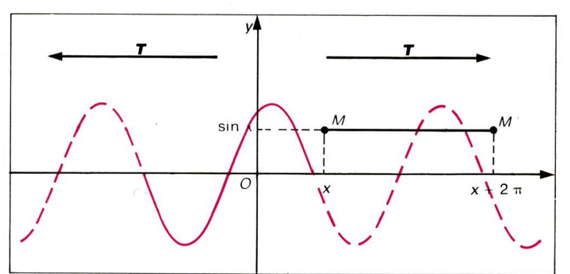
C'est d'ailleurs une caractéristique des fonctions circulaires que d'être périodiques ; on a, en effet,

$\cos x = \cos(x + 2k\pi)$: $y = \cos x$ est périodique de période 2π ;

$\tan x = \tan(x + k\pi)$: $y = \tan x$ est périodique de période π ;

$\cot x = \cot(x + k\pi)$: $y = \cot x$ est périodique de période π.

Considérons le graphique de $y = \sin x$; il se déduit facilement de celui de $y = \sin x$ pour $x \in [0, 2\pi]$, puisque $f(x + 2\pi) = f(x)$. Un point M, de coordonnées $(x, \sin x)$ et un point M' de coordonnées $[x + 2\pi, \sin(x + 2\pi)]$ définissent un vecteur $\mathbf{MM'} = \mathbf{T}$ de composantes $(2\pi, 0)$: le graphique complet de $y = \sin x$ s'obtient par translations successives $\mathbf{T}$ ou $-\mathbf{T}$.



Périodicité d'une fonction.

Fonction en escalier.

Soit la fonction $y = E(x)$, pour $x > 0$, $E(x)$ désignant la partie entière (non décimale) d'un réel x.

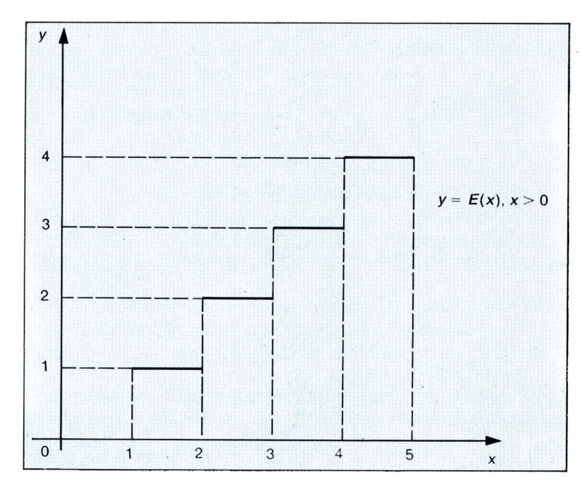
Par exemple $x = 1/2 = 0{,}5$ a pour partie entière 0 ; il en est de même de tous les réels positifs inférieurs à 1. Par contre, pour $x \geqslant 1$, chaque nombre a une partie entière non nulle, qui est :
1 pour $1 \leqslant x < 2$, 2 pour $2 \leqslant x < 3$, ... n (entier) pour $n \leqslant x < n + 1$.

Autrement dit, dans les intervalles $[1, 2[$, $[2, 3[$, ... $[n, n + 1[$, $E(x)$ reste constant et égal à 1, 2, ... n. On a évidemment, pour x tendant vers n avec $x > n$, $\lim E(x) = n$.

Le graphique de cette fonction est caractéristique : pour x compris entre 1 et 2, $E(x) = C^{te} = 1$; la fonction est représentée par un segment parallèle à l'axe Ox ; il y a une discontinuité à gauche de 2 (non représentable sur le graphique), et la fonction *saute* de $f(2 - 0)$ à $f(2 + 0)$, le saut étant égal à

$$f(2 + 0) - f(2 - 0) = 2 - 1 = 1 ;$$

et ainsi de suite. Une telle fonction est dite, eu égard à son graphique, une *fonction en escalier.*



***Fonction en escalier** $y = E(x)$.*
La valeur de y est constante et égale à 1 pour** $x \in [1, 2[$ **; constante et égale à 2 pour** $x \in [2, 3[$ **; etc.

Dérivées.

Généralités.

L'invention des *dérivées* est un moment très important dans l'histoire des mathématiques. Cette notion s'est en effet révélée comme l'instrument de base de la théorie des fonctions. Avant de la définir avec rigueur, voyons comment elle se présente intuitivement.

A l'origine de la notion de dérivée, il y a deux idées essentielles :

1 - une grandeur peut être considérée comme la « somme » à l'infini de grandeurs infiniment petites qui la composent et qu'on peut isoler « par la pensée » (les guillemets sont nécessaires, car cette idée est loin d'être exacte : il lui manque, pour cela, d'être exprimée dans les termes de la théorie des limites) ;

2 - le rapport de deux grandeurs qui deviennent infiniment petites peut être un rapport fini ; par exemple si nous peignons les deux moitiés d'une règle en vert et l'autre en rouge, le rapport :

$$\frac{\text{longueur verte}}{\text{longueur rouge}}$$

est égal à 1 ; si la règle s'éloigne, les longueurs rouges et vertes nous paraissent de plus en plus petites, mais leur rapport est toujours égal à 1.

● *Un problème de mécanique.* Newton s'est posé le problème mécanique de définir la vitesse d'un mobile, qui peut être résolu comme ci-dessous.

1 - Appelons x_1 le chemin parcouru au bout du temps t_1, et x_2 le chemin parcouru au bout du temps t_2 par un point matériel en mouvement. Sa *vitesse moyenne* entre les instants t_1 et t_2 a pour valeur :

$$v_{moyenne} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \qquad (1)$$

Si nous admettons que l'espace x parcouru est une fonction du temps t, fonction que nous pouvons écrire :

$$x = f(t), \qquad (2)$$

alors nous appellerons $x_2 - x_1$ l'*accroissement* Δx de la fonction (lire : « delta x » ou « accroissement de x », ou « delta de x » ; Δ n'est pas un nombre, mais un symbole d'accroissement) et $t_2 - t_1$ l'accroissement Δt de la variable. Donc :

$$v_{moyenne} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (3)$$

2 - En général, la vitesse d'un mobile n'est pas constante : elle peut augmenter ou diminuer à chaque instant. La vitesse moyenne n'est donc pas une information suffisante, et nous avons besoin de connaître la *vitesse instantanée* à un instant t par exemple. Pour cela, nous allons supposer que la variable t est « encadrée » par les valeurs t_1 et t_2 ; lorsque l'intervalle $\Delta t = t_2 - t_1$ devient de plus en plus petit, il en est de même pour $\Delta x = x_2 - x_1$, et la vitesse moyenne calculée est une approximation de plus en plus exacte de la vitesse instantanée.

3 - Opérons maintenant un « passage à la limite », qui est un raisonnement purement mathématique : la vitesse instantanée v au temps t est la limite, quand Δt tend vers 0, du rapport $\Delta x / \Delta t$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (4)$$

Bien entendu, une équation telle que (4) exige de nombreuses précautions logiques (définition d'une *direction* $S = \Delta t \to 0$, etc. ; voir p. 108).

4 - La limite v est elle-même une fonction de t ; on dit qu'elle *dérive* de la fonction $x = f(t)$, ou encore qu'elle est la *dérivée* de cette fonction. Cent ans environ après Newton, Lagrange introduira la notation :

$$v = x' = f'(t), \qquad (5)$$

en mettant l'accent « prime » sur une fonction pour désigner sa dérivée.

● *Un exemple géométrique.* On peut aussi arriver à la notion de dérivée par le problème des tangentes, qui a été l'objet des travaux de Descartes, Fermat, Pascal, Roberval et Leibniz au XVII[e] siècle.

Le lecteur connaît — par intuition — la notion de tangente à un cercle : une droite qui ne touche le cercle qu'en un point ; pour tracer la tangente en A_0 à un cercle, on mène la perpendiculaire en A_0 au rayon de ce cercle qui aboutit en ce point. Mais, s'il s'agit d'une autre courbe que le cercle, la construction n'est pas aussi simple et, de plus, elle est différente pour chaque courbe considérée.

Pour résoudre le problème d'une façon générale, rapportons la courbe C à son équation $y = f(x)$ dans un système d'axes orthonormé et soit une sécante MM_1 de cette courbe, les points $M(x, y)$ et $M_1(x_1, y_1)$ étant voisins. La *pente* de cette droite, c'est-à-dire la tangente de l'angle α qu'elle fait avec l'axe des x, est :

$$\tan \alpha = \frac{KM_1}{KM} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (6)$$

(Δy signifiant : « différence entre y_1 et y »).

Quand M_1 tend vers M, la sécante MM_1 tend (si la nature de la courbe le permet) vers une position limite MT, qui est la tangente à la courbe au point M. La pente de cette tangente, soit $\tan \theta$, est la limite de $\tan \alpha$ quand x_1 tend vers x, c'est-à-dire que :

$$\tan \theta = \underset{\Delta x \to 0}{\text{limite de}} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (7)$$

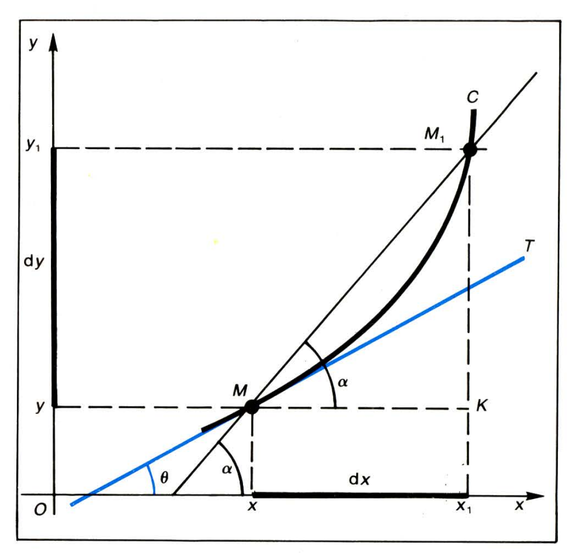
Il est clair que, lorsque x_1 tend vers x ($\Delta x \to 0$), y_1 tend vers y ($\Delta y \to 0$). Appelons dx et dy les grandeurs Δx et Δy quand elles tendent vers 0 ; nous écrirons :

$$\tan \theta = \underset{\Delta x \to 0}{\text{limite de}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}. \qquad (8)$$

Or, ici aussi, bien que dx et dy deviennent infiniment petits, leur *rapport* est *appréciable* ; sa valeur, que nous désignerons par y', dépend de x : c'est une fonction f' de x, qui peut se calculer à partir de $f(x)$; on l'appelle la *dérivée de* $f(x)$ et l'on écrit :

$$y' = f'(x). \qquad (9)$$

(La notation dy/dx a été introduite par Leibniz.)



***Détermination de la tangente en un point d'une courbe par sa pente** $\tan \theta$.*

Définition.

Plus généralement, considérons une fonction réelle $y = f(x)$ définie dans un intervalle $]a, b[$. Soit x_0 un nombre compris entre a et b, et h un accroissement de la variable qui la change en $x_0 + h$; $x_0 + h$ étant aussi compris entre a et b. La fonction passe de la valeur $f(x_0)$ à $f(x_0 + h)$. Écrivons le rapport :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \qquad (10)$$

Lorsque ce rapport possède une limite finie pour $h \to 0$, nous disons que la fonction $f(x)$ est *dérivable pour* $x = x_0$ et nous écrivons :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0). \qquad (11)$$

Le nombre $f'(x_0)$ est la *dérivée* de la fonction $f(x)$ pour $x = x_0$. Nous allons approfondir cette définition.

● *Dérivée de* $f(x)$ *pour* $x = x_0$. Représentons les réels par une droite infinie sur laquelle on figure x_0 ; la définition de la dérivée au point x_0 suppose que la fonction $f(x)$ est définie sur un *voisinage* de x_0 (en grisé sur la figure de la page suivante) : ce voisinage contient donc un intervalle I auquel appartient x_0 et sur lequel $f(x)$ est définie (I est en gris foncé sur la figure). Dans I (dont les limites ne nous intéressent pas) on peut donc considérer deux intervalles ouverts $]x_0 - \alpha, x_0[$ et $]x_0, x_0 + \alpha[$ (« *ouverts* » veut dire que x_0, $x_0 - \alpha$ et $x_0 + \alpha$, appartenant tous trois à I, n'appartiennent pas aux deux intervalles considérés). Nous avons entouré d'un petit cercle x_0, $x_0 - \alpha$ et $x_0 + \alpha$ pour souligner qu'ils n'appartiennent pas à ces deux *intervalles disjoints*.

La *réunion* de ces deux intervalles est un ensemble que nous noterons $\mathbb{O}(x_0, \alpha)$. Dire que L existe, c'est dire qu'on peut choisir α de façon que, pour tout x_1 appartenant à $\mathbb{O}(x_0, \alpha)$, la différence (en valeur absolue)

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - L \right| \qquad (12)$$

soit inférieure à tout $\varepsilon > 0$ fixé, ce qui s'écrit symboliquement : $\exists L$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha$ tel que

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - L \right| < \varepsilon, \quad \forall x_1 \in \mathcal{O}(x_0, \alpha). \quad (13)$$

La condition $\forall x_1 \in \mathcal{O}(x_0, \alpha)$ est capitale : elle précise que la dérivée est une *limite* dont on s'approche aussi près qu'on veut, x_1 restant constamment différent de x_0.

Le lecteur pensera peut-être que ces précisions sont des subtilités byzantines et bien des collégiens se contentent de la définition classique $y' = \lim \Delta y/\Delta x$ quand $\Delta x \to 0$, sans se poser ces problèmes. Or considérons un instant la fonction $y = x^2$ et demandons-nous quelle est la valeur de y' au point $x_0 = 1$ par exemple. Appelons x_1 un nombre très voisin de x_0 et écrivons :

$$y' = L = \lim \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \text{ quand } x_1 \to x_0. \quad (14)$$

Or on a :

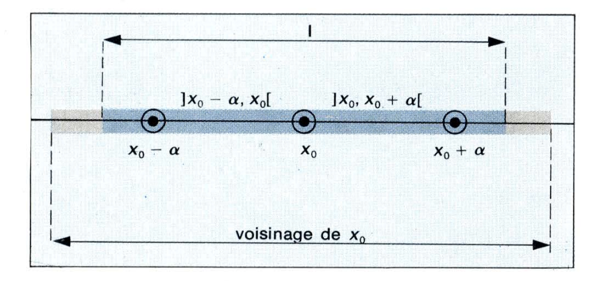
$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} &= \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{(x_1 - x_0)(x_1 + x_0)}{x_1 - x_0} = x_1 + x_0, \end{aligned} \quad (15)$$

avec

$$\lim (x_1 + x_0) \quad \text{quand} \quad x_0 \to x_1 = 2\, x_0. \quad (16)$$

On écrit donc $y' = 2\, x_0$; mais, si l'on ne précise pas, ce résultat est *en contradiction* avec la condition $x_1 \neq x_0$: comment peut-on avoir à la fois, en effet : $x_1 + x_0 = 2\, x_0$ et $x_1 \neq x_0$? Cette contradiction disparaît si l'on précise que $y' = 2\, x_0$ est une *limite* (qui ne sera jamais atteinte) vers laquelle tend $x_1 + x_0$ quand x_1 devient aussi proche que l'on veut de x_0.

Seule la *définition rigoureuse* ci-dessus nous met à l'abri d'une contradiction éventuelle : la notion de dérivée, qui est l'un des fondements de l'analyse, méritait bien une telle rigueur.



***Dérivée de** f(x) **pour** $x = x_0$.*

● *Dérivée sur un intervalle.*

A partir de la définition de la dérivée de $f(x)$ en un point x_0, et que l'on note indifféremment $f'_x(x_0)$ ou $y'_x(x_0)$, en mettant x en indice pour préciser qu'il s'agit de la *variable*, on définit la *dérivée à droite* d'une fonction $f(x)$ pour $x = x_0$ lorsque $h = x_1 - x_0$ tend vers zéro par valeurs positives ($x_1 > x_0$), et la *dérivée à gauche* dans le cas contraire.

Si une fonction admet, en tout point d'un intervalle $]a, b[$, une dérivée, elle est dite *dérivable* sur l'intervalle considéré et l'on démontre que cette propriété entraîne sa *continuité* sur $]a, b[$. Mais ce dernier théorème n'a pas de réciproque : Weierstrass a montré qu'on pouvait construire des fonctions continues en tous les points d'un intervalle $]a, b[$ et n'admettant une dérivée en aucun point de cet intervalle. On a donc, dans un sens seulement :

$$\begin{matrix} \text{fonction dérivable} & & \text{fonction continue} \\ \text{sur }]a, b[& \Rightarrow & \text{sur }]a, b[, \end{matrix} \quad (17)$$

et on ne peut inverser l'implication.

Calcul des dérivées.

● *Formules de dérivation.* En appliquant la définition précédente à une fonction quelconque $y = f(x)$, en effectuant les calculs et en déterminant la limite du rapport $\Delta y/\Delta x$ quand $\Delta x \to 0$, on peut calculer directement la dérivée d'une fonction. Des formules générales ont été établies, qui simplifient les calculs dans les cas les plus usuels.

1 - Une fonction constante $y = f(x) = C$ a une dérivée nulle, $y' = 0$.

2 - La fonction $y = x$ a pour dérivée $y' = 1$.

3 - La fonction $y = x^n$ a pour dérivée $y' = nx^{n-1}$ (n entier ou fractionnaire).

4 - Le monôme $y = ax^n$ a pour dérivée $y' = anx^{n-1}$.

5 - Soit u et v deux fonctions définies et dérivables de x dans l'intervalle considéré. On démontre les formules suivantes, en appelant u' et v' les dérivées de u et de v :

$$\left\{ \begin{aligned} y &= u + v\,; & y' &= u' + v'\,; \\ y &= uv\,; & y' &= u'v + v'u\,; \\ y &= \frac{u}{v}\,; & y' &= \frac{u'v - v'u}{v^2}\,; \\ y &= \sqrt{u}\,; & y' &= \frac{u'}{2\sqrt{u}}\,; \\ y &= u^n\,; & y' &= nu^{n-1}u'. \end{aligned} \right. \quad (18)$$

6 - Il résulte des formules (18) que la fonction polynôme $y = a_0 x^n + \cdots + a_n$ a pour dérivée

$$y' = na_0 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.$$

Exemple : $y = x^3 + 2\,x^2 - 1$ a pour dérivée $y' = 3\,x^2 + 4\,x$.

7 - Les fonctions circulaires, logarithmiques et exponentielles ont des dérivées indiquées sur le tableau ci-après. On notera que la dérivée de la fonction $y = e^x$ est $y' = e^x$, c'est-à-dire la fonction elle-même.

Fonction y	Dérivée y'
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\cot x$	$\dfrac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$
e^x	e^x
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\ln (Ax)$	$\dfrac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$

● *Théorème des fonctions composées.* Considérons la fonction composée

$$y = f[u(x)]. \quad (19)$$

Si $u(x)$ est dérivable pour $x = x_0$ et si la fonction $f(u)$ est définie dans un intervalle intéressant le point $u_0 = u(x_0)$ et dérivable pour $u = u_0$, alors la fonction y est dérivable pour $x = x_0$ et sa dérivée a pour valeur :

$$y'(x_0) = f'(u_0)\, u'(x_0). \quad (20)$$

Exemple : soit la fonction :

$$y = \sqrt[3]{2\,x^2 + x + 1} = (2\,x^2 + x + 1)^{1/3}. \quad (21)$$

Posons $u = 2\,x^2 + x + 1$, d'où $y = u^{1/3}$. Alors :

$$u'(x) = 4\,x + 1\,; \quad f'(u) = \frac{1}{3}\, u^{-2/3} \quad (22)$$

D'où, d'après (20) :

$$y' = \frac{1}{3}(2\,x^2 + x + 1)^{-2/3}(4\,x + 1), \quad (23)$$

soit, puisque $u^{-2/3} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{u^2}}$:

$$y' = \frac{4\,x + 1}{3\sqrt[3]{(2\,x^2 + x + 1)^2}}. \quad (24)$$

● *Dérivée d'une fonction inverse.* Soit $y = f(x)$ et $x = \varphi(y)$ deux fonctions inverses : on montre que, si les conditions de dérivabilité et de continuité sont satisfaites :

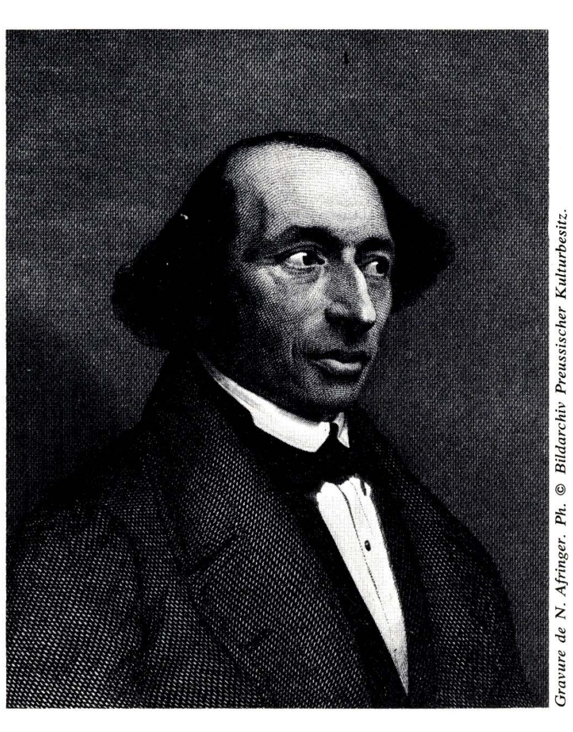
$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \quad (25)$$

L'application la plus usuelle de ce résultat concerne la fonction $y = a^x$, inverse de la fonction :

$$x = \varphi(y) = \frac{\ln y}{\ln a}, \quad (26)$$

comme on l'explique p. 112. Pour calculer la dérivée y' de la fonction a^x, on utilise la relation (25), en notant que, d'après le tableau du n° 7 ci-dessus, on a :

$$\varphi'(y) = \frac{1}{x \ln a}. \quad (27)$$



***Carl Jacobi (1804-1851), mathématicien allemand : il a étudié, en même temps qu'Abel, la théorie des fonctions elliptiques, et introduit en analyse les fonctions dites « fonctions θ » ; on lui doit aussi la théorie des déterminants fonctionnels** (jacobiens).*

D'où :

$$f'(x) = a^x \ln a, \quad (28)$$

c'est-à-dire la formule du tableau n° 7.

● *Exemples.* Le calcul des dérivées est relativement « automatique », du moins quand il s'agit de fonctions usuelles, grâce aux formules précédentes. La seule difficulté éventuelle est la complexité et la longueur des calculs ; dans les cas de fonctions exponentielles, il est nécessaire de calculer sur les fonctions inverses en « passant en logarithmes », selon les règles du calcul logarithmique. En particulier, le logarithme de a^u est $u \ln a$, et le nombre $\ln a$ est un coefficient et non une grandeur variable, donc il doit être traité comme tel.

— *1er exemple* : $y = A \sin \omega t$ (cette fonction circulaire de la variable t est très importante en physique ondulatoire). C'est une fonction composée de la forme $y = A \sin u$ avec $u = \omega t$; on a :

$$f'(u) = A \cos u\,; \quad u'(t) = \omega \quad (29)$$

d'où, d'après (20) :

$$y' = f'(t)\, u'(t) = A\omega \cos \omega t. \quad (30)$$

— *2e exemple* : $y = \ln (x^2 - 1)$. Cette fonction est une fonction composée $y = \ln u$, avec $u = x^2 - 1$. On a :

$$f'(u) = \frac{1}{u}\,; \quad u'(x) = 2\,x, \quad (31)$$

d'où :

$$y' = \frac{u'}{u} = \frac{2\,x}{x^2 - 1}. \quad (32)$$

La fonction u'/u est appelée *dérivée logarithmique* de la fonction u.

— *3e exemple* : $y = \left(\dfrac{x}{a}\right)^{ax}$. La présence d'une exponentielle nous incite à « passer en logarithmes », soit :

$$\ln y = ax \ln \left(\frac{x}{a}\right). \quad (33)$$

Dérivons les membres séparément. A gauche, on obtient la dérivée logarithmique de y, soit y'/y ; à droite, on a le produit uv de deux fonctions $u = ax$ et $v = \ln (x/a)$, dont les dérivées sont $u' = a$ et $v' = 1/x$ voir le tableau du n° 7 ci-dessus ; ici $A = 1/a$). La dérivée $(uv)'$ de ce produit est $u'v + v'u$ (n° 5 ci-dessus), d'où finalement :

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= a \ln \left(\frac{x}{a}\right) + ax \frac{1}{x} \\ &= a \ln \left(\frac{x}{a}\right) + a = a \left[\ln \left(\frac{x}{a}\right) + 1 \right]. \end{aligned} \quad (34)$$



On en tire :

$$y' = ay\left[\ln\left(\frac{x}{a}\right)+1\right]$$

$$= a\left(\frac{x}{a}\right)^{ax}\left[\ln\left(\frac{x}{a}\right)+1\right]. \qquad (35)$$

Dérivées successives.

Pour étudier le comportement d'une fonction continue $y = f(x)$ dans un intervalle, on se sert, avant toutes choses, de sa dérivée (voir ci-après p. 153). Mais il est utile aussi d'utiliser, si elles existent, la dérivée de la dérivée, la dérivée de la dérivée de la dérivée, etc. qui sont appelées dérivées seconde ou d'ordre 2, d'ordre 3, ..., d'ordre n.

Si donc une fonction numérique $y = f(x)$ admet la dérivée $y' = f'(x)$ dans l'intervalle $[a, b]$ ou $]a, b[$, et si la fonction y' est dérivable dans cet intervalle, nous l'appelons dérivée seconde et nous la notons

$$y'' = f''(x). \qquad (36)$$

Les dérivées successives, si elles existent, sont notées $f^{(n)}(x)$: la dérivée de $f''(x)$ est $f^{(3)}(x)$, etc. La fonction elle-même est sa propre dérivée d'ordre zéro : $f(x) = f^{(0)}(x)$.

Exemple : soit $y = \ln x$; on a, en appliquant les règles du calcul des dérivées :

$$y' = \frac{1}{x}; \quad y'' = -\frac{1}{x^2};$$

$$y^{(3)} = \frac{2}{x^3}; \ldots y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}. \qquad (37)$$

On notera que si $y = e^x$, on a :

$$y = y' = y'' = \cdots = y^{(n)} = e^x. \qquad (38)$$

Application des dérivées.

Appliquées à l'étude des courbes $y = f(x)$, les dérivées nous donnent de nombreuses informations sur leurs propriétés (tangentes, normales, points remarquables, etc.). L'application la plus connue concerne la détermination des tangentes à une courbe : en un point (x_0, y_0) d'une courbe $y = f(x)$, la dérivée $y'_0 = f'(x_0)$ est égale à la pente de la tangente à la courbe en ce point. Nous allons examiner ici l'apport fondamental de la théorie des dérivées à la théorie des fonctions, qui se résume à ceci :

— deux théorèmes garantissant l'existence d'une tangente satisfaisant à certaines conditions pour un point C d'abscisse c comprise à l'intérieur de l'intervalle $[a, b]$ où l'on étudie la fonction $y = f(x)$;

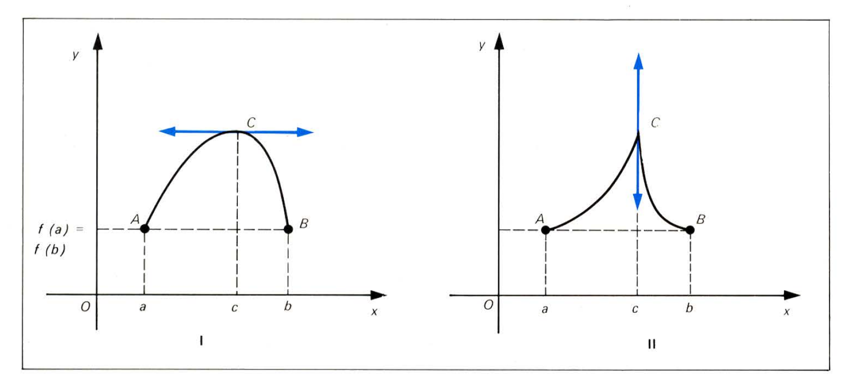
— des formules permettant de calculer la valeur d'une fonction en la considérant comme une série numérique, c'est-à-dire comme une somme de termes dont elle est la limite ;

— des règles pour étudier le sens de variation, les extrémums et certains points singuliers des fonctions.

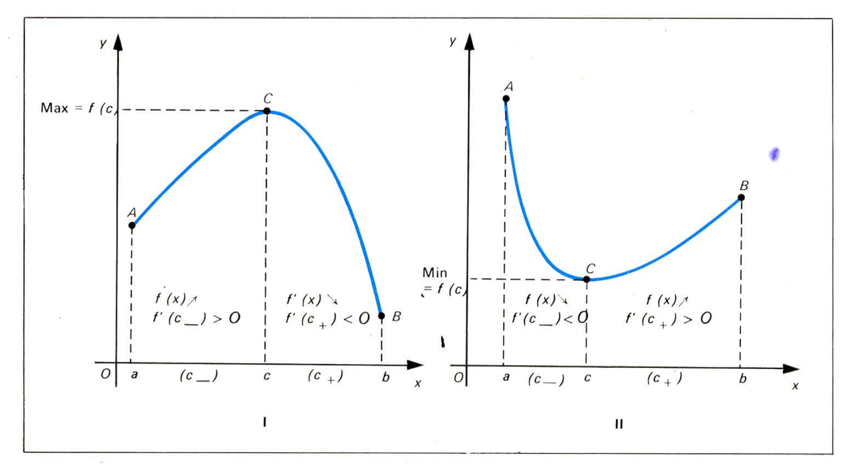
• *Le théorème de Rolle.* Il garantit l'existence d'une *tangente parallèle à l'axe des* x pour un point C compris entre deux points A et B d'une courbe représentant la fonction $y = f(x)$, sous certaines conditions ; en voici l'énoncé :

Si $f(x)$ est une fonction *définie* et *continue* sur un intervalle $[a, b]$, *si* elle admet une dérivée sur $]a, b[$, et *si* $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins un point c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. (Voir figure ci-dessous.)

(Comme la dérivée exprime la *pente* de la tangente, le fait qu'elle soit nulle signifie que la tangente est parallèle à l'axe des x.)



Le théorème de Rolle.
I - La fonction f(x) admet une dérivée sur]a, b[; pour x = c, on a f'(c) = 0.
II - La fonction f(x) n'admet pas toujours une dérivée sur]a, b[: il n'existe aucun point C entre A et B où la tangente soit parallèle à l'axe des x.



Extrémums.
I - La fonction est maximale pour x = c ; f(x) est donc croissante pour x < c et décroissante pour x > c, autrement dit, on a $f'(c_-) > 0$ et $f'(c_+) < 0$.
II - f(c) est un minimum ; f(x) est donc décroissante pour x < c et croissante pour x > c, soit $f'(c_-) < 0$ et $f'(c_+) > 0$.
Dans les deux cas $f'(c_-)$ et $f'(c_+)$ sont de signes contraires, donc leur produit est bien négatif.

• *Théorème des accroissements finis* (appelé aussi *théorème de la moyenne*). Il garantit l'existence d'une *tangente parallèle à une corde AB* de la courbe représentant la fonction $y = f(x)$, en un point C situé entre A et B, sous certaines conditions :

Si $f(x)$ est *définie* et *continue* sur $[a, b]$ et *si* elle admet une dérivée $f'(x)$ sur $]a, b[$, alors il existe au moins une valeur c comprise entre a et b pour laquelle on ait :

$$f(b) - f(a) = (b - a)\,f'(c), \qquad (39)$$

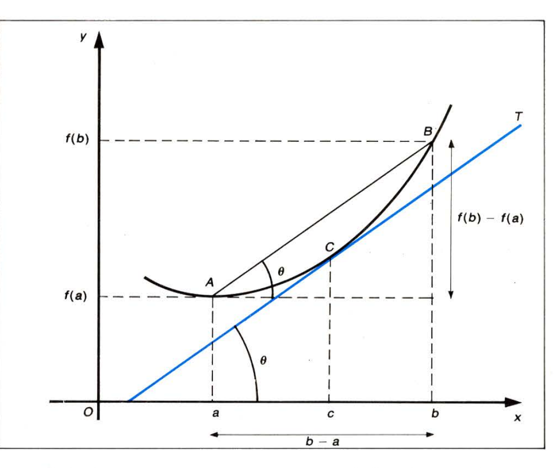
avec $a < c < b$.

Ce théorème peut s'écrire différemment, en posant $b = a + h$ (h : *accroissement fini* de a) et en posant $c = a + \theta h$ $(0 < \theta < 1)$, donc $\theta h < h$ et $a < c < b$) :

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h)\ ; \qquad (40)$$

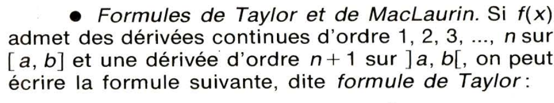
ou

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h). \qquad (41)$$



Théorème des accroissements finis. La pente de AB est $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$; la pente de la tangente en C est $\tan\theta = f'(c)$; le théorème exprime que l'égalité $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ — ou AB parallèle à CT — est vérifiée pour au moins un point entre A et B si f(x) est définie, continue et dérivable sur l'intervalle considéré.

• *Formules de Taylor et de MacLaurin.* Si $f(x)$ admet des dérivées continues d'ordre 1, 2, 3, ..., n sur $[a, b]$ et une dérivée d'ordre $n+1$ sur $]a, b[$, on peut écrire la formule suivante, dite *formule de Taylor* :



$$f(b) = f(a) + (b-a)\,f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1\times 2}\,f''(a) + \cdots$$
$$+ \frac{(b-a)^n}{1\times 2\times\cdots\times n}\,f^{(n)}(a)$$
$$+ \frac{(b-a)^{n+1}}{1\times 2\times\cdots\times n\times(n+1)}\,f^{(n+1)}(c), \qquad (42)$$

avec $a < c < b$.

Si l'on pose, comme pour le théorème des accroissements finis, $b = a + h$, la formule de Taylor s'écrit, en utilisant la notation $n! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n$ (factorielle n) :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) +$$
$$+ \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h), \qquad (43)$$

avec $0 < \theta < 1$.

Dans le cas où $0 \in [a, b]$, pour tout x tel que $a < x < b$, la formule de Taylor est dite *formule de MacLaurin* ; elle s'écrit :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) +$$
$$+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x). \qquad (44)$$

(Voir, p. 153, les applications les plus usuelles du théorème des accroissements finis et des formules de Taylor et de MacLaurin.)

• *Variation des fonctions.* Nous avons vu, p. 106, que l'un des problèmes les plus importants relatif à la variation d'une fonction concerne le sens de variation de la fonction sur un intervalle $[a, b]$. Cette étude est facilitée par le théorème suivant, qui sera utilisé plus loin (p. 118) :

Si $f(x)$ est dérivable pour tout $x \in [a, b]$, $f(x)$ est :

— *constante* sur $[a, b]$ si, quel que soit $x \in [a, b]$, $f'(x) = 0$;

— *croissante* sur $[a, b]$ si, quel que soit $x \in [a, b]$, $f'(x) > 0$;

— *décroissante* sur $[a, b]$ si, quel que soit $x \in [a, b]$, $f'(x) < 0$.

• *Extrémums.* Nous avons défini plus haut ce qu'il fallait entendre par *maximums* et *minimums* d'une fonction ; on appelle encore *extrémums* ces valeurs particulières de la fonction. Soit $[a, b]$ un intervalle sur lequel $f(x)$ est définie, continue et dérivable et c un nombre tel que $a < c < b$; si c est un extrémum, on démontre que $f'(c) = 0$. Cet important théorème est commenté sur la figure du haut de la page.

• *Points remarquables de la fonction* $y = f(x)$.

— Lorsque la dérivée y' s'annule en changeant de signe pour la valeur x_0 de la variable, le point (x_0, y_0) est un extrémum (maximum ou minimum).

— Le signe de la dérivée seconde y'' permet de caractériser le sens de la concavité de la courbe : tournée vers le haut pour $y'' > 0$, vers le bas pour $y'' < 0$. Lorsque y'' s'annule en changeant de signe pour $x = x_0$, le point (x_0, y_0) est un *point d'inflexion* : c'est le point où la concavité de la courbe change de sens (voir ci-après l'exemple $y = x^3$).

Voir aussi p. 153 les variations de fonctions.

Fonctions usuelles de variables réelles.

Méthode d'étude.

Étant donné une fonction $y = f(x)$, l'étude de cette fonction comprend les opérations suivantes :

1 - Déterminer les intervalles de définition, les discontinuités et, éventuellement, la périodicité de la fonction.

2 - Calculer sa dérivée première $y' = dy/dx$ dans les intervalles de définition, ainsi que sa dérivée seconde $y'' = d^2 y/dx^2$.

3 - Étudier le signe de y' et de y'' dans les intervalles de définition.

— Lorsque y' est plus grand que 0, la fonction est croissante ; lorsque y' est plus petit que 0, la fonction est décroissante ; lorsque $y' = 0$, la fonction est constante.

— Pour déterminer les extrémums, il faut chercher les valeurs c de x qui annulent la dérivée (= *zéros* de la dérivée), telles que $f'(c_-)$ et $f'(c_+)$ soient de signes contraires (on dit aussi que « la dérivée s'annule en changeant de signe »). Soit donc $f'(c) = 0$; si $f''(c) < 0$, c correspond à un *maximum* $f(c)$ de la fonction ; si $f''(c) > 0$, $f(c)$ est un *minimum*. Si $f''(x) = 0$ ou n'existe pas, on détermine la nature des extrémums par l'étude de la croissance de la fonction.

4 - Étudier éventuellement les valeurs remarquables de y (quand $x \to \pm\infty$, quand $x \to a$, si $f(x)$ est discontinue pour $x = a$, etc.).

5 - Construction du graphique : on trace éventuellement les asymptotes (voir p. 112), on détermine les points remarquables (extrémums, points de rebroussement, d'inflexion, etc.) et on trace le graphique en tenant compte des résultats obtenus précédemment.

Fonction puissance.

Elle est de la forme $y = x^n$, n étant un nombre réel ; exemples :

$$y = x^2,\ y = x^3,\ y = x^{-1} = \frac{1}{x},$$

$$y = x^{1/2} = \sqrt{x}, \text{ etc.} \qquad (1)$$

● *Premier exemple :* $y = x^3$. Définie et continue sur $\mathbb{R}$, cette fonction admet les dérivées successives $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $y''' = 6$, $y^{(4)} = y^{(n>4)} = 0$. Il n'y a pas d'extrémums, car $y' = 0$ pour $x = 0$, mais $f'(0_-)$ et $f'(0_+)$ sont positifs, d'où $f'(0_-) \cdot f'(0_+) > 0$. En revanche, y'' s'annule en changeant de signe pour $x = 0$: la courbe a, pour $x = 0$, un point d'inflexion. Enfin, quand $x \to \pm\infty$, $y \to \pm\infty$. D'où le *tableau de variation* :

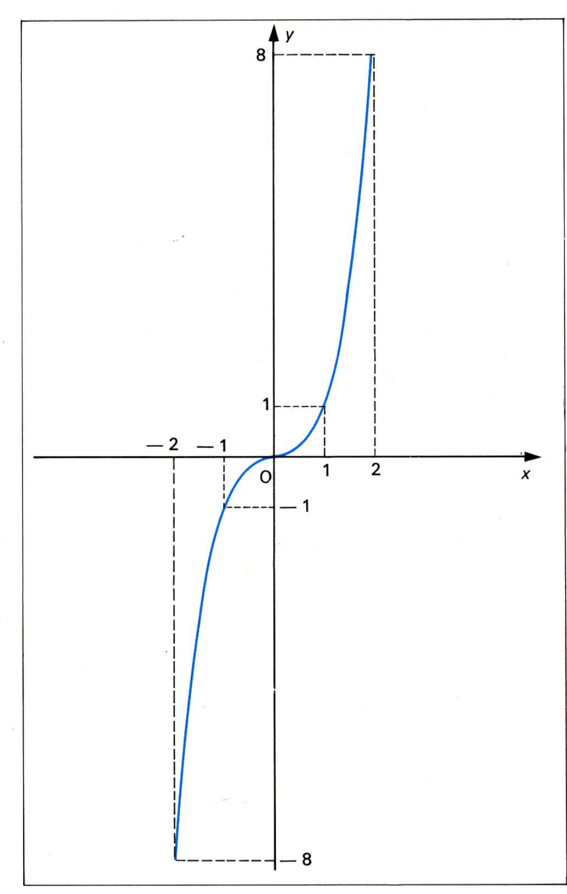
x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'	$+\infty$	+	0	+	$+\infty$
y''	$-\infty$	−	0	+	$+\infty$
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Ce tableau résume l'étude préliminaire ; il montre que y' est positive (+) quand x varie entre $-\infty$ et 0, et positive quand x varie entre 0 et $+\infty$; que y'' est d'abord négative, puis positive, 0 étant la valeur critique, et que la fonction est constamment croissante (↗) de $-\infty$ à 0 et de 0 à $+\infty$, puisque y' est toujours positive ($x = 0$ n'est pas un extrémum, car y' ne change pas de signe en passant par 0 ; les *flèches* indiquant le sens de variation de y rendent cette constatation intuitive).

La courbe représentative se trace immédiatement (en tenant compte du signe de y'', qui indique le sens de concavité de la courbe).

● *Deuxième exemple :* $y = 1/x = x^{-1}$. Définie et continue sur $\mathbb{R}$, sauf pour $x = 0$ (1/0 n'a pas de sens) ; on a, en appliquant les règles du calcul des dérivées,

$$y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad y'' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}.$$



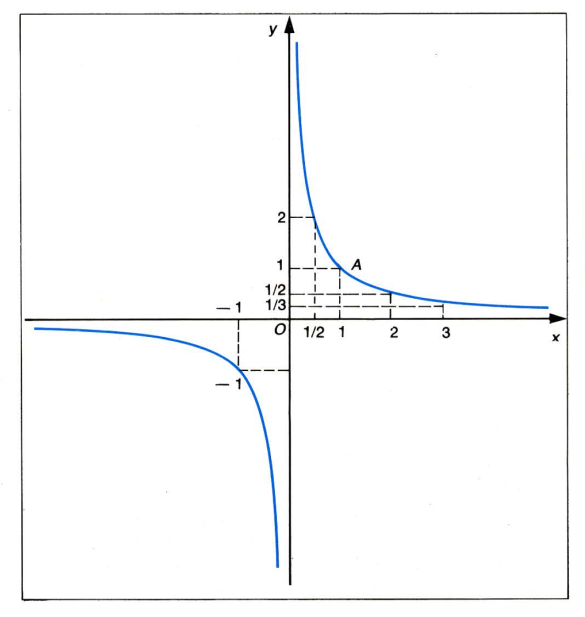
***Courbe représentative de** $y = x^3$.*
Le point O (origine) est un point d'inflexion.

La dérivée première est toujours négative et ne s'annule jamais, puisque x^2 est toujours positif, donc la fonction est constamment décroissante, sans extrémums. Quand $x \to -\infty$, $y \to (0_-)$ et quand $x \to +\infty$, $y \to (0_+)$; quand $x \to 0$, $y \to \pm\infty$ selon le signe de x. D'où le tableau (le double trait vertical indique que y est discontinue pour $x \to 0$) :

x	$-\infty$		(0_-) 0 (0_+)		$+\infty$
y'		—	‖	—	
y	(0_-)	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	(0_+)

et la courbe de la figure ci-dessous.

***Graphique de** $y = 1/x$.*
***Ox et Oy sont les asymptotes de cette courbe, appelée hyperbole équilatère ; la courbe passe, notamment, par le point** $A(x = 1, y = 1)$.*



Fonction logarithme népérien.

Page 112 nous avons défini la fonction $y = \ln x$ comme l'aire limitée par la courbe $1/x$, l'axe des x, et l'ordonnée variable mM et qui s'annule pour $x = 1$; nous avons précisé qu'elle n'était définie que pour $x > 0$.

● *Propriétés de la fonction logarithme.* La propriété fondamentale des logarithmes s'exprime par les deux formules :

$$\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 \ ; \ \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln x_1 - \ln x_2 . \qquad (2)$$

On en déduit, pour tout exposant m entier ou fractionnaire :

$$\ln(x^m) = m \ln x . \qquad (3)$$

La fonction inverse de $y = \ln x$ est e^x. L'intérêt des logarithmes est de remplacer des opérations telles que l'élévation à la puissance m ou l'extraction d'une racine m-ième par des multiplications et des divisions. Pour déterminer le logarithme népérien d'un nombre, on se sert d'une table ou d'une calculatrice électronique. Par exemple pour calculer $a = \sqrt[7]{497}$, on pose :

$$\ln a = \ln(\sqrt[7]{497}) = \frac{\ln 497}{7} . \qquad (4)$$

Les tables donnent $\ln 497 = 6{,}208\,59$, donc le nombre a cherché a pour logarithme 0,886 94. En lisant la table en sens inverse, on trouve :

$$\ln 2{,}427\,69 = 0{,}886\,94 , \qquad (5)$$

donc $a = 2{,}427\,69$.

● *Système de logarithmes.* Étant donné un réel a quelconque, on appelle logarithme de x dans un système de base a le nombre $\ln x / \ln a$; on écrit :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} . \qquad (6)$$

Si $a = 10$, le système est dit de *logarithmes décimaux.* Un logarithme décimal s'écrit donc $\log_{10} x$ et, par convention, $\lg x$. Les logarithmes népériens sont tels que $\ln x / \ln e = \ln x$, puisque $\ln e = 1$: ce sont des logarithmes de base e, qui peuvent être écrits $\log_e x$ (toutefois la notation recommandée est $\ln x$, ce qui évite toute confusion). Si $a = 2$, le système est dit de *logarithmes binaires* ; on écrit alors $\log_2 x$ ou $\mathrm{lb}\, x$.

La base d'un système de logarithmes est telle que $\log_a a = 1$. Ainsi :

$$\lg 10 = 1 \ ; \quad \ln e = 1 \ ; \quad \mathrm{lb}\, 2 = 1 . \qquad (7)$$

On passe des logarithmes népériens (utiles pour le calcul théorique) aux logarithmes décimaux (utilisés pour le calcul pratique) par la relation de définition (6), avec $a = 10$, d'où :

$$\lg x = M \ln x , \qquad (8)$$

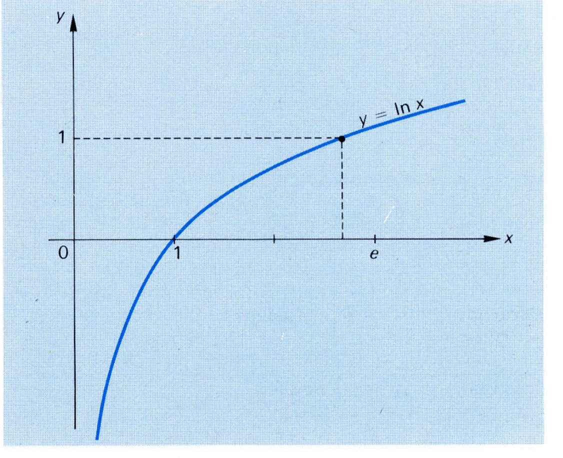
avec $M = 1/\ln 10 = 0{,}434\,294$ ...

● *Variation de la fonction* $y = \ln x$. La fonction est définie et continue pour $x > 0$; sa dérivée est, par définition, $y' = 1/x$, donc toujours positive. Il en résulte que $y = \ln x$ est toujours croissante (pas d'extrémums), quand x varie de 0 à $+\infty$. Quand $x \to 0$, $y \to -\infty$ (avec la convention expliquée p. 112 pour le signe de la fonction $\ln x$) ; quand $x \to +\infty$, $y \to +\infty$.

La dérivée seconde $y'' = -1/x^2$ est toujours négative, donc la courbe tourne sa concavité vers le bas ; elle coupe l'axe des x au point $x = 1$ (car alors $\ln 1 = 0$ par définition). Pour

$$x = e = 2{,}718\,281\,..., \ \ln x = 1 .$$

Graphique de** $y = \ln x$ **(fonction logarithme népérien).



Fonction exponentielle.

C'est la fonction $y = a^x$ ($a > 0$), définie et continue sur $\mathbb{R}$, de $-\infty$ à $+\infty$. On la note aussi :

$$y = a^x = \exp_a x \quad (9)$$

(lire « exponentielle de x dans la base a »). Si $a = e$, la fonction est :

$$y = e^x = \exp x, \quad (10)$$

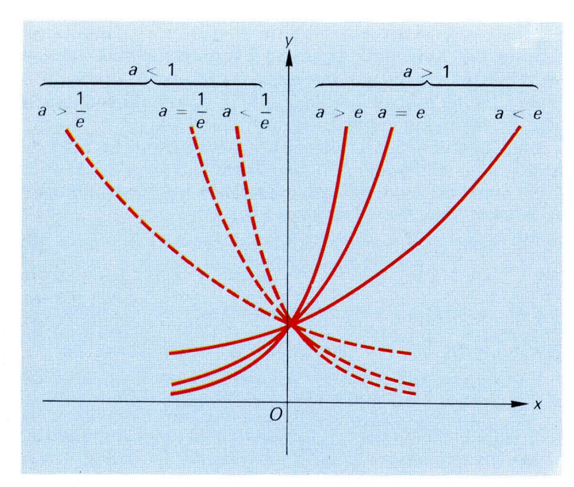
et se nomme « exponentielle de x » sans préciser la base e. Comme on l'a déjà dit, la fonction $y = e^x$ est inverse de la fonction $x = \ln y$; la fonction inverse de $y = a^x$ est $\log_a y = x$.

La dérivée, obtenue en passant par les logarithmes, est $y' = y \ln a$. La fonction exponentielle est donc toujours croissante si $a > 1$ ($\ln a > 0$), et toujours décroissante si $a < 1$ ($\ln a < 0$). Les valeurs de $y = a^x$ quand $x \to \pm\infty$ dépendent aussi de a :

$$a < 1 \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty \,; \\ \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0 \,; \end{cases}$$

$$a > 1 \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0 \,; \\ \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty \,. \end{cases} \quad (11)$$

La courbe de $y = a^x$ se déduit de celle de $y = \log_a x$ en considérant l'axe des x comme *axe des ordonnées* et celui de y comme *axe des abscisses*. La courbe représentant $y = e^x$ se déduit de même de celle représentant $y = \ln x$.



***Fonction** $y = a^x$ **pour diverses valeurs de** a. **Pour** $x = 0$, **toutes les fonctions ont la même valeur** $a^0 = 1$. **En traits pleins :** $a > 1$; **en tiretés :** $a < 1$.*

Fonctions circulaires.

Il s'agit des fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ et $\cot x$, définies p. 90 ; les deux premières sont périodiques, de période 2π, les deux dernières, périodiques de période π. Leurs propriétés (addition, etc.) sont résumées p. 148.

● *Dérivées.* On démontre les formules suivantes :

$$\begin{cases} y = \sin x\,; \\ y' = \cos x\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \cos x\,; \\ y' = -\sin x\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \tan x\,; \\ y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\,; \end{cases}$$

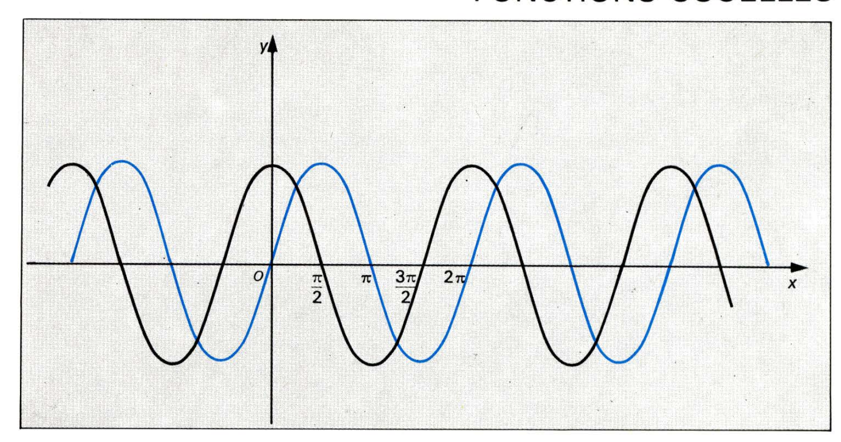
$$\begin{cases} y = \cot x\,; \\ y' = \dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)\,. \end{cases} \quad (12)$$

D'où les dérivées successives,

— pour $y = \sin x$;

$$y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x, \quad \ldots,$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right); \quad (13)$$



***Courbes représentant** $y = \cos x$ **(en noir),** $y = \sin x$ **(en bleu). Les deux courbes se déduisent l'une de l'autre par une translation le long de l'axe des x, de valeur absolue** $\pi/2$.*

— pour $y = \cos x$:

$$y'' = -\cos x, \quad y''' = \sin x, \quad \ldots,$$

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \quad (14)$$

Les formules de MacLaurin s'écrivent ($0 < \theta < 1$) :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin\left[\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right], \quad (15)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cos\left[\theta x + 2n\frac{\pi}{2}\right] \quad (16)$$

● *Variations.*

— Les fonctions $y = \sin x$ et $y = \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$; la relation $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$ montre que les courbes qui les représentent sont égales et se déduisent l'une de l'autre par la translation $-\pi/2$ parallèle à l'axe des x. Étudions par exemple $y = \cos x$ (entre 0 et 2π), soit en nous servant du cercle trigonométrique, soit à l'aide de $y' = -\sin x$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y' = -\sin x$	$0\ -$	-1	$-\ 0\ +$	$+1$	$+\ 0$
$y = \cos x$	1 ↘ (max)	0	↘ −1 ↗ (min)	0	↗ 1 (max)

D'où la courbe (*sinusoïde*) de la figure ci-dessus :

— La fonction $y = \tan x$ est discontinue pour $x = \pi/2, 3\pi/2, \ldots, (\pi/2 + k\pi)$. On s'en aperçoit en étudiant la variation de $y = \tan x$ à l'aide de la représentation géométrique pour x variant de $-\pi/2$ à $+\pi/2$:

1 - Quand $x = -\pi/2$, M est en B' et l'intersection des droites OB' et AT' est rejetée à l'infini ; donc

$$\left(x \to -\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow (\tan x \to -\infty)\,. \quad (17)$$

2 - Quand M' parcourt l'arc $B'A$, c'est-à-dire pour $-\pi/2 < x < 0$, le point T' se rapproche de A ; $\overline{AT'}$ diminue en valeur absolue, mais, puisque $\overline{AT'} < 0$, il croît en valeur algébrique. La fonction $y = \tan x$ est donc croissante jusqu'à $x = 0$ ($\tan x = 0$). De même, quand x varie de 0 à $\pi/2$, $\overline{AT} > 0$ est croissant.

3 - Quand $M \to B$, $x \to \dfrac{\pi}{2}$ et $y = \tan x \to +\infty$.

4 - Pour M situé sur arc $\widehat{BA'}$, la variation répète la variation correspondant à M sur l'arc $\widehat{B'A}$; de même arc $\widehat{A'B'}$ correspond à arc $\widehat{AB}$.

La courbe $y = \tan x$ est composée d'éléments discontinus qui se déduisent les uns des autres par une translation de valeur absolue π parallèlement à l'axe des x ; les droites $x = \pi/2 + k\pi$, parallèles à l'axe Oy, sont *asymptotes* à la courbe.

Fonctions circulaires inverses (ou réciproques).

Considérons la fonction $y = \sin x$, qui est continue et strictement croissante dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. A toute valeur de y correspond un arc x, qu'on écrit :

$$x = \arcsin y \quad (|y| \leqslant 1) \quad (18)$$

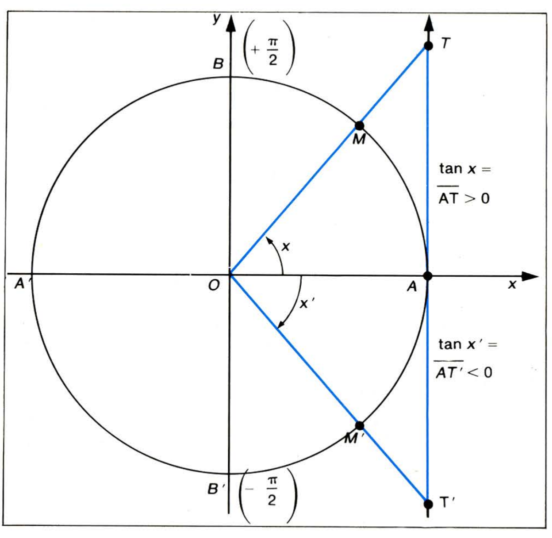
(lire : « arc sinus y »).

x est la *fonction circulaire réciproque* (*inverse*) de y, telle que x soit compris entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$.

Si l'on convient d'appeler toujours y la fonction et x la variable, l'écriture

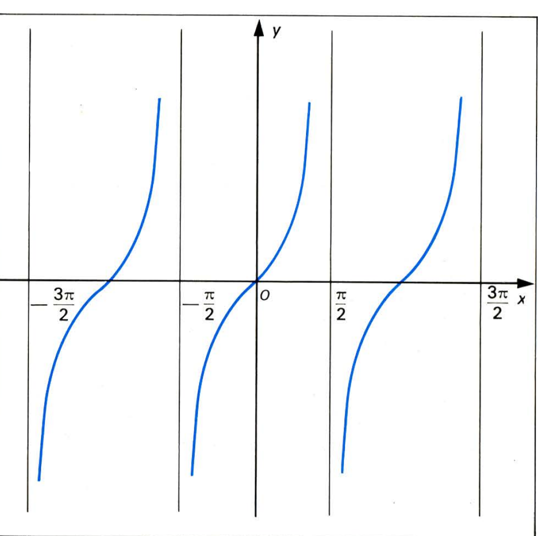
$$y = \arcsin x, \quad \text{avec} \quad |x| \leqslant 1\,, \quad (19)$$

signifie : 1° que l'arc y a un sinus égal à x, soit $\sin y = x$; 2° que cet arc est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$,



Variation de** $y = \tan x$ **: étude géométrique. La valeur de y est représentée par le segment AT (ou AT').

***Courbe représentant la fonction** $y = \tan x$.*



$$\text{soit} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad (20)$$

La dérivée de cette fonction est

$$y'_x = (\arcsin x)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (21)$$

voir aussi p. 148.

Fonctions hyperboliques.

On définit, en analyse, les fonctions suivantes, qui font intervenir le nombre e :

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \operatorname{coth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} \text{ (peu usitée)}. \qquad (22)$$

On lit : « sinus hyperbolique de x », « cosinus hyperbolique de x », « tangente hyperbolique de x », « cotangente hyperbolique de x », ou, plus brièvement, on épèle les deux lettres qui précèdent x : « sh x », « ch x », « th x ». Ces fonctions sont liées à l'*hyperbole* comme le sinus et le cosinus sont liés au cercle. On a notamment la relation importante :

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \qquad (23)$$

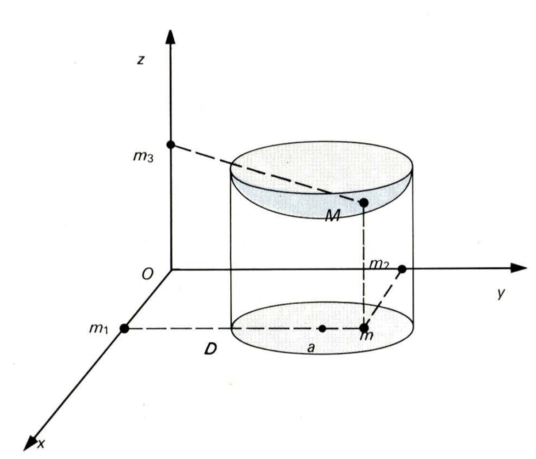
On définit aussi les *fonctions hyperboliques réciproques* : par exemple, $y = \operatorname{arg\,sh} x$ (lire : argument sh x) est équivalente à $x = \operatorname{sh} y$.

(Voir p. 154 pour l'étude des fonctions hyperboliques.)

Fonctions de plusieurs variables. Fonctions composées.

Domaines de définition. Continuité.

● *Considérons une surface gauche*, dont l'image concrète peut nous être donnée par un fragment de peau d'orange, ou une « calotte », et rapportons cette surface à un trièdre de référence euclidien. Un point M sur cette surface est défini par ses trois coordonnées x, y et z ; si la surface est « géométrique » (c'est-à-dire, intuitivement parlant, régulière), on peut trouver une relation $z = f(x, y)$ telle que, à tout couple convenable (x, y) de valeurs des variables x et y corresponde une valeur de z, ce qui revient à dire qu'aux points m de coordonnées x et y dans le plan Oxy, appartenant à un domaine D du plan, on fait correspondre les points M de la surface gauche considérée.



La surface gauche, en forme de cupule, est représentative de la fonction de deux variables $z = f(x, y)$.

La fonction $z = f(x, y)$ est une *application f* de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$(x, y) \xrightarrow{f} z, \quad \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}. \qquad (1)$$

On peut imaginer une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, telle que :

$$u = g(x, y, z), \qquad (2)$$

faisant correspondre à tout triplet (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ un nombre u de $\mathbb{R}$: c'est une *fonction de trois variables*.

Une fonction de n variables réelles,

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

est une application $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

La fonction $z = f(x, y)$ considérée plus haut n'est définie que pour certains couples (x, y) seulement, correspondant aux points m situés dans la zone en grisé de la figure. L'ensemble D de ces couples est le *domaine de définition* de la fonction f ; dans l'exemple illustré par la figure, D est un disque de centre a et de rayon r, tel que $am \leqslant r$.

● *Pour étudier la continuité* et les propriétés d'une fonction d'une variable réelle, nous avons été amené à définir des intervalles $[a, b]$, $]a, b[$, etc. de $\mathbb{R}$ appelés *segments*. Pour étudier une fonction de *plusieurs* variables réelles, nous définirons de même des ensembles sur $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, ..., \mathbb{R}^n$. Voici des exemples de tels domaines de définition.

— Si les variables $x_1, x_2, ..., x_n$ sont soumises à la condition :

$$a_1 < x_1 < b_1, \quad a_2 < x_2 < b_2, \quad ..., \quad a_n < x_n < b_n, \qquad (3)$$

l'ensemble des *points* de $\mathbb{R}^n$ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ s'appelle un *pavé ouvert* (il ne s'agit pas de *points* au sens géométrique élémentaire, mais d'éléments à n composantes ; voir pp. 106 et 116).

— Si l'on doit avoir :

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \quad ..., \quad a_n \leqslant x_n \leqslant b_n, \qquad (4)$$

le domaine de définition est un *pavé fermé*.

Exemples :

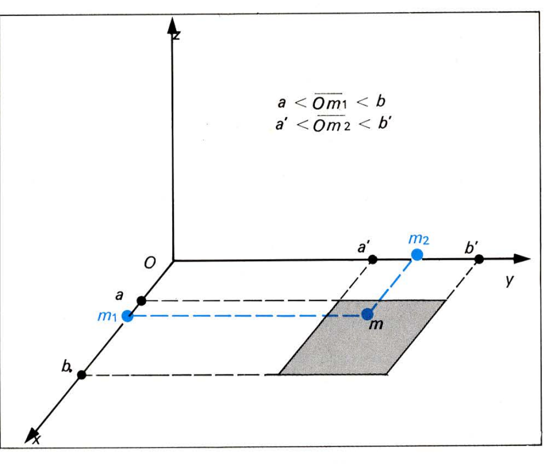
1 - Dans le cas $z = f(x, y)$, où $n = 2$, un *pavé fermé* est l'ensemble des points m tels que :

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad a' \leqslant y \leqslant b' ; \qquad (5)$$

c'est un *rectangle fermé* de côtés égaux à $\overline{ab}$ et $\overline{a'b'}$.

2 - Dans le cas $u = f(x, y, z)$, les conditions :

$$a < x < b, \quad a' < y < b', \quad a'' < z < b'' \qquad (6)$$



Pavé fermé rectangulaire.

définissent un *parallélépipède ouvert* d'arêtes $\overline{ab}$, $\overline{a'b'}$, $\overline{a''b''}$: le fait qu'il soit *ouvert* interdit de considérer les valeurs $x = a$ ou b, $y = a'$ ou b', $z = a''$ ou b''. c'est-à-dire les points situés sur la surface du pavé.

— Un domaine tel que $am < r$, quand $n = 2$, est appelé un *disque* (c'est le cercle de centre a et de rayon r) ; si $n = 3$, la condition $am < r$ imposée aux points de coordonnées (x, y, z) définit un domaine appelé *sphère* (ou *boule*). Plus généralement un domaine de *points m* tels que $am < r$ s'appelle une *boule*.

Dans ce qui suit, nous étudierons des fonctions à deux variables x et y, ou à trois variables, x, y et z ; mais les résultats se généralisent à n variables.

Les ensembles D de $\mathbb{R}^n$ sont susceptibles de recevoir les mêmes définitions que les intervalles sur $\mathbb{R}$ (ensembles bornés, points d'accumulation, ensembles fermés, etc.) et le théorème de Bolzano-Weierstrass est toujours vrai, ici aussi (voir ce théorème p. 107).

Enfin la continuité d'une fonction f de plusieurs variables se définit avec autant de rigueur que celle d'une fonction à une seule variable. Nous nous contenterons, ici, d'une description intuitive : dans le cas illustré par la figure précédente, un changement infiniment petit des variables, remplaçant un point m du domaine de définition par un point m' infiniment voisin, entraîne un changement infiniment petit de la fonction, c'est-à-dire transforme M en un point voisin M' sur la surface.

Dérivées partielles et dérivées totales.

● *Dérivées partielles.* Considérons la fonction $u = f(x, y, z)$. Si l'on donne à y et z des valeurs constantes, en supposant que x seul varie, on peut définir la *dérivée de u par rapport à x* :

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (7)$$

(on écrit aussi : $u' = \partial_x u$, ou $\partial_x f$).

La lettre « ∂ » n'est pas un *delta* (« δ »), mais un « d rond » ; on l'utilise pour bien préciser qu'il s'agit d'une *dérivée partielle*. Dans le cas $u = f(x, y, z)$, on définirait ainsi *trois dérivées partielles* :

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (8)$$

On pose souvent, dans le cas d'une fonction de 2 variables, $z = f(x, y)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q \qquad (9)$$

(notation de Monge).

● *Dérivée totale.* Supposons que x, y et z soient des fonctions d'une même variable t, par rapport à laquelle elles admettent les dérivées dx/dt, dy/dt et dz/dt (ce sont des *dérivées* et non des *dérivées partielles*). On montre que la dérivée de $u = f(x, y, z)$ par rapport à t est :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}. \qquad (10)$$

du/dt exprime, si l'on veut, le « taux de variation » de la fonction u lorsque x, y et z varient toutes les trois, alors que $\partial u/\partial x$ ne concerne que la seule variation de x ; pour cette raison du/dt est appelée la *dérivée totale* de la fonction.

Voici un exemple simple. Un cône circulaire a pour rayon $r = 10$ m et pour hauteur $h = 100$ m ; il subit une double déformation : le rayon r *augmente* à la vitesse de 1 mètre par seconde et la hauteur h *diminue* à raison de 10 mètres par seconde. On demande d'exprimer la variation du volume de ce cône.

Soit y ce volume : il est égal au tiers de la surface de base, πr^2, multiplié par la hauteur, soit $y = \pi r^2 h/3$. C'est une fonction de deux variables indépendantes, r et h, dont les dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{2}{3}\pi rh \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial h} = \frac{1}{3}\pi r^2. \qquad (11)$$

Les variables r et h sont des fonctions du temps t ; on a $dr/dt = 1$ (m/s) et $dh/dt = -10$ (m/s) (diminution de hauteur).

La *dérivée totale* dy/dt exprime le taux de variation du volume du cône en fonction du temps. On a, d'après la formule ci-dessus,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial y}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt}, \qquad (12)$$

soit, avec les données $r = 10$, $h = 100$, $dr/dt = 1$ et $dh/dt = -10$,

$$\frac{dy}{dt} \doteq \frac{2}{3}\pi \times 10 \times 100 \times 1 - \frac{1}{3}\pi \times 100 \times 10$$
$$= \frac{1\,000\,\pi}{3} = 1\,047{,}2 \text{ m}^3/\text{s}. \qquad (13)$$

● *Différentielle totale.* En multipliant par dt l'expression de la dérivée totale on obtient la *différentielle totale* de la fonction u :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \qquad (14)$$

(Les expressions comme $(\partial u/\partial x)\, dx$ sont des *différentielles partielles*.)

Fonctions composées, homogènes et implicites ; notion de gradient.

Voir p. 154.

Suites et séries.

Définitions.

● *Une suite de nombres* est un ensemble ordonné de nombres dont la valeur dépend de leur rang. On appelle u_n le terme de rang n et l'on note : la suite u_n ou (u_n). Exemples :

$$u_n = n \ : \ 1, \ 2, \ 3, \ ..., \ n, \ ...$$
$$u_n = 2n : \ 2, \ 4, \ 6, \ ..., \ 2n, \ ...$$
$$u_n = n^2 : \ 1, \ 4, \ 9, \ ..., \ n^2, \ ...$$

Si l'on forme la *somme* des termes d'une suite, on obtient une nouvelle suite de termes :

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, \dots S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \dots \quad (1)$$

La suite S_n et la suite u_n sont dites associées ; leur association constitue, au sens strict, une *série*. La connaissance des termes u_n permet de construire la suite S_n et la connaissance des termes S_n (qu'on appelle les *sommes partielles*) permet de déterminer u_n, puisque :

$$u_1 = S_1, \quad u_2 = S_2 - u_1 = S_2 - S_1, \dots, \quad u_n = S_n - S_{n-1}. \quad (2)$$

Une *série* est donc parfaitement déterminée quand on donne l'une des deux suites. En général, on donne u_n ; les termes u_n peuvent être des nombres (*série numérique*) ou des fonctions (*série de fonctions*).

● Une série est dite *convergente* si la suite S_n a une limite S quand $n \to +\infty$; elle est dite *divergente* dans le cas contraire. Si elle est convergente on écrit :

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (3)$$

● *Voici quelques exemples simples de séries.*

— Série arithmétique : chaque terme de la suite u_n est égal au précédent augmenté d'une grandeur constante r appelée *raison* de la série. Ainsi :

$$1, \ 3, \ 5, \ \dots, \ (2n+1), \dots \quad (4)$$

est une suite de raison 2 ($3 = 1 + 2$; $5 = 3 + 2$; ...) ; la suite associée est :

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 4, \quad S_3 = 9, \quad \dots, \quad S_n = (1 + 2 + \dots + n), \quad \dots \quad (5)$$

On démontre que le n^e terme est donné par :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (6)$$

Plus généralement, si $u_1 = a$, on démontre que :

$$u_n = a + (n-1)r \quad \text{et} \quad S_n = \frac{n(u_n + u_1)}{2}. \quad (7)$$

— Série géométrique : chaque terme de la suite u_n est obtenu en multipliant le précédent par un nombre constant q, *raison* de la série, le premier terme, $u_1 = a$, étant différent de 0 et $q \neq 0$. Ainsi :

$$u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4, \dots, u_n = 2^{n-1}, \dots \quad (8)$$

est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_1 = a = 1$. La suite associée est :

$$S_1 = 1, S_2 = 3, \dots, S_n = 1 + 2 + \dots + 2^{n-1}, \dots \quad (9)$$

Plus généralement, le terme u_n de rang n est $u_n = aq^{n-1}$ et $S_n = a(q^n - 1)/(q-1)$.

Le célèbre problème de l'échiquier est une illustration de cette formule ; un sage mathématicien aurait demandé à son maître, qui lui proposait de choisir une récompense qu'il désirait : « Mets 1 grain de riz sur la première case d'un échiquier, 2 sur la deuxième, 4 sur la troisième, et ainsi de suite, en doublant jusqu'à la dernière ». Comme il y a 64 cases sur un échiquier, le nombre de grains de riz à placer sur la dernière case est aq^{n-1}, soit, puisque ici $a = 1$, $q = 2$, $u_{64} = 2^{63}$; quant au total, S_n, sa valeur est :

$$S_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1} = 2^n - 1 = 2^{64} - 1, \quad (10)$$

c'est-à-dire un nombre de 20 chiffres !

Convergence d'une série.

L'étude de la convergence d'une série est, en analyse, une question importante, car de nombreuses fonctions sont définies par des séries. On établit le théorème suivant :

Une série est convergente si, et seulement si, il existe un entier N tel que, pour tous n et $m > N$, on ait $|S_m - S_n| < \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$ donné.

Ce théorème énonce une condition *nécessaire et suffisante* de convergence : si la série est convergente, la condition est vérifiée ; si la condition est vérifiée, la série est convergente. Mais il est peu commode à utiliser ; c'est pourquoi, en pratique, on utilise des critères *suffisants* de convergence, qui ne permettent de conclure que sous certaines conditions : formule de Stirling, règle de Cauchy, etc.

L'étude des séries étant technique, nous avons regroupé les résultats principaux p. 155.

Convergence uniforme.

Soit une suite de fonctions numériques $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$, ... définies et continues sur un intervalle $[a, b]$. Soit $F(x)$ une fonction définie sur $[a, b]$. S'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un entier N tel que, pour tout $n > N$:

$$\forall x \in [a, b], |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon \quad (11)$$

la suite de terme général $f_n(x)$ est dite *uniformément convergente* sur $[a, b]$. On dit aussi que $F(x)$ est la *limite uniforme* de $f_n(x)$.

Cette limite $F(x)$ est continue sur $[a, b]$: la *convergence uniforme conserve la continuité*.

La notion de convergence uniforme est plus étroite que celle de convergence. Par exemple, la suite $f_n(x) = (n-1)\sin x/(1 + nx)$ est une suite de fonctions continues sur $[0, 1]$. Pour n très grand $f_n(x) \to F(x) = \sin x/x$: la suite est donc convergente (au sens ordinaire) car on a :

$$|f_n(x) - F(x)| < \varepsilon. \quad (12)$$

Mais si $x = 0$, on a $f_n(x) = 0$ quel que soit n ; donc, pour cette valeur de x, $f_n(x)$ ne tend pas vers $\sin x/x$: la fonction $F(x)$ n'est pas définie pour $x = 0$; *la continuité n'est pas conservée* pour cette valeur de la variable.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Généralités.

Historique.

Page 104, nous avons vu comment Newton et Leibniz ont introduit, à la fin du XVIIe siècle, un nouveau type de calcul, portant sur des *infiniment petits*, notés dx, dy, etc., par Leibniz. Le symbole « dx » se lit « différentielle de x » ou, en abrégé « d-de-x » ou encore « d-x ». En étudiant le calcul des dérivées, nous avons appris à évaluer le quotient de deux infiniment petits dy et dx, lorsqu'ils tendent vers zéro en même temps : la limite, si elle existe, de ce quotient est la *dérivée y'* de la fonction $y = f(x)$, dérivée qui s'écrit :

$$y' = \frac{dy}{dx}. \quad (1)$$

Le *calcul différentiel*, à sa naissance, est principalement le calcul des dérivées, considérées comme le quotient de *différences* (= différentielles) infiniment petites, dy, dx. Il a comme complément naturel le *calcul sommatoire*, comme on l'appelait alors, c'est-à-dire la recherche de la limite vers laquelle tend une somme de grandeurs infiniment petites : ce calcul était employé depuis Archimède, en géométrie, pour la recherche des aires et des volumes. L'expression *calcul intégral*, pour le désigner, a été vulgarisée par Jacques Bernoulli vers 1690 ; la notation en a été conçue par Leibniz qui écrit :

$$Y = \int f(x)\,dx, \quad (2)$$

une fonction Y qui admet $f(x)$ comme dérivée et qu'on appelle une *intégrale*. C'est aussi Leibniz qui a donné les premières règles de calcul des intégrales dites *définies* (voir ci-après, p. 120). Toutefois il faut attendre Cauchy (1823) pour voir enfin une définition rigoureuse de l'intégrale s'imposer aux mathématiciens ; cette définition sera précisée par Riemann (1854). Le problème de l'existence de l'intégrale d'une fonction est en rapport, évidemment, avec ces définitions ; il fut définitivement résolu par Darboux, en 1875. En 1894, Stieltjes a donné une définition plus générale de l'intégrale d'une fonction, et, en 1902, Lebesgue a encore étendu le concept.

Notion de différentielle.

● *Remarques sur la notation différentielle.* Nous avons écrit, indifféremment :

$$y'_x = f'(x) \quad \text{ou} \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad (3)$$

pour noter la dérivée y' d'une fonction $f(x)$ dans un intervalle de définition donné.

Le symbole dy/dx est une *manière conventionnelle* d'écrire la limite (si elle existe) de la fraction $\Delta y/\Delta x$ quand Δx tend vers zéro avec les réserves énoncées plus haut. Le symbole dy/dx doit donc être considéré, pour l'instant du moins, *en bloc*. On écrit aussi le symbole d/dx appelé *facteur de différentiation* : il indique qu'on décide de calculer la dérivée d'une fonction (simple ou composée) par rapport à la variable x. On écrit donc :

$$y'_x = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx}. \quad (4)$$

Si $y = u + v$, on peut aussi écrire :

$$y'_x = \frac{d}{dx}(u + v) = \frac{dy}{dx}, \quad (5)$$

etc.

Il se présente cependant des problèmes où il est commode de pouvoir considérer dy et dx séparément, comme s'il s'agissait du numérateur et du dénominateur d'une fraction. Cela est possible si l'on introduit la *notion de différentielle*.

● *Définition* : On appelle *différentielle* d'une fonction $y = f(x)$ dérivable la fonction linéaire qui à h associe le produit, $f'(x) \times h$, de sa dérivée par h.

On note :

$$\text{différentielle de } y = dy = f'(x) \times h. \quad (6)$$

Si $y = x$, on a $f'(x) = 1$, d'où

$$\text{différentielle de } x = dx = 1 \times h = h. \quad (7)$$

Par suite, on peut écrire

$$dy = f'(x) \times h = f'(x)\,dx : \quad (8)$$

la différentielle d'une fonction s'écrit comme le produit de sa dérivée par la différentielle de la variable.

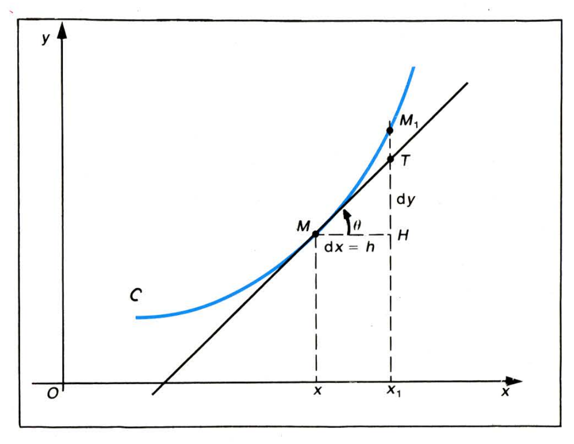
Cette définition possède une signification géométrique importante. Soit une courbe C représentant la fonction $y = f(x)$ et la tangente MT au point $M(x, y)$; un accroissement h de la variable correspond au point M_1 de coordonnées $x_1 = x + h$ et $y_1 = f(x + h) = f(x_1)$. On voit sur la figure ci-après que :

$$\tan\theta = \frac{\overline{HT}}{h}, \quad \text{d'où} \quad \overline{HT} = h \times \tan\theta. \quad (9)$$

Mais $\tan\theta = y'$ (signification géométrique de la dérivée, voir n° **517.3, C,** *a*) ; donc

$$\overline{HT} = h \times f'(x) = dy \quad (10)$$

La différentielle d'une fonction (= dy) est égale à l'accroissement $\overline{HT}$ de l'ordonnée de la tangente en M, pour un accroissement $h = x_1 - x$ de la variable.



Signification géométrique de la différentielle d'une fonction.

Remarque : Nous n'avons fait aucune hypothèse sur la nature de dx, qui peut être aussi bien fini qu'infiniment petit. Dans ce dernier cas, dy est alors, lui aussi, infiniment petit et l'on montre que $\Delta y/dy \to 1$, c'est-à-dire que l'accroissement Δy de la fonction a pour partie principale dy, quand $h = dx \to 0$. Dorénavant — sauf précision contraire — nous considérerons dx et dy comme des infiniment petits.

L'intérêt de la notion de différentielle réside notamment dans le fait qu'elle facilite les opérations de dérivation dans le cas d'un changement de variable.

● *Calcul des différentielles.* Il ne présente aucune difficulté particulière et se ramène au calcul des dérivées, puisque $dy = f'(x)\,dx$. Exemples :

$$y = 5x^2 : y' = 10x \quad \text{et} \quad dy = 10x\,dx ; \quad (11)$$

$$y = uv : y' = u'v + v'u \text{ et } dy = du\,v + dv\,u. \quad (12)$$

On peut aussi écrire :

$$d(5x^2) = 10x\,dx, \text{ etc.} \quad (13)$$

● *Dérivées d'ordre supérieur.* Une notation différentielle est parfois employée pour les dérivées d'ordre supérieur. Ainsi note-t-on :

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \cdots y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4}. \quad (14)$$

Aucun artifice ne permet, comme c'était le cas pour $y' = dy/dx$, de considérer, par exemple, d^2y/dx^2 ou d^4y/dx^4 comme des quotients.

Le mathématicien et le percepteur.

Tout le monde connaît le principe des *tranches* d'impôts. Pour évaluer l'impôt sur le revenu dû par un contribuable, on divise son revenu x en *tranches* (les mathématiciens diraient : en *intervalles*), et l'on applique à chaque tranche un taux progressif. Prenons l'exemple d'une loi fiscale qui prévoirait un taux $t_1 = 0\,\%$ pour un revenu compris entre 0 et 100 (100 étant exclus), ce qui s'écrit, mathématiquement :

$$\forall x,\ x \in [0, 100[\,,\quad t = 0\,; \tag{15}$$

un taux $t_2 = 5\,\%$ pour la tranche allant de 100 à 300, 300 étant exclus, soit :

$$\forall x,\ x \in [100, 300[\,,\quad t = 0{,}05\,; \tag{16}$$

et de même : $t_3 = 10\,\%$ pour la tranche allant de 300 à 500 (exclus), $t_4 = 20\,\%$ pour la tranche allant de 500 à 700 (exclus), $t_5 = 30\,\%$ pour $x \geqslant 700$.

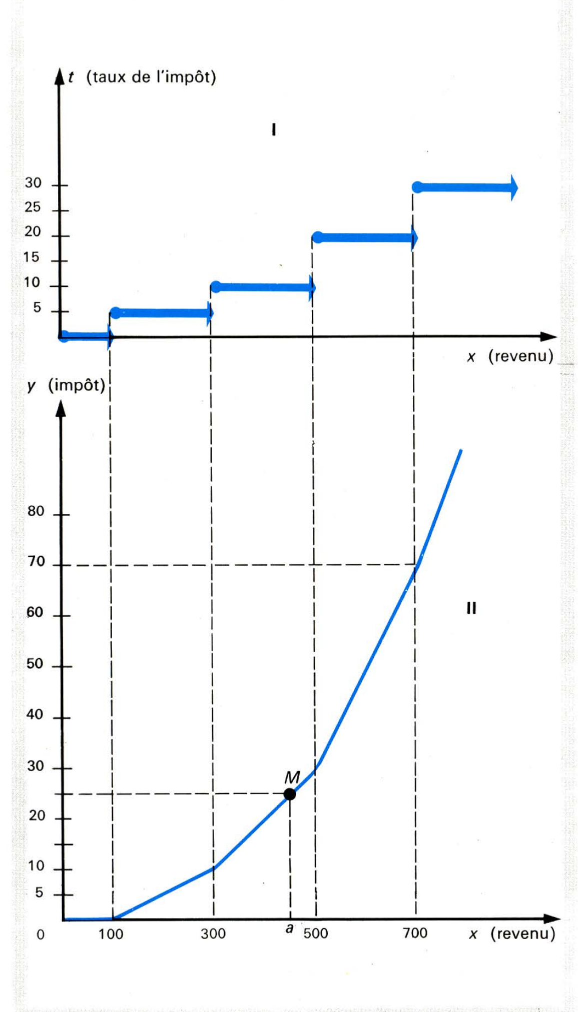
Chaque tranche supporte donc un impôt $y_1, y_2, \ldots$, et l'impôt global dû par le contribuable est :

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5\,, \tag{17}$$

qu'on peut écrire avec le symbole Σ :

$$y = \sum_{i=1}^{i=5} y_i\,,\ \text{ou, plus simplement,}\ \sum_1^5 y_i\,. \tag{18}$$

Cela peut se représenter graphiquement de la façon indiquée sur la figure ci-après :



Calcul d'impôt.
I - Courbe des taux :** t **est constant dans chaque intervalle,** t(x) **est une fonction en escalier.
II - Courbe correspondante des impôts : la croissance n'est pas la même dans chaque « tranche » ; la fonction** y = f(x) **est dite polygonale. Pour déterminer combien un contribuable paye d'impôt, il suffit de mener la parallèle à Oy issue du point M d'abscisse** $\overline{Om}$ = a = **revenu considéré.

La « courbe » II de la figure ci-dessus a été construite de sorte que, pour chaque valeur de x, la somme $y = \sum_1^i y_i$ puisse être lue immédiatement. Dans chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}[$, le graphique est une ligne droite représentant la fonction $y = tx$. Par exemple, pour $a = 450$, l'impôt est :

1re tranche : $100 \times 0 \quad = \ 0 = y_1$,
2e tranche : $200 \times 0{,}05 = 10 = y_2$,
3e tranche : $150 \times 0{,}1 \quad = 15 = y_3$,

d'où :

$$y = y_1 + y_2 + y_3 = 25\,. \tag{19}$$

Donnons à ce calcul une allure plus générale et plus mathématique :

— Chaque *tranche* correspond à un intervalle ouvert à droite, $[x_0, x_1[$, $[x_1, x_2[$, ..., auquel appartient la variable x (le revenu). La « largeur » d'un tel intervalle est $\Delta_1 x = x_1 - x_0$ pour le premier, $\Delta_2 x = x_2 - x_1$ pour le second, et ainsi de suite.

On a calculé y par la relation

$$y = t_1 \times \Delta_1 x + t_2 \times \Delta_2 x + \cdots + t_5 \times \Delta_5 x = \sum_1^5 t_i\ \Delta_i x\,, \tag{20}$$

ou encore, puisqu'il n'y a pas d'ambiguïté,

$$y = \Sigma\, t(x)\, \Delta x\,, \tag{21}$$

$t(x)$ étant une fonction en escalier.

Supposons maintenant qu'on veuille appliquer la loi fiscale avec une plus grande justice. Il faudra découper le revenu du contribuable en plusieurs tranches, dont l'épaisseur, Δx, sera très petite : par exemple $\Delta x = 100$, ou $\Delta x = 10, \ldots$; *à la limite*, on sera conduit à tenir compte de tranches *infiniment petites*, $\mathrm{d}x$, de revenu, auxquelles s'appliquent le taux $t(x)$; et, pour calculer y, nous devrons faire la somme de tous les produits $t_1\,\mathrm{d}x$, $t_2\,\mathrm{d}x$, ..., qui seront en quantité infinie. Au lieu d'écrire cette somme avec un Σ, nous la désignerons par le symbole $\int$ qui se lit « intégrale » et nous aurons :

$$\text{au lieu de } y = \Sigma\, t(x)\, \Delta x\,,\quad y = \int t(x)\, \mathrm{d}x\,. \tag{22}$$

La fonction y est appelée l'*intégrale* de la fonction $t(x)$. En passant ainsi à la limite, la ligne polygonale qui représentait y se transforme en une *courbe continue* $y = f(x)$ dont la dérivée est $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x = t(x)$.

(Nous avons vu, en effet, que chaque « tronçon » du graphique de $y = \Sigma\, t(x)\, \Delta x$ correspond à un « saut »

$$\Delta y = t(x)\, \Delta x\,,\ \text{d'où}\ t(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,;\ \text{quand}\ \Delta x \to 0,\ t(x)$$

est, par définition, la dérivée de la fonction y.)

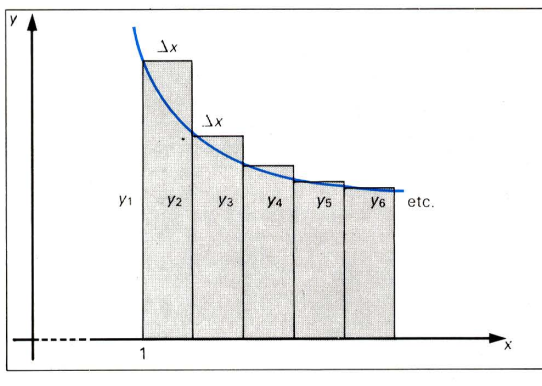
Le mathématicien et l'arpenteur.

Soit à mesurer l'aire comprise entre une courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe des x et deux ordonnées aA et bB, parallèles à l'axe des y, d'abscisses $x = a$ et $x = b$; pour fixer les idées, prenons la courbe $y = 1/x$, $a = 1$ et $b = 3$. Nous avons vu (p. 112) que, par définition, cette aire est égale à ln 3. Pour la calculer, divisons l'intervalle $[a, b[$ en *tranches* d'épaisseur Δx très petite (par exemple $\Delta x = 1$ mm, ce qui fournit, entre $a = 1$ et $b = 3$, vingt « tranches »). Considérons, d'autre part, les rectangles de largeur Δx et de longueurs :

$$y_1 = \frac{1}{a} = 1\,,\quad y_2 = \frac{1}{a + \Delta x}\,, \ldots\,;$$

ils ont pour surface :

$$S_i = \frac{1}{x_i} \times \Delta x\ \ (x_i = x_1, x_2, \ldots)\,. \tag{23}$$



Calcul d'une surface.

La somme des valeurs S_i donne une approximation de la surface S cherchée :

$$S \simeq \sum_{i=1}^{i=3} \frac{1}{x_i}\,\Delta x = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\Delta x}{x_i}\,. \tag{24}$$

Quand $\Delta x \to 0$, $S \to \ln x$ (par définition) et l'on peut écrire, comme précédemment, en remplaçant Σ par $\int$:

$$S = \int_1^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 3\,. \tag{25}$$

Si l'on avait cherché à calculer la surface comprise entre deux ordonnées quelconques d'abscisses a et b, on aurait trouvé, plus généralement :

$$S_a^b \simeq \sum_a^b \frac{1}{x_i}\,\Delta x \to \int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln b - \ln a\,. \tag{26}$$

Comparaison de ces deux exemples.

● *Dans le premier cas* (calcul d'un impôt), nous sommes partis d'une fonction en escalier $t(x)$, pour calculer un impôt $y = \Sigma\, t(x)\, \Delta x$; *puis*, en passant à la limite, c'est-à-dire en considérant que les « marches », Δx, de cet escalier devenaient des infiniment petits $\mathrm{d}x$, nous avons écrit $y = \int t(x)\,\mathrm{d}x$.

● *Dans le second cas*, nous sommes partis de la fonction continue $f(x) = 1/x$, pour calculer une aire S ; puis nous avons remplacé le graphique continu de $y = 1/x$, par le graphique discontinu d'une fonction en escalier, dont les « marches » avaient pour largeur Δx. Nous avons ainsi calculé une *approximation* de S, notée $\sum_a^b \frac{1}{x_i} \times \Delta x$ et, en passant à la limite, nous avons écrit :

$$S_a^b = \int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \tag{27}$$

● *Plus généralement*, il est possible, lorsqu'une fonction $f(x)$ est continue :

— de l'approximer par une fonction en escalier et de calculer une approximation de Y égale à $\sum_a^b f(x_i)\, \Delta x$;

— de passer à la limite, et de calculer avec rigueur $Y = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Le calcul de Y à partir de y s'appelle une *intégration*, ou un *calcul intégral* ; Y est une *intégrale* de y. Nous venons de voir qu'il permet d'évaluer un impôt ou une surface. Mais, bien entendu, si l'intérêt du calcul intégral se limitait à faciliter le travail de l'Inspecteur des impôts directs ou de l'arpenteur, il ne mériterait pas tous les efforts que lui ont consacrés les mathématiciens depuis Leibniz. En fait, ce vaste domaine de l'analyse s'applique, au premier chef, à toutes les branches des sciences physiques ; mais, surtout, il constitue une théorie mathématique très complète et très générale, dont nous allons indiquer maintenant les principes.

Intégrales définies.

L'intégrale simple.

Nous allons donner aux définitions intuitives qui précèdent une forme rigoureuse.

Soit une fonction $f(x)$, définie, réelle et bornée sur un intervalle $[a, b]$. Le « découpage en tranches » de la variable x consiste à choisir sur $[a, b]$ les *points* (valeurs) successifs $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, b$ et à considérer les intervalles $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_p, x_{p+1}]$, ..., $[x_n, b]$. Sur chaque $[x_p, x_{p+1}]$, prenons une valeur arbitraire de x, que nous nommerons ξ_p (ξ est la lettre grecque *xi*), et formons les produits :

$$(x_1 - a)\, f(\xi_0),\ (x_2 - x_1)\, f(\xi_1), \ldots, (b - x_n)\, f(\xi_n)\,, \tag{1}$$

$f(\xi_i)$ étant la valeur que prend $f(x)$ quand $x = \xi_i$ (dans l'exemple du calcul d'un impôt, ξ_i était le *taux* de chaque tranche).

Cela posé, on dit que $f(x)$ est *intégrable au sens de Riemann* sur $[a, b]$ si la somme :

$$\Sigma = (x_1 - a)\, f(\xi_0) + \cdots + (x_{p+1} - x_p)\, f(\xi_p) + \cdots + (b - x_n)\, f(\xi_n) \tag{2}$$

tend vers une *limite finie* I, quel que soit le choix des ξ_p, lorsque le nombre des x_p tend vers l'infini et que le plus grand des intervalles $[x_p, x_{p+1}]$ tend vers 0.

Si $f(x)$ est intégrable au sens de Riemann, ou, plus brièvement, *intégrable*, on écrit :

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{3}$$

notation qui se lit : « intégrale (ou somme) de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ ».

● *Remarques* :

— I est un *nombre réel*, fonction de x ; on précise éventuellement I_a^b. a et b sont les *limites d'intégration* ; a est la limite *inférieure*, b la limite *supérieure* ;

— le nombre I s'appelle l'*intégrale définie* de $f(x)\,dx$ sur $[a, b]$;

— le calcul de I est une *intégration* ; c'est, en général, un calcul difficile (néanmoins, nous avons vu qu'il était simple dans le cas où $f(x)$ est une fonction en escalier).

Propriétés des intégrales définies.

● *On démontre aisément les formules suivantes* : $f(x)$ et $g(x)$ étant supposées intégrables sur $[a, b]$,

$$\left\{\begin{array}{l} I_a^a = 0 ; \quad I_a^b = -I_b^a ; \\ \int_a^b \lambda\, dx = \lambda(b-a) \quad (\lambda = C^{te}) ; \\ \int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx ; \\ \int_a^b [f(x)+g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx ; \\ f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b g(x)\, dx \\ (\text{si } a < b). \end{array}\right. \qquad (4)$$

● *Une fonction n'est pas, a priori, intégrable sur* $[a, b]$. Il est donc nécessaire, avant de calculer une intégrale, de démontrer qu'elle existe, c'est-à-dire que la fonction considérée est intégrable sur $[a, b]$. On se sert, pour cela, de théorèmes généraux rappelés à la p. 155.

L'ensemble des fonctions intégrables sur un intervalle $[a, b]$ possède la structure d'*espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ (voir p. 46).

● *Valeur moyenne d'une fonction intégrable sur* $[a, b]$: c'est l'expression

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx . \qquad (5)$$

Cette formule est d'un usage courant en statistique. Commentons-la rapidement sur un exemple. On a classé un échantillon de population en fonction du *revenu fiscal* x des individus ; le résultat de l'enquête est le suivant :

Revenu fiscal x	Nombre d'individus y ayant un revenu fiscal x	Largeur Δx de la tranche	Produit $y \times \Delta x$
$0 \leqslant x < 100$	10	100	1 000
$100 \leqslant x < 300$	20	200	4 000
$300 \leqslant x < 500$	100	200	20 000
$500 \leqslant x < 700$	70	200	14 000
$700 \leqslant x < 1\,000$	30	300	9 000
$1\,000 \leqslant x < 2\,000$	10	1 000	10 000
			58 000

Certes, ce tableau ne donne pas des informations très précises : nous savons, par exemple, qu'il y a 100 personnes dont le revenu est compris entre 300 et 500, mais nous ignorons comment elles se répartissent dans ces limites. Acceptons cette imprécision. La somme des produits $y \times \Delta x$ donne la somme totale des revenus de l'échantillon étudié ; d'autre part, le nombre y d'individus ayant un revenu x est une fonction de x. Si l'on fait le rapport

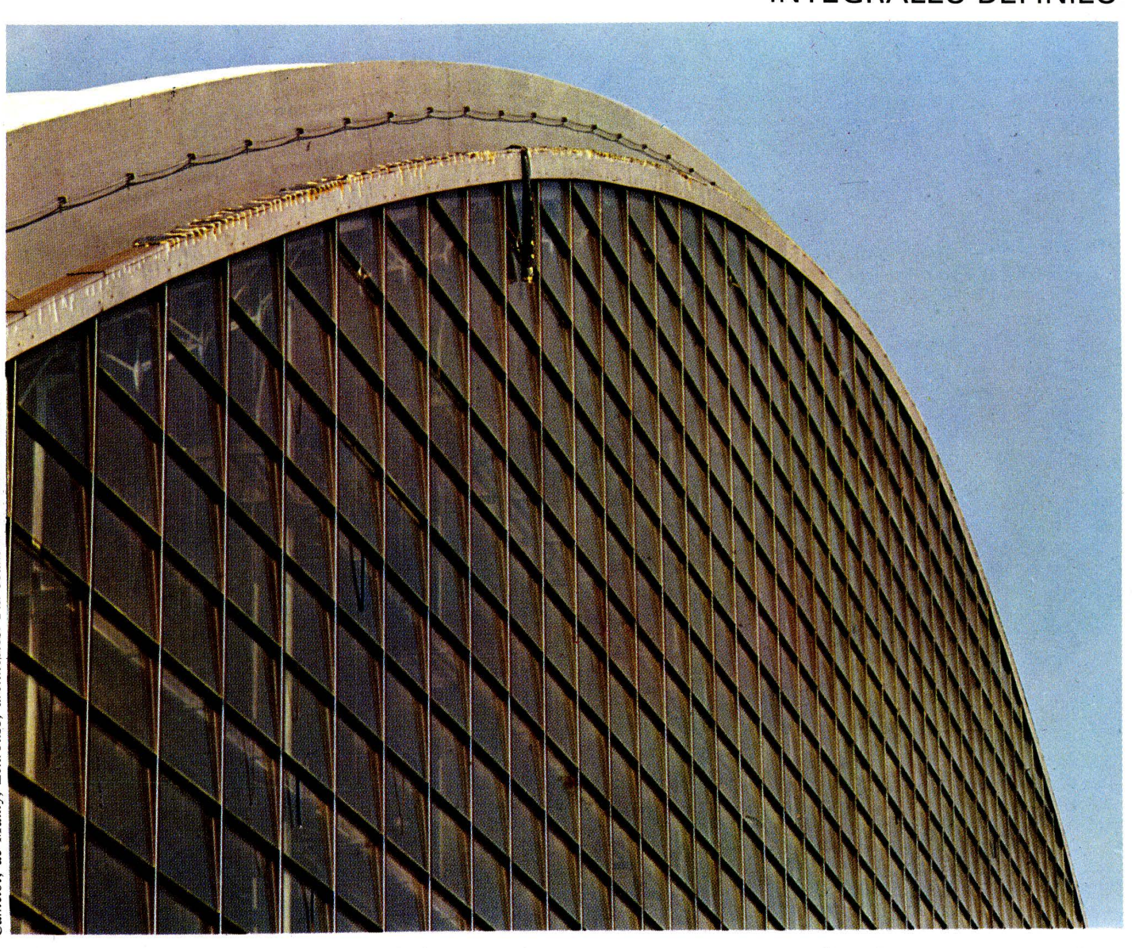
$$\frac{58\,000}{2\,000 - 0} = \frac{58\,000}{2\,000} = 29 , \qquad (6)$$

on obtient, avec approximation, la *valeur moyenne* $\bar{y}$ (« *y* surligné ») de la fonction y sur l'intervalle $[0, 2\,000]$ des revenus ; on écrit :

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y\, \Delta x}{b-a} \quad (\text{ici, } a = 0,\ b = 2\,000) . \qquad (7)$$

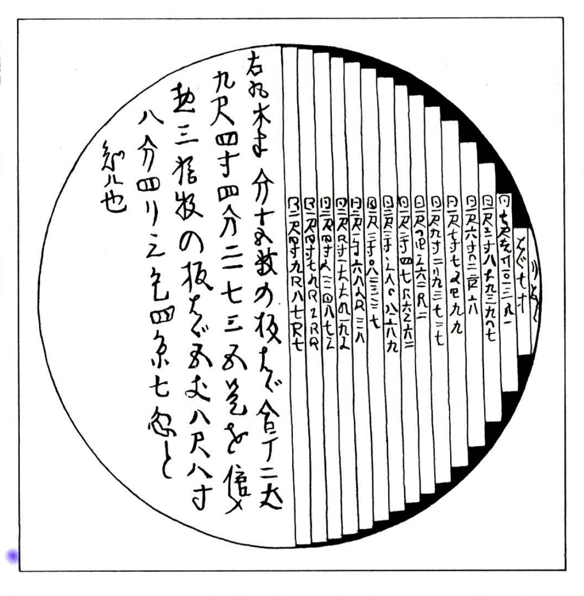
Cette moyenne est dite *pondérée* par Δx, ce qui exprime que chaque valeur de y est multipliée par un *coefficient*. Si toutes les tranches étaient de même épaisseur, la pondération serait dite *uniforme*.

Soit maintenant la fonction $y = 1/x$, continue dans l'intervalle $[2, 3]$; quelle est sa valeur moyenne sur cet intervalle ? On peut, certes, procéder à un découpage en tranches ; mais la formule $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$ est évidemment plus heureuse.



Camelot, de Mailly, Zehrouss, architectes. Ph. Jeanbor © Photeb. D.R./T.

Les vitres rectangulaires, sous le dôme du* Centre national des industries et des techniques, *donnent une représentation visuelle de la méthode utilisée en calcul infinitésimal pour trouver la surface délimitée par une courbe.



Le yenri,* ou principe du cercle, *forme première du calcul infinitésimal au Japon, est attribué traditionnellement à* Seki Kōwa, *un mathématicien du XVIIe siècle. Le dessin, datant de 1670, donne la surface du cercle à partir de la somme des surfaces d'une série de rectangles.

Nous avons vu plus haut que

$$\int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \ln b - \ln a ;$$

donc, ici :

$$\bar{y} = \frac{1}{3-2}(\ln 3 - \ln 2) = \ln \frac{3}{2} . \qquad (8)$$

Remarque : Pour $x = 2$, $y = 1/2$; pour $x = 3$, $y = 1/3$. Donc, puisque $1/3 < y < 1/2$, le résultat précédent permet une approximation (grossière) de $\ln 3/2$:

$$0{,}333\,33 < \ln \frac{3}{2} < 0{,}5 . \qquad (9)$$

Primitives et intégrales.

● *Primitives*. Considérons le tableau de dérivées suivant, où C désigne une constante :

Y	$Y' = y$
$Y = x + C$	$y = 1$
$Y = kx + C$	$y = k$
$Y = x^2 + C$	$y = 2x$
$Y = \ln x + C$	$y = \frac{1}{x}$

Les fonctions Y, qui admettent y pour dérivée, sont dites *primitives de* y ; ainsi :

$$(\text{Primitives de } y = x) = Y = \frac{x^2}{2} + C ; \qquad (10)$$

$$(\text{Primitives de } y = \frac{1}{x}) = \ln x + C \qquad (11)$$

$$(\text{Primitives de } y = \frac{1}{x}) = \ln x + \ln C = \ln Cx . \qquad (12)$$

La constante C explique que l'on parle *des* primitives de y et non de *la* primitive de y, car C peut prendre une infinité de valeurs, et à chacune d'entre elles correspond une primitive particulière de y.

Par contre, si l'on impose à Y d'obéir à certaines conditions, la constante C n'est plus arbitraire. Par exemple, si l'on demande de calculer *la* primitive de y qui s'annule pour $x = 5$, on procédera de la sorte :

1 - Les primitives de $y = x$ sont données par la formule générale :

$$F(x) = Y = \frac{x^2}{2} + C . \qquad (13)$$

2 - Si $x = 5$, on a :

$$F(5) = \frac{25}{2} + C . \qquad (14)$$

3 - On veut que $F(5) = 0$, donc $C = -\frac{25}{2}$.

4 - La primitive cherchée est $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{25}{2}$.

Enfin, si $F(x)$ et $G(x)$ sont deux primitives de $f(x)$, on a obligatoirement :

$$F(x) - G(x) = C \text{ (constante)}, \qquad (15)$$

puisque, en dérivant les deux membres, on obtient :

$$F'(x) - G'(x) = 0. \qquad (16)$$

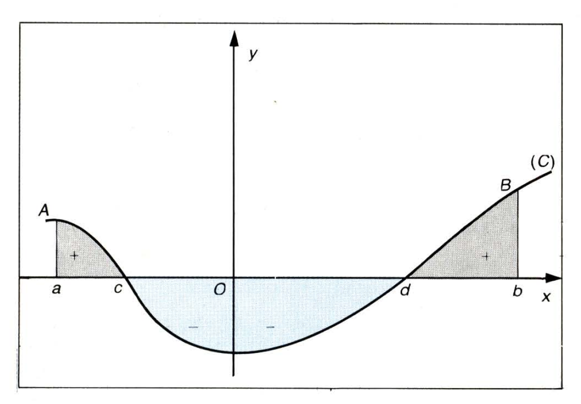
● *Calcul des intégrales définies.* On démontre le théorème suivant : $\int_a^t f(x)\,dx$ pour t appartenant à l'intervalle $[a, b]$ est *une* primitive de la fonction $f(x)$, supposée continue sur $[a, b]$. En conséquence de ce théorème, $I = \int_a^b f(X)\,dx$ peut se calculer par la *formule fondamentale* suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \qquad (17)$$

$F(x)$ désignant une primitive continue de $f(x)$.

Ainsi donc l'*intégration* d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle $[a, b]$ se ramène à la *recherche des primitives* de $f(x)$. Mais on doit souligner ceci : s'il existe un couple de fonctions $f(x)$ et $f'(x)$ tel que la seconde soit dérivée de la première, alors $f(x)$ est une primitive de $f'(x)$, *mais* cela ne signifie pas que $f'(x)$ soit intégrable au sens de Riemann. On peut montrer, en effet, que dans certains cas, $f'(x)$ n'est pas intégrable (Volterra). C'est pourquoi on ne peut pas dire que l'intégration est l'opération réciproque de la dérivation.

● *Signification géométrique de l'intégrale définie.* Supposons $a < b$; l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ représente l'aire comprise entre la courbe (C), graphique de $f(x)$, l'axe Ox et les parallèles à Oy d'abscisses a et b. Cette aire est positive si $f(x) \geqslant 0$ (courbe « au-dessus » de Ox), négative si $f(x) \leqslant 0$ (courbe « au-dessous » de Ox).



L'intégrale définie est l'« aire de la courbe », c'est-à-dire l'aire comprise entre aA, bB, l'axe Ox et la courbe (C). On a indiqué le signe de l'aire des différentes zones.

Ainsi, dans le cas de la figure ci-dessus, l'aire totale colorée est donnée par :

$$S = \int_a^c (f)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad (18)$$

ou, plus simplement :

$$S = I_a^c + I_c^d + I_d^b = I_a^b. \qquad (19)$$

Extension de la notion d'intégrale définie.

● *Limites infinies.* Si $f(x)$ est intégrable sur $[a, b]$, on peut se demander ce que devient l'intégrale I_a^b quand $b \to +\infty$; si I_a^b a une *limite quand* $b \to +\infty$, on la représente par $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. On dit alors que l'intégrale *converge*, ou encore qu'elle *a un sens.* Dans le cas contraire, on dit qu'elle *diverge*, ou qu'elle *n'a pas de sens.* De même, si la limite inférieure de l'intervalle tend vers $-\infty$, et si I_a^b a une limite quand $a \to -\infty$, on écrit

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = I_{-\infty}^b. \qquad (20)$$

● *Exemple* : Soit l'intégrale définie

$$\int_1^N \frac{dx}{x^2}.$$

Comme on a

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}, \qquad (21)$$

une primitive de $1/x^2$ est $F(x) = -1/x$ et l'on peut écrire :

$$\int_1^N \frac{dx}{x^2} = F(N) - F(1) = \left(-\frac{1}{N}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{N} \qquad (22)$$

Quand $N \to +\infty$, $1/N \to 0$; donc $\int_1^{+\infty} (1/x^2)\,dx$ a un sens et vaut 1.

● *Remarque.* Ne pas confondre une intégrale dont la (ou les) limite(s) devient(nent) infinie(s), et qui converge dans ces circonstances, avec l'*intégrale indéfinie* $\int f(x)\,dx$, qui est ainsi nommée parce que, $f(x)$ admettant une infinité de primitives de la forme $F(x) + C$, $\int f(x)\,dx$ est définie à une constante près. On écrit alors :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad (23)$$

C désignant la *constante d'intégration.*

Une *intégrale définie* est un *nombre* (même quand ses limites tendent vers ∞) si elle a un sens ; une *intégrale indéfinie* est une *fonction*, définie à une constante près. Exemple :

$$s = \int_a^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{b} + \frac{1}{a}, \text{ mais } \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C. \qquad (24)$$

● *Intégration sur un intervalle ouvert.* On peut aussi rencontrer le cas d'un intervalle tel que $]a, b]$ ou $]a, b[$, tel que f soit intégrable sur tout intervalle fermé $[c, d]$ inclus. Rien ne permet d'affirmer *a priori* que l'intégrale $\int_c^d f(x)\,dx$ a une limite si $c \to a$ et si $d \to b$.

Prenons par exemple $f(x)$ intégrable sur $]a, b]$. Cela signifie que $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ a un sens. Que se passe-t-il si $\varepsilon \to 0$, c'est-à-dire $x \to a$?

— ou bien cette limite existe ;

— ou bien cette limite n'existe pas, et l'on dit que I_a^b n'a pas de sens pour $x = a$.

On démontre, en analyse, des *critères de convergence* qui permettent d'affirmer la convergence d'une intégrale (voir p. 156).

Calcul des intégrales simples.

Voir p. 157, où l'on a donné les principales méthodes de calcul.

Courbes, surfaces, volumes.

A quoi servent les intégrales ?

La définition qui a été donnée p. 120, a une importance capitale : toute grandeur qui est la limite d'une somme de la forme $\Sigma f(x)\,\Delta x$ quand $\Delta x \to 0$ peut être calculée par une intégration. En d'autres termes : si nous désignons par S la somme en question et par I sa limite quand $\Delta x \to 0$, on aura, pour tout $\varepsilon > 0$:

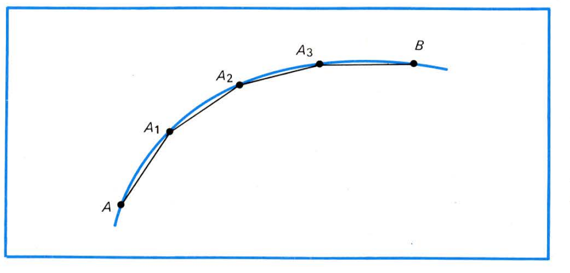
$$|I - S| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Nous allons voir, dans ce qui suit, que des grandeurs telles que : la longueur d'un arc de courbe, l'aire d'une surface, un volume, peuvent se mettre sous la forme $\Sigma f(x)\,\Delta x$ ou sous des formes analogues. D'où l'intérêt fondamental du calcul des intégrales définies.

Longueur d'un arc de courbe.

● *Présentation du problème.* L'arc de courbe $\widehat{AB}$ peut être divisé par les points $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$; la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ est définie comme la limite de la somme des segments AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... A_nB lorsque $n \to \infty$ et que la longueur de chaque segment tend séparément vers zéro. Comme cette limite est aussi la longueur d'une certaine portion de droite, l'opération qui consiste à rechercher la longueur d'un arc de courbe s'appelle aussi *rectification de la courbe* (étymologiquement : remplacement de la courbe par une droite).

Rectification d'une courbe.
L'arc $\widehat{AB}$ a pour longueur la limite de la somme des segments tels que AA_1, A_1A_2, ..., lorsque ces segments deviennent infiniment petits et que leur nombre tend vers l'infini.



● *Courbe dans un repère euclidien (axes rectangulaires).*

— Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe, a et b les abscisses des points A et B, s la longueur de l'arc $\widehat{AB}$; on peut exprimer x et y en fonction d'un paramètre t, $x(t)$ et $y(t)$; on a, alors, $s(t)$ = abscisse curviligne du point $M(x, y)$. On démontre que :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \qquad (2)$$

et que

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y_x'^2}\,dx. \qquad (3)$$

— *Exemple.* Longueur de l'arc de cercle $\widehat{AB}$, sachant que le cercle a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. L'équation du cercle est $x^2 + y^2 = R^2$, d'où, en différenciant, $2x + 2yy' = 0$, d'où $y' = -\frac{x}{y}$. On a donc, avec $y^2 = R^2 - x^2$:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\,dx = \int_a^b \left[\frac{R^2}{R^2 - x^2}\right]^{1/2} dx \qquad (4)$$

$$= \pm R \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = I_a^b.$$

Or, d'après la formule (14) page 156 :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{R} + C\,; \qquad (5)$$

donc

$$I_a^b = \pm R\left(\arcsin\frac{b}{R} - \arcsin\frac{a}{R}\right). \qquad (6)$$

Si l'on prend $a = R$ et $b = 0$ (arc $\widehat{AB} = \frac{\pi}{2}$, en se limitant aux déterminations principales), on trouve :

$$\arcsin\frac{b}{R} = 0, \quad \arcsin\frac{a}{R} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_a^b = \pm\frac{\pi R}{2}. \qquad (7)$$

● *Coordonnées polaires* (voir figure à la page ci-contre).

— On démontre que, dans un système (ρ, θ) :

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho_\theta'^2}\,d\theta$$

ou

$$s = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{\rho^2\,\theta_\rho'^2 + 1}\,d\rho. \qquad (8)$$

— *Exemple* : longueur de la cardioïde $\rho = a(1 + \cos\theta)$. On a $\frac{d\rho}{d\theta} = -a\sin\theta$; donc, si x varie entre 0 et π, le point P décrivant la moitié de la courbe,

$$s = \int_0^\pi \sqrt{a^2(1 + \cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\,d\theta \qquad (9)$$

$$= a\int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos\theta}\,d\theta = 2a\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4a.$$

La longueur de la cardioïde est $2s = 8a$.

● *Remarque* : La rectification de l'ellipse conduit à calculer des intégrales de la forme :

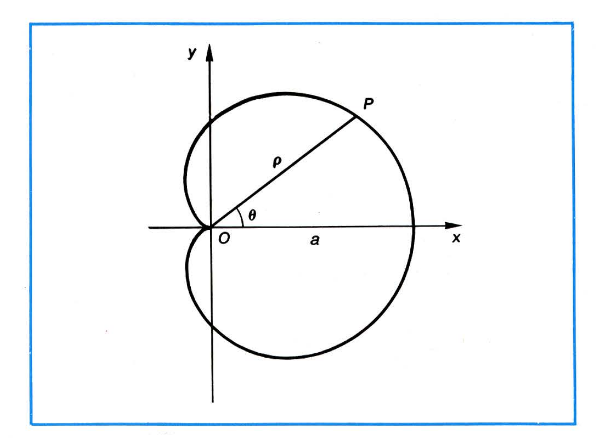
$$I = \int f[x, P(x)]\,dx, \qquad (10)$$

$P(x)$ étant un polynôme de degré n supérieur à 2. Une intégrale telle que (10) est appelée *intégrale elliptique* pour $n = 3$ ou 4, et *intégrale hyperelliptique* pour $n > 4$. Ces intégrales ont été calculées — avec peine ! — par Le Gendre. Par exemple soit une ellipse d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi\,; \\ y = b\sin\varphi. \end{cases} \qquad (11)$$

(voir p. 151). La longueur s d'un arc AB (A : $\varphi = 0$; B : $\varphi = \Phi$) est donnée par l'intégrale elliptique :

$$s = \int_0^\Phi \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\,d\varphi, \qquad (12)$$



En coordonnées polaires, l'équation de la cardioïde exprime la relation entre la distance $OP = \rho$ d'un point de la courbe à l'origine et l'angle θ que fait le rayon vecteur OP avec l'axe Ox. On montre que cette relation est : $\rho = a(1 + \cos\theta)$.

qui peut aussi s'écrire en posant $e = c/a$ (*excentricité* de l'ellipse) :

$$s = b\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = bE(e, \varphi)\,, \qquad (13)$$

$E(e, \varphi)$ est une fonction appelée *intégrale de* Le Gendre.

● *Notation.* Soit M un point quelconque de l'arc $\widehat{AB}$ à rectifier ; désignons par $\boldsymbol{V}(M)$ une fonction vectorielle caractérisant le point M :

$$\boldsymbol{V}(M) = \boldsymbol{OM} \qquad (14)$$

et par $d\boldsymbol{M}$ une variation infinitésimale de $\boldsymbol{V}(M)$. La longueur de l'arc $\widehat{AB}$ est l'*intégrale curviligne* :

$$s = \int_{\widehat{AB}} \boldsymbol{V}(M)\, d\boldsymbol{M}\,. \qquad (15)$$

Pour une courbe fermée (C), s désigne la longueur l du contour fermé :

$$l = \int_{(C)} \boldsymbol{V}(M)\, d\boldsymbol{M}\,. \qquad (16)$$

● *Aire limitée par un contour fermé.* Soit un contour (C) d'équation $y = f(x)$. L'aire A de la surface plane limitée par ce contour a pour valeur :

$$A = \int_{(C)} f(x)\, dx\,, \qquad (17)$$

qu'on appelle *intégrale curviligne le long de la courbe* (C). Si la courbe est donnée en coordonnées polaires par :

$$x = \rho\cos\theta \quad \text{et} \quad y = \rho\sin\theta\,, \qquad (18)$$

on démontre que :

$$A = \frac{1}{2}\int_{(C)} \rho^2 d\theta\,. \qquad (19)$$

Par exemple l'ellipse d'équation (voir p. 151) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \qquad (20)$$

a pour aire $A = \pi ab$. En effet, en se limitant au quadrant AOB (abscisse de $A = a$; abscisse de $B = 0$; voir figure p. 151) d'aire égale au quart de l'aire A de l'ellipse, on a :

$$\frac{A}{4} = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\,. \qquad (21)$$

Intégrales doubles, intégrales triples.

● *Intégrale double.* Considérons, dans le plan xOy, un domaine fermé (D) limité par un contour (C) ; à chaque point de (D), de coordonnées x et y, associons un point de cote $z = f(x, y)$. L'équation $z = f(x, y)$ est représentée par une surface (S) dont tous les points se projettent orthogonalement sur (D). Un cylindre droit de base (D) est tel que ses génératrices coupent la surface (S) sur son contour ; nous allons nous proposer de déterminer le volume du solide limité par (D), (S) et la surface cylindrique.

1 - Divisons (D) en un grand nombre de petits rectangles déterminés par des parallèles à Ox et Oy, distantes entre elles de Δy et Δx. Chaque rectangle a une surface $\omega = \Delta x\, \Delta y$.

2 - Sur chaque surface ω, construisons un prisme de hauteur mM ; on a. $\overline{mM} = z = f(x, y)$.

Le volume d'un tel prisme est $f(x, y) \times \omega$.

3 - A chaque point M_i est donc associé un prisme de volume $f(x_i, y_i)\, \omega_i$; le volume total cherché est la somme $\Sigma\, f(x_i, y_i)\, \omega_i$.

Il est préférable de faire apparaître les *deux variables* de ce volume, qui sont Δx et Δy ; on écrit alors, conventionnellement :

$$V = \Sigma\Sigma\, f(x, y)\, \Delta y\, \Delta x\,, \qquad (22)$$

les deux « Σ » indiquant qu'il y a deux variables dans la quantité à sommer.

Si l'on fait tendre Δx et Δy vers zéro, et si V tend vers une limite, cette limite s'écrit :

$$V = \iint_{(D)} f(x, y)\, dy\, dx\,. \qquad (23)$$

Plus rigoureusement : étant donné une fonction $f(x, y)$ définie sur un domaine fermé plan (D) limité par un contour simple (C), on dit que f est intégrable sur (D) si, (D) étant divisé en n domaines de surfaces ω_i, la somme $\Sigma\, f(x_i, y_i)\, \omega_i$ a une limite, les points (x_i, y_i) appartenant à chaque domaine ω_i, lorsque chaque domaine tend vers zéro, et cela quel que soit le partage de (D) et quels que soient les points (x_i, y_i). La limite de la somme $\Sigma\, f(x_i, y_i)\, \omega_i$ s'écrit :

$$I = \iint_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy\,. \qquad (24)$$

● *Intégrales triples.* Elles se traitent sur le même principe que les intégrales doubles. On les rencontre dans les calculs de centres de gravité, de densité d'un corps en un point, de volumes, de moments d'inertie, etc.

En raison du caractère « technique » de ces questions, nous avons groupé les principaux résultats dans à la p. 157.

Équations différentielles.

Définition et exemples.

● *Définitions.*

On appelle *équation différentielle* une équation dont l'inconnue est une fonction y et dans laquelle figurent des dérivées y', y'', ... et/ou des différentielles dy, d^2y, ... de cette fonction. La fonction y cherchée peut être soit une fonction numérique $y = f(x)$, soit une fonction vectorielle à n dimensions (2 ou 3 dimensions dans les cas usuels). Toute fonction y vérifiant une équation différentielle donnée est une *solution particulière* de l'équation. L'ensemble de toutes les solutions particulières est la *solution générale* de l'équation proposée. On appelle *ordre* d'une équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée qui figure dans l'équation : si cette dérivée est y', il s'agit d'une *équation différentielle du premier ordre*, si c'est y'', il s'agit d'une *équation différentielle du second ordre* ; etc.

Enfin, une équation différentielle peut être *linéaire* (si tous ses termes sont du premier degré), du second degré, du troisième degré, etc. (si elle contient au moins un terme du second degré, du troisième degré, etc.).

● *Exemples.*

— L'équation :

$$y' = 0 \qquad (1)$$

est une équation différentielle linéaire du premier ordre. Le calcul des dérivées (voir p. 114) nous a enseigné que toute fonction continue $y = C^{te}$ avait une dérivée nulle $y' = 0$. Donc $y = 3$, $y = 4$, $y = -1$, etc. sont des solutions particulières de (1) ; la solution générale est $y = C^{te}$.

— L'équation :

$$y' = y \qquad (2)$$

est une équation différentielle linéaire du premier ordre. Nous avons vu, p. 114, que la fonction $y = e^x$ admettait pour dérivée $y' = e^x$, c'est-à-dire vérifiait l'équation $y' = y$. Donc $y = e^x$ est une solution particulière de (2).

— L'équation :

$$\frac{y'}{y} = m \qquad (3)$$

exprime que la dérivée logarithmique y'/y de la fonction y est constante ; on peut donc écrire, C désignant une constante

$$\ln y = mx + C \qquad (4)$$

(en dérivant les deux membres, on retrouve l'équation $y'/y = m$). L'équation (4) définit la fonction y, solution de (3).

— On montre en *Physique* que la force $\boldsymbol{F}$ constante appliquée à une particule matérielle de masse m lui communique une accélération γ, constante en grandeur, direction et sens. Appelons $x(t)$ l'espace parcouru par la particule pendant le temps t, le principe fondamental de la dynamique :

$$\text{Force} = \text{masse} \times \text{accélération} \qquad (5)$$

s'écrit :

$$F = mx''(t)\,; \qquad (6)$$

l'équation (6) est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre (il y a une dérivée seconde) ; la résoudre consiste à trouver l'équation $x(t)$ du mouvement de la particule.

● *Remarque* : La solution générale d'une équation différentielle fait apparaître des constantes arbitraires. Quand on se pose un problème déterminé (par exemple en mécanique), les données du problème imposent des conditions aux constantes, qui peuvent alors être calculées. Par exemple l'équation (6) peut être conditionnée par :

1 - au temps $t = 0$, le mobile est à l'origine du repère, c'est-à-dire qu'on doit avoir $x(0) = 0$;

2 - au temps $t = 0$, la particule est immobile, c'est-à-dire que sa vitesse initiale $v_0 = x'(0) = 0$.

Avec ces deux conditions, l'équation (6) admet pour solution la fonction :

$$x(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2\,. \qquad (7)$$

Si l'on avait posé comme conditions : $x(0) = x_0 \neq 0$ et $v(0) = v_0$, la solution de (6) s'écrirait :

$$x(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + x_0\,. \qquad (8)$$

Lorsqu'on pose de telles conditions, appelées *conditions initiales*, et si la variable de la fonction $y = f(x)$ cherchée appartient à un *espace métrique normé* (*espace de Banach,* voir pp. 106 et 107), il est possible de démontrer que l'équation différentielle proposée a une *solution unique.* Cette démonstration se fait par référence à un théorème dit *théorème du point fixe* de Picard et Banach, que nous n'énoncerons pas ici.

Résolution des équations différentielles.

La théorie des équations différentielles est une partie difficile de l'analyse, qui fait appel à de nombreux développements techniques et aussi à des considérations générales abstraites qui dépassent le niveau de cet ouvrage. L'étude des propriétés des solutions d'une équation différentielle au voisinage d'une valeur x_0 de la variable ou dans de grands domaines fait intervenir d'importants théorèmes, respectivement dits *locaux* et *non locaux* que nous ne pouvons expliquer ici. Le lecteur trouvera, pp. 157-158, l'exposé des méthodes classiques d'intégration des équations différentielles du premier ordre (équations homogènes, équations linéaires) et du second ordre.

Géométrie différentielle.

Généralités.

Pages 150-152, nous avons étudié les propriétés générales des courbes et des surfaces, et en particulier leur *courbure*, en utilisant la dérivée y' de la fonction y qui les représente. Cette application du calcul différentiel à la géométrie constitue la *géométrie infinitésimale*.

Un problème particulièrement intéressant est l'étude des propriétés d'une surface courbe au voisinage d'un de ses points ou d'un de ses éléments caractéristiques. Les méthodes de la géométrie infinitésimale traditionnelle sont insuffisantes pour traiter ce genre de questions, et les mathématiciens ont dû créer une nouvelle théorie appelée *géométrie différentielle.* C'est une branche hautement spécialisée des mathématiques, que nous ne pouvons pas décrire ici, mais à propos de laquelle nous indiquerons quelques idées générales.

1 - La géométrie différentielle peut être *métrique* ou *projective.* Sous sa forme métrique, elle est liée à la mesure des distances et des angles et, d'une manière générale, aux propriétés laissées invariantes par un *déplacement*. Les propriétés invariantes pour la transformation projective générale sont étudiées par la *géométrie différentielle projective.*

2 - Un point M, appartenant à une courbe C, plane ou gauche, est défini, dans l'espace $\mathbb{R}^3$ ordinaire, par ses trois coordonnées (x, y, z). L'équation d'une courbe C est alors de la forme, t étant un paramètre :

$$x = f(t)\,; \quad y = g(t)\,; \quad z = h(t)\,, \qquad (1)$$



Louis de Lagrange (1736-1813), mathématicien français qui fut, avec Euler, le plus grand mathématicien du XVIIIe siècle. On lui doit d'avoir créé le calcul des variations (1762), la mécanique analytique (1788) et la théorie des fonctions analytiques (1797-1799). (Gravure de Rados, d'après Bosio.)

et la longueur ds d'un arc de courbe au voisinage du point $M(x, y, z)$ est donnée par :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 . \qquad (2)$$

3 - Étant donné deux points M_1 et M_2 de la courbe C, voisins du point M, on appelle *plan osculateur de C en M* la position limite vers laquelle tend le plan $MM_1 M_2$ lorsque M_1 tend vers M_2. Le cercle $MM_1 M_2$ devient alors le *cercle osculateur* ou *cercle de courbure* en M.

4 - Une surface S peut être définie à l'aide de deux paramètres t et u par les équations :

$$x = f(t, u) ; \quad y = g(t, u) ; \quad z = h(t, u) . \qquad (3)$$

Une courbe C sur la surface S est définie par une équation de la forme $v(u)$. En calculant dx, dy et dz dans (3) et en portant leur valeur dans (2), on obtient :

$$ds^2 = E\,dt^2 + 2\,F\,dt\,du + G\,du^2 , \qquad (4)$$

E, F, G étant des coefficients. Le second membre de (4) est appelé la *première forme quadratique de la surface S*. On appelle *deuxième forme quadratique* l'expression

$$D\,dt^2 + 2\,D'\,dt\,du + D''\,du^2 , \qquad (5)$$

dans laquelle D, D' et D'' sont des coefficients. Si l'on impose que, en chaque point $M \in C$, le plan osculateur de C coïncide avec le plan tangent à la surface S, l'expression (5) est nulle et l'équation :

$$D\,dt^2 + 2\,D'\,dt\,du + D''\,du^2 = 0 \qquad (6)$$

définit une courbe appelée *courbe asymptotique*.

Des relations entre les six coefficients E, F, G, D, D', D'' on peut tirer diverses conclusions quant à la *forme* de la surface considérée.

5 - Une section d'une surface par un plan contenant la normale à la surface au point M est une *section normale* ; la courbure de la section obtenue est la *courbure normale*. Les tangentes aux sections sont appelées *directions principales* ; les courbes de la surface S tangentes en chaque point aux directions principales sont appelées *lignes de courbure* de la surface.

6 - En chaque point M d'une surface S, il existe une courbe dont le plan osculateur contient la normale en M à la surface. Une telle courbe est appelée une *géodésique* : la plus courte distance entre deux points A et B d'une surface S est la géodésique passant par A et B (sur une sphère, les géodésiques sont toutes des grands cercles de la sphère).

A la notion de géodésique sont liés des *invariants géodésiques* (courbure géodésique, torsion géodésique).

7 - Les notions précédentes — qui peuvent être représentées par des constructions dans l'espace à trois dimensions — peuvent être généralisées dans l'espace $\mathbb{R}^n$. Appelons *point* un vecteur à n composantes $(x_1, x_2, ..., x_n)$; une *courbe* dans $\mathbb{R}^n$ est alors définie par n équations paramétriques :

$$x_1 = f_1(t) ; \quad x_2 = f_2(t) ; ... ; \quad x_n = f_n(t) ; \qquad (7)$$

et une *surface* dans $\mathbb{R}^n$ par n équations biparamétriques :

$$x_1 = f_1(t, u) ; \quad x_2 = f_2(t, u) ; ...; \quad x_n = f_n(t, u) ; \qquad (8)$$

la *distance* ds sur une surface S est définie par :

$$ds^2 = E\,dt^2 + 2\,F\,dt\,du + G\,du^2 , \quad EG - F^2 > 0 . \qquad (9)$$

Dans ce cas, la définition des longueurs et des angles, des géodésiques, des courbures, etc., fait intervenir les coefficients E, F, G. On ne peut plus faire de « dessins » pour représenter figurativement ces « points » et ces « surfaces », qui sont des êtres mathématiques abstraits, abordables uniquement par le calcul. La géométrie correspondante est alors appelée *géométrie riemanienne*.

Remarques historiques.

C'est Bernoulli qui inventa, en 1697 (dans une lettre à Leibniz), la notion de *géodésique*, plus court chemin d'un point à un autre sur une surface donnée (si la surface est plane, la géodésique est la droite de la géométrie classique qui passe par ces deux points ; sinon, c'est une courbe dont il faut déterminer l'équation). Les équations des géodésiques ont été établies, pour toutes sortes de surfaces, par Euler et Lagrange entre 1770 et 1780, et c'est à Monge qu'on doit le concept de ligne de courbure et de courbe asymptotique (voir ci-dessus même page, équation n° 4). Les problèmes de courbure ont été approfondis par des disciples de Monge : Charles Dupin (*Développements de géométrie*, 1813 ; *Applications de géométrie et de mécanique*, 1822) et Meusnier.

La théorie moderne des surfaces, qui est le point de départ de la géométrie différentielle, a été inaugurée par Gauss, qui définit les deux formes quadratiques fondamentales (voir même page, équation n° 4) et la notion de courbure totale et qui établit les équations fondamentales de la théorie des surfaces (vers 1840). Ces questions ont été approfondies par divers disciples de Monge, dont Barré de Saint-Venant (1846) et O. Bonnet (1867 : unicité de la surface définie par des formes quadratiques fondamentales données).

La géométrie différentielle moderne remonte aux travaux de Riemann (1854, publiés en 1868, après sa mort) sur les hypothèses qui sont à la base de la géométrie. Ses idées ont imposé aux mathématiciens de mettre au point la théorie des *formes différentielles quadratiques* (Beltrami, Christoffel, Lipschitz) ; on parvient ainsi aux travaux d'Enneper, de Schwarz, de Bonnet, de Darboux, de Bianchi, de Poincaré (*Sur les courbes définies par une équation différentielle*, 1881-1886) et de Sophus Lie (1888-1896).

La théorie de la géométrie projective différentielle a été surtout développée au XXe siècle, avec les travaux de Wilczyński (1908), Fubini, Terracini, Bompiani, B. Segre, Godeaux, Villa, Vranceanu, Levi-Civita, etc. La *géométrie différentielle globale* (C. Ehresmann, S. Chern. A. Lichnerowicz) se rattache à la topologie.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE ET THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES.

Fonctions de variable complexe.

Coup d'œil historique.

Lorsqu'on commença à s'intéresser à la notion de fonction, c'est-à-dire à la fin du XVIIe siècle et au début du XVIIIe, les mathématiciens eurent la « curiosité » d'examiner ce qui se passait lorsque la variable réelle x était remplacée par une variable imaginaire z (on ne disait pas encore « complexe »). Ainsi, dès 1702, Leibniz et Jean Bernoulli n'hésitent pas à parler du logarithme d'un nombre imaginaire, c'est-à-dire de la fonction $\lg z$ pour z complexe. A vrai dire, en bons mathématiciens, ils se méfièrent d'abord de leur intuition et discutèrent longuement sur la validité de cette généralisation. Comment, par exemple, définir le logarithme de i^2, quelle que soit la base choisie ? En effet, $i^2 = -1$, et la fonction logarithme n'est définie que pour une variable positive : mais qu'est-ce qu'un nombre complexe « positif » ? La discussion dura cinquante ans : entre Leibniz et Bernoulli jusqu'en 1712, entre Bernoulli et Euler jusqu'en 1726, entre Euler et D'Alembert jusqu'en 1747. Vers 1750, Euler clarifia la question et montra que tout nombre, réel ou imaginaire, possédait une infinité de logarithmes, tous imaginaires sauf un (lorsque le nombre est positif).

L'existence de fonctions d'une variable complexe implique qu'on puisse les étudier, et, pour cela, qu'on puisse calculer leurs dérivées successives. On peut être tenté d'appliquer aux fonctions d'une variable complexe les lois démontrées pour les variables réelles. Nous avons vu que le critère de dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle était l'existence d'une limite finie pour le rapport $\Delta y/\Delta x$ de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable lorsque ce dernier tend vers zéro. Le problème se pose donc de rechercher la limite de $\Delta y/\Delta z$ quand $\Delta z \to 0$, pour z complexe. Or il se trouve que les fonctions d'une variable complexe qui ne sont pas dérivables sont bien plus communes que celles qui sont dérivables : il est donc capital de définir la dérivabilité de la fonction $f(z)$ pour une valeur z_0 de la variable complexe z : si la fonction admet une dérivée pour $z = z_0$ ou sur un intervalle $[a, b]$ de valeurs de z, elle est dite *régulière* ou encore *analytique*, terme introduit par Lagrange en 1797 (*Théorie des fonctions analytiques*).

Attardons-nous un instant sur la définition lagrangienne d'une fonction analytique : pour l'illustre mathématicien, une fonction est analytique si elle peut se représenter par la somme d'une *série de puissances*. Dès 1772, Lagrange avait compris l'importance de la *formule de Taylor* (1715, voir p. 115) : en appelant h un accroissement — qui peut devenir infiniment petit — de la variable x, on montre que :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \cdots , \qquad (1)$$

$(n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n)$. Peut-on représenter par un tel développement une fonction d'une variable complexe ? Lagrange était gêné pour résoudre ce genre de question, car, soucieux de rigueur, il ne voulait pas entendre parler de la *convergence* d'une série, la notion de limite n'étant pas, à son époque, convenablement définie. C'est Cauchy (à partir de 1814) qui rendit possible l'étude des fonctions d'une variable complexe en introduisant sa définition célèbre de la convergence et qui mit au point le *calcul des résidus*, à l'aide duquel il donne une méthode de détermination des intégrales de fonctions analytiques le long de contours fermés (voir la définition d'une intégrale curviligne p. 123). Enfin Cauchy introduit la

André Lichnerowicz, mathématicien français (né en 1915). Ses travaux les plus importants concernent la physique mathématique, la relativité, la théorie des champs, la géométrie différentielle.



notion de fonction *monogène* dans un domaine (voir ci-dessous) et montre la relation qui existe entre le fait, pour une fonction, d'être analytique (c'est-à-dire représentable par une série de puissances) et dérivable en un point.

Les idées de Cauchy ont été précisées et approfondies par A. Laurent (la « série de Laurent », 1831) et Victor Puiseux (1850). A partir de cette époque, indépendamment des théories de Cauchy, Riemann reprend la théorie des fonctions analytiques (1851), qui devient plus générale et plus rigoureuse avec les travaux de Weierstrass (vers 1872-1876), Méray, Casorati, Émile Picard (1879) et Poincaré.

Au XXe siècle, la théorie des variables complexes a pris un nouvel essor, avec les travaux d'Émile Borel, qui a montré que la classe des fonctions monogènes est plus étendue que celle des fonctions analytiques, de P. Montel, de Goursat, de Looman, de Men'šov, de H. Bohr, de Pompeiu (notion de *dérivée aréolaire*, 1912). Les fonctions *polygènes* ont été définies et étudiées par de nombreux mathématiciens, en particulier par ceux de l'École roumaine (vers 1930). De nouveaux problèmes ont été soulevés à propos des fonctions dites *entières*, des familles de fonctions, de la représentation des fonctions analytiques, des fonctions périodiques, multiformes et à plusieurs variables.

Définitions et exemples.

Considérons le corps $\mathbb{C}$ des complexes, dont l'image est un *plan*, comme on l'a expliqué p. 56 et soit $z \in \mathbb{C}$ une variable complexe, et $f(z) \in \mathbb{C}$ une fonction de z, c'est-à-dire une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Appelons E le domaine de définition de la fonction, c'est-à-dire la partie de l'ensemble $\mathbb{C}$ à laquelle doit appartenir z pour que la fonction $f(z)$ soit définie ($E \subset \mathbb{C}$). Nous aurons présent à l'esprit le mode de représentation des nombres complexes à l'aide du plan d'Argand-Cauchy, et nous parlerons indifféremment de la valeur z_0 de la variable z ou du point z_0 du plan complexe.

- *Dérivée en un point* $z_0 \in E$. Si, pour $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$, tel que la relation :

$$|z - z_0| < \delta, \quad z \neq z_0 \tag{2}$$

implique :

$$\left| L - \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \varepsilon$$

le nombre L est la limite du rapport $[f(z) - f(z_0)]/(z - z_0)$ quand $z - z_0$ tend vers 0, $z_0 \in E$; c'est la *dérivée* de la fonction $f(z)$ pour la valeur $z = z_0$ de la variable, et nous l'écrirons $f'(z_0)$. On peut préciser, si nécessaire, $f'_E(z_0)$ pour indiquer que $z_0 \in E$. Si F est une partie de E et z_0 un élément de F, alors l'existence d'une dérivée $f'_E(z)$ entraîne celle d'une dérivée $f'_F(z)$.

- *Dérivée dans un ensemble E*. Si une fonction $f(z)$ est dérivable en tout point de l'ensemble E, elle est dite *dérivable dans E*.

- *Fonction analytique* (= *régulière*). Soit G un ensemble ouvert dans $\mathbb{C}$, contenant le point z_0 et les points du cercle $|z - z_0| < r$ (c'est aussi ce qu'on nomme un *domaine*) : une fonction $f(z)$ dérivable en tout point d'un domaine G est dite *analytique dans G* et sa dérivée peut être désignée par $f'(Z)$, sans indiquer l'ensemble G.

Une fonction est dite analytique (= régulière) en un point z_0 s'il existe un domaine G contenant z_0 dans lequel elle est définie et analytique.

- *Fonction monogène dans un domaine G*. La définition de la dérivée en un point z_0 de la fonction $f(z)$ suppose que la distance $z - z_0$ entre deux points voisins diminue indéfiniment, c'est-à-dire que $z \to z_0$; elle ne tient pas compte du chemin suivi par z à l'intérieur de G pour se rapprocher de z_0. S'il existe, en chaque point de G, une dérivée pour $f(z)$, quel que soit le chemin suivi par z pour se confondre avec z_0, la fonction est dite *monogène dans G*. Si, *en outre*, la fonction $f(z)$ est représentable par une série entière de la variable autour de chaque point $z_0 \in G$, elle est *analytique* : Émile Borel a montré que *monogénéité* et *régularité* (= analyticité) n'étaient pas des propriétés équivalentes. La classe des fonctions monogènes est plus étendue que celle des fonctions analytiques.

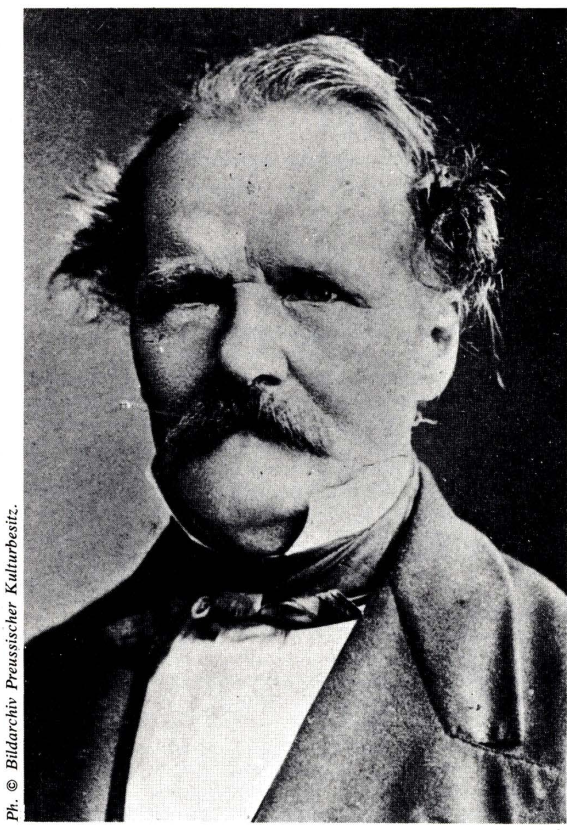
- *Exemples*.

— La fonction $f(z) = z$, avec $z \in \mathbb{C}$ est analytique partout dans $\mathbb{C}$; on a en effet, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1\,. \tag{3}$$

Donc $f'(z) = 1$ pour toutes les valeurs de $z \in \mathbb{C}$.

— Soit $z = x + y\mathrm{i}$, et appelons $\bar{z} = x - y\mathrm{i}$ le



Ph. © Bildarchiv Preussischer Kulturbesitz.

Ernst Eduard Kummer (1810-1893), mathématicien allemand dont le nom est resté attaché à la théorie des corps et à la théorie des nombres. On lui doit la création des idéaux de Kummer qui jouent par rapport aux nombres dits algébriques le rôle de PGCD en arithmétique élémentaire.

conjugué de z. La fonction $f(z) = \bar{z}$ s'écrit donc :

$$f(z) = x - y\mathrm{i}\,. \tag{4}$$

Considérons un point z_0 dans le plan complexe et soit G une partie de $\mathbb{C}$ contenant z_0 et représenté par une demi-droite quelconque d'origine z_0. Pour tout $z \in G$ on peut montrer que :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = -2\arg(z - z_0) \tag{5}$$

($\overline{z - z_0}$ est le conjugué de $z - z_0$; arg est l'abréviation d'*argument*, nom de l'angle φ dans la représentation trigonométrique des nombres complexes expliquée p. 56.

Donc, en vertu de (5), pour tout $z_0 \in G$ on a :

$$f'(z_0) = -2\arg(z - z_0) \tag{6}$$

et $f(z)$ est analytique dans G.

Mais si G est un ensemble contenant deux demi-droites différentes issues de z_0, la même relation (5) montre que $f(z)$ n'est pas dérivable dans G : ce n'est donc pas une fonction analytique dans G (ni, *a fortiori*, dans $\mathbb{C}$).

- *Remarques* :

1 - Si deux fonctions $f(z)$ et $g(z)$ sont dérivables dans un domaine E, on peut leur appliquer les règles de dérivation des fonctions d'une variable réelle.

2 - En particulier, le polynôme complexe :

$$P(x) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \tag{7}$$

a pour dérivée :

$$P'(x) = na_0 z^{n-1} + (n-1)\,a_1 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\,. \tag{8}$$

3 - Comme dans le cas d'une variable réelle, on peut définir la différentielle $\mathrm{d}y$ d'une fonction $y = f(z)$ pour z complexe :

$$\mathrm{d}y = f'(z)\,\mathrm{d}z\,. \tag{9}$$

4 - Soit $y = f(z) = u + \mathrm{i}v$ une fonction dérivable pour $z = z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$, $(x_0, y_0 \in \mathbb{R})$, u et v étant des complexes de la forme $x + \mathrm{i}y$ et que nous écrirons $u(x, y)$ et $v(x, y)$. On démontre que, en tout point z_0 où la dérivée $y' = f'(z_0)$ existe on a la relation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}\,, \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \tag{10}$$

(il s'agit de dérivées partielles). Les relations (10) sont appelées *conditions de Cauchy-Riemann* : elles garantissent la dérivabilité d'une fonction $f(z)$ en un point z_0.

Concepts fondamentaux.

Il ne peut être question d'étudier ici, même succinctement, la théorie des fonctions analytiques et non analytiques d'une variable complexe. Nous nous limiterons à signaler quelques concepts importants liés à cette théorie.

Caractères des fonctions de variables complexes.

Nous avons déjà défini les fonctions monogènes et les fonctions analytiques (ou régulières). A partir de ces concepts, de nouvelles définitions peuvent être données, qui décrivent les propriétés des fonctions d'une variable complexe.

— Une fonction est dite *holomorphe* dans un domaine E si son intégrale curviligne prise le long d'un contour fermé C, soit $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$, est nulle. Si elle prend une fois au plus chacune de ses valeurs, elle est dite *univalente* ; si elle prend p fois au plus chaque valeur, elle est dite *multivalente d'ordre p*. On montre que le domaine d'une fonction analytique multivalente peut être découpé en sous-domaines où elle est univalente (F. Marty).

On montre (Goursat) qu'une fonction monogène en chaque point d'un domaine est holomorphe dans ce domaine.

— Les conditions de monogénéité d'une fonction ont été étudiées par Men'šov, Rademacher, Fedorov. En particulier, si une fonction est monogène, elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann (voir équation (10)) ; mais la réciproque n'est pas vraie : une fonction analytique n'est pas nécessairement monogène.

— Pompeiu a introduit la notion de *dérivée aréolaire* d'une fonction $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, avec $z = x + \mathrm{i}y$. Par définition, la dérivée aréolaire de $f(z)$, notée $\dfrac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}w}$ a pour valeur :

$$\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}w} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \mathrm{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] \tag{1}$$

(on remarque que la quantité entre crochets contient les dérivées partielles des conditions de Cauchy-Riemann). La dérivée aréolaire d'une fonction monogène est nulle (comparer à : « la dérivée d'une fonction constante est nulle ») ; si $\mathrm{D}f/\mathrm{D}w \neq 0$, la fonction $f(z)$ est dite *polygène*.

— Une fonction de variable complexe $f(z)$ est une application de $\mathbb{C}$ dans lui-même, ou, plus exactement, une application d'un domaine $E \subset \mathbb{C}$ dans un domaine $F \subset \mathbb{C}$: la variable z est représentée géométriquement par les points de la portion E du plan complexe, et la fonction $f(z)$ par les points de la portion F du même plan (voir p. 56 la représentation géométrique des nombres complexes). Si, pour une valeur $z = a$ de la variable, la fonction $f(z)$ devient infinie, le point représentatif de a est appelé *pôle* de la fonction $f(z)$. Une fonction qui admet un ou plusieurs pôles dans un domaine E est dite *méromorphe* dans ce domaine : sinon elle est holomorphe (une fonction holomorphe ne prend donc que des valeurs finies).

Points singuliers.

- *Point singulier essentiel*. Un point ou une fonction $f(z)$ n'est pas monogène (c'est-à-dire une valeur z_0 de la variable pour laquelle la fonction n'est pas monogène) est appelé *point singulier essentiel*. Deux cas sont alors possibles.

1 - Dans un cercle de centre z_0 et de rayon ε tel que $|z - z_0| < \varepsilon$, il n'existe aucun autre point singulier : le point singulier essentiel est dit *isolé*.

2 - Dans ce cercle de centre z_0, il existe d'autres points singuliers essentiels : on est en présence d'un *ensemble fermé* de points singuliers.

Précisons cette notion dans le cas où il s'agit d'une fonction analytique. Une telle fonction est monogène pour $z = z_0$ si on peut la développer en série de Taylor au voisinage de z_0. On pourra donc écrire, dans ce cas, d'après l'équation (1) page 124 :

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + hf'(z_0) + \frac{h^2}{2!}f''(z_0) + \cdots \tag{2}$$

Le point z_0 est alors un *point régulier*. Si la décomposition (2) n'est pas possible, le point z_0 est un *point singulier*.

- *Théorème de Picard* (1879). Dans le voisinage d'un point essentiel isolé, une fonction prend une infinité de fois toute valeur, à l'exception de deux au plus. Autrement dit il existe une ou deux valeurs f_1 et f_2 que la fonction $f(z)$ ne prend pas dans le voisinage de

z_0 si celui-ci n'est pas un point essentiel : on les nomme *valeurs exceptionnelles*.

Interprétation géométrique.

Tout ce qui précède est abstrait. Nous allons expliquer, sur quelques exemples classiques, comment étudier une fonction $w = f(z)$ d'une variable complexe. Pour cela, nous ferons appel à la représentation géométrique des nombres complexes (voir p. 56) et à leur expression trigonométrique à l'aide du *module* r et de l'*argument* φ. Rappelons les formules principales, a et b étant des nombres réels :

$$z = a + b\,\mathrm{i} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\,, \qquad (3)$$

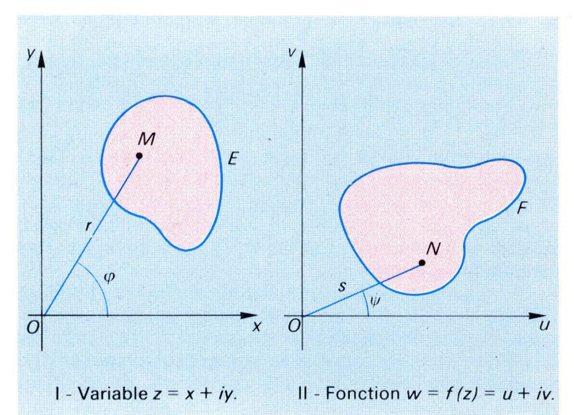
avec :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,; \quad \cos\varphi = \frac{a}{r}\,; \quad \sin\varphi = \frac{b}{r}. \qquad (4)$$

Dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires Ox et Oy, un nombre complexe z est représenté par un point M de coordonnées $x = a$, $y = b$; le module r est la longueur du vecteur $\boldsymbol{OM}$; l'argument φ est l'angle du vecteur $\boldsymbol{OM}$ avec l'axe des x.

● *L'application* $E \xrightarrow{f} F$. Pour étudier géométriquement une fonction analytique $w = f(z)$, nous tracerons côte à côte deux repères xOy et uOv. Les valeurs de la variable z pour laquelle la fonction est définie constituent un domaine E du plan xOy (ce sont tous les points d'une surface E de ce plan) ; les valeurs correspondantes de la fonction $w = f(z)$ ont pour image les points d'un ensemble F du plan uOv. La variable z et la fonction $f(z)$ s'écriront :

$$\begin{cases} z = x + \mathrm{i}y\,; \\ w = f(z) = u + \mathrm{i}v\,. \end{cases} \qquad (5)$$



I - Domaine de définition de la fonction $w = f(z)$***. Chaque point*** $M \in E$ ***est l'image d'une valeur particulière de la variable*** z***, de module*** r ***et d'argument*** φ***.***
II - Domaine des valeurs de la fonction $w = f(z)$***. Chaque point*** $N \in F$ ***est l'image d'une valeur*** w ***de la fonction*** $E \xrightarrow{f} F$***, de module*** s ***et d'argument*** ψ***. L'application qui définit la fonction*** $w = f(z)$ ***transforme le domaine*** E ***du plan complexe dans le domaine*** F ***du même plan.***

● *Signification géométrique de la dérivée* $w' = f'(z)$. Considérons deux points voisins dans E, M_0 et M'_0, et les points correspondants N_0 et N'_0 dans F. Ces points correspondent aux valeurs suivantes de la variable et de la fonction :

$$\begin{cases} M_0 \text{ correspond à } z = z_0\,; \\ M'_0 \text{ correspond à } z = z_0 + \Delta z\,; \\ N_0 \text{ correspond à } w = w_0 = f(z_0)\,; \\ N'_0 \text{ correspond à } w_0 + \Delta w = f(z_0 + \Delta z)\,. \end{cases} \qquad (6)$$

Les accroissements Δz et Δw de la variable et de la fonction sont, en valeur absolue, les mesures des segments $M_0M'_0$ et $N_0N'_0$. Plus précisément : Δz et Δw sont des nombres complexes de modules $|M_0M'_0|$ et $|N_0N'_0|$. Dès lors, puisque par définition, la dérivée $f'(z_0)$ de la fonction w au point $z = z_0$ est :

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}\,, \qquad (7)$$

le module $|f'(z_0)|$ de la dérivée au point $z = z_0$ est la limite :

$$|f'(z_0)| = \lim_{M'_0 \to M_0} \frac{|N_0N'_0|}{|M_0M'_0|} = \lim_{\Delta z \to 0} \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|. \qquad (8)$$

En d'autres termes, la dérivée $f'(z_0)$ caractérise, par son module $|f'(z_0)|$, la variation des dimensions linéiques au point $z = z_0$ dans la transformation de E en F par la fonction $f(z)$. Si, par exemple :

$$f(z) = z^3 + z^2 + 1\,, \qquad (9)$$

la dérivée est :

$$f'(z) = 3\,z^2 + 2\,z = z(3\,z + 2)\,. \qquad (10)$$

Au point $z = 1 + \mathrm{i}$, cette dérivée vaut :

$$f'(1 + \mathrm{i}) = (1 + \mathrm{i})\,(5 + 3\,\mathrm{i}) = 2 + 8\,\mathrm{i}\,. \qquad (11)$$

Son module est :

$$|f'(1 + \mathrm{i})| = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}\,. \qquad (12)$$

Donc au point M_0 image de $z = 1 + \mathrm{i}$, les dimensions linéiques sont multipliées par $2\sqrt{17}$ dans l'application qui transforme E en F selon (9).

— Examinons maintenant la signification géométrique de l'argument de la dérivée au point $z = z_0$, soit $\arg f'(z_0)$. Supposons que le point M'_0 tend vers M_0 selon une courbe C_E (arbitrairement tracée sur la figure ci-après). L'application $E \xrightarrow{f} F$, c'est-à-dire la fonction $w = f(z)$, transforme la courbe C_E du domaine E en une courbe C_F du domaine F. On a :

$$\begin{cases} \text{argument de } \Delta z = \text{angle du vecteur } \boldsymbol{M_0M'_0} \text{ avec l'axe } Ox = \varphi\,; \\ \text{argument de } \Delta w = \text{angle du vecteur } \boldsymbol{N_0N'_0} \text{ avec l'axe } Ou = \psi. \end{cases} \qquad (13)$$

L'angle des vecteurs $\boldsymbol{M_0M'_0}$ et $\boldsymbol{N_0N'_0}$ est égal à :

$$(\boldsymbol{M_0M'_0}, \boldsymbol{N_0N'_0}) = \psi - \varphi = \arg\Delta w - \arg\Delta z\,. \qquad (14)$$

On montre, en étudiant les règles du calcul sur les nombres complexes, que l'argument d'un quotient z/z' est égal à la différence des arguments du numérateur et du dénominateur, soit $\arg z - \arg z'$. Donc, ici :

$$\arg\Delta w - \arg\Delta z = \arg\frac{\Delta w}{\Delta z}\,. \qquad (15)$$

Quand $\Delta z \to 0$, $M_0M'_0$ tend vers la tangente en M_0 à la courbe C_E et $N_0N'_0$ tend vers la tangente en N_0 à la courbe C_F, et

$$\arg\frac{\Delta w}{\Delta z} \to \arg f'(z)\,. \qquad (16)$$

En d'autres termes : l'argument de la dérivée $f'(z_0)$ est l'angle dont a tourné la tangente à la courbe C_E dans la transformation $E \xrightarrow{f} F$.

● *En résumé*, se donner une fonction $w = f(z)$ d'une variable complexe, c'est transformer le domaine E en un domaine F ; les caractéristiques de cette transformation sont les suivantes :

1 - un point M au voisinage du point M_0, image de la valeur z_0 de la variable, subit l'homothétie de centre M_0 et de rapport $|f'(z_0)|$ égal au module de la dérivée en $z = z_0$, c'est-à-dire que la distance M_0M devient, dans F, $M_0M \times |f'(z_0)|$;

2 - le même point M ainsi transformé subit ensuite une rotation autour de z_0 d'angle $\arg f'(z_0)$.

Étant donné deux courbes C_E et C'_E, qui se coupent en M_0, elles sont transformées en deux courbes C_F et C'_F, qui se coupent en $N_0 = f(M_0)$. Les tangentes en M_0 aux deux courbes tournent d'un angle égal à $\arg f'(z_0)$: donc leur angle est conservé dans la transformation. On dit d'une telle transformation qui conserve les angles qu'elle est *conforme*.

Exemples.

● *Fonction linéaire complexe*. Soit la fonction de la variable complexe z :

$$f(z) = w = a(z - z_0) + b\,, \qquad (17)$$

où $a \neq 0$, z_0 et b sont des nombres complexes. Au point $z = z_0$, on a :

$$\begin{cases} w(z_0) = w_0 = b\,; \\ f'(z_0) = a\,. \end{cases} \qquad (18)$$

D'où $\Delta w = w - w_0 = a(z - z_0) = a\,\Delta z$. On a donc, en notant les modules par deux barres verticales :

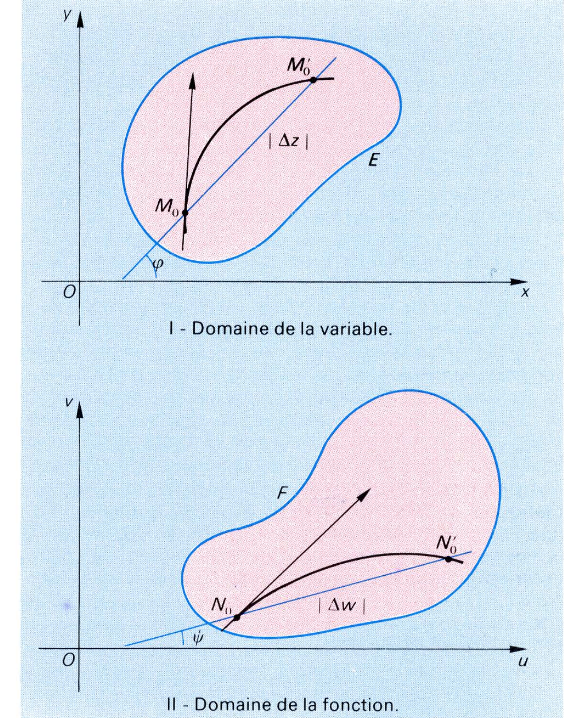
$$|\Delta w| = |a| \times |\Delta z| \qquad (19)$$

et

$$\arg\Delta w = \arg a + \arg\Delta z\,, \qquad (20)$$

à $2\,k\pi$ près.

Conclusion : la fonction $w = f(z)$ transforme tout cercle de centre z_0 et de rayon $|\Delta z| \leqslant \rho$ par une homothétie de centre z_0 et de rapport $|a|$ (module de la dérivée), suivie d'une rotation autour de z_0 d'angle $\arg a$ (argument de la dérivée d'après (20)) ; le centre z_0 est changé en w_0 par une translation.



Signification géométrique du module et de l'argument de la dérivée $f'(z_0)$ ***d'une fonction*** $w = f(z)$ ***au point*** $z = z_0$***,*** z ***étant une variable complexe.***
I - Dans le domaine E ***de définition de la fonction,*** Δz ***est un nombre complexe représentant l'accroissement de la variable au point*** $z = z_0$ ***; il a pour image le vecteur*** $\overrightarrow{M_0M'_0}$ ***de grandeur égale au module*** $|\Delta z|$ ***de*** Δz ***et d'argument*** $\varphi = \arg\Delta z$***.***
II - Dans le domaine F ***des valeurs de la fonction*** w***,*** Δw ***est un nombre complexe représentant l'accroissement de la fonction au point*** $z = z_0$ ***; il a pour image le vecteur*** $\overrightarrow{N_0N'_0}$***, de grandeur égale au module*** $|\Delta w|$ ***de*** Δw ***et d'argument*** $\psi = \arg\Delta w$***.***

● *Fonction* $w = \dfrac{1}{z}$. Tout point z du plan complexe est représenté par un point w du plan complexe. Les points $z = 0$ et $z = \infty$ sont respectivement transformés en $w = \infty$ et $w = 0$. L'application $w = 1/z$ est donc *bijective* (voir p. 21) et conforme.

● *Fonction* $w = z^n$ $(n > 1)$. On peut démontrer aisément que, pour $\arg z < \pi/n$, on a :

$$|w| = |z|^n\,; \quad \arg w = n\arg z \qquad (21)$$

(les barres verticales désignent le module de w et de z). Si le domaine E est l'angle $\varphi = \arg z$ tel que :

$$-\alpha < \varphi < \alpha \leqslant \frac{\pi}{n}\,, \qquad (22)$$

la fonction transforme E en F, dont l'image est l'angle $\psi = \arg w$ tel que :

$$-n\alpha < \psi < n\alpha\,. \qquad (23)$$

Donc la fonction $w = z^n$ applique l'intérieur de l'angle φ sur l'intérieur de l'angle ψ du plan complexe ; l'application est bijective.

● *Fonction* $w = e^z$. La fonction s'écrit aussi, avec $z = x + \mathrm{i}y$:

$$w = e^{x + \mathrm{i}y} = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)\,, \qquad (24)$$

et l'on a :

$$|e^z| = e^x\,; \quad \arg e^z = y + 2\,k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \ldots)\,. \qquad (25)$$

Toute droite $y = y_0$ du plan complexe xOy se transforme en une ligne dont l'équation paramétrique est :

$$\begin{cases} u = e^x\cos y_0\,; \\ v = e^x\sin y_0 \end{cases} \qquad (26)$$

dans le plan uOv.

● *Fonctions multivoques*. Une fonction qui prend plusieurs valeurs pour une même valeur de la variable est dite *multivoque* ou *multiforme*. On la représente alors par plusieurs surfaces superposées, constituant une *surface riemanienne*.

● *Intégration des fonctions analytiques*. Les fonctions analytiques sont intégrables au même titre que les fonctions d'une variable réelle, avec, bien entendu, des restrictions et des définitions appropriées. Pour ces questions très importantes, mais très techniques, se reporter aux traités classiques.

TOPOLOGIE

GÉNÉRALITÉS

De quoi s'agit-il ?

Le mot « topologie ».

Au début du XIXᵉ siècle, deux branches des mathématiques se disputent le titre de « branche reine » : la géométrie et l'analyse. La première n'est autre que la bonne vieille géométrie euclidienne, grossie de la géométrie projective créée par Poncelet en 1822 (voir p. 87), munie de cet outil merveilleux qu'est la géométrie analytique : elle a déjà 2 000 ans d'âge. La seconde est une science neuve, qui a un peu plus d'un siècle d'existence ; elle comporte alors deux grandes théories, le calcul infinitésimal et la théorie des fonctions d'une variable réelle.

En apparence, les objets de la géométrie et de l'analyse sont bien différents : les figures, planes ou gauches, dans un cas, les infiniment petits et les fonctions dans l'autre. Les modes de raisonnement diffèrent aussi. Toutefois, les deux branches des mathématiques entretiennent une certaine correspondance : une fonction peut avoir pour image une courbe, une intégrale définie a pour image une surface, etc. ; inversement, la détermination de la tangente en un point d'une courbe est un problème géométrique qui peut être résolu par l'analyse (voir la signification géométrique de la dérivée, p. 113).

Or, il se trouve que les mathématiciens se sont posé, tant au XVIIIᵉ siècle qu'au début du XIXᵉ siècle, des problèmes de géométrie ou d'analyse qui font intervenir des concepts communs, ou du moins, des concepts traduisibles à la fois dans la langue des géomètres et dans celle des analystes.

- *Un exemple, la notion de « voisinage ».*

— En géométrie, on appelle, d'une manière intuitive, « voisinage » d'un point sur une surface une certaine région de cette surface autour du point considéré. Si la surface est un plan, le voisinage d'un point M du plan est constitué par « tous les points qui l'entourent » ; pour donner à la notion une définition plus conceptuelle, on dira, par exemple, que le voisinage d'un point M est constitué par tous les points compris à l'intérieur d'un cercle de centre M et de rayon r « très petit ». Mais l'expression « très petit » n'a rien de rigoureux et, physiquement, elle est très relative et très conventionnelle. Supposons que je choisisse, comme valeur du rayon limitant le « voisinage » du point M, $r = 1$ mm, et que je décide de dire qu'un point M' est *voisin* de M si la distance MM' est inférieure à 1 mm : que dire des points du cercle, pour lesquels on a $MM' = 1$ mm ? Sont-ils *voisins* de M ?

Autre exemple : soit un point P tel que $MP < 1$ mm, donc tel que P soit *voisin* de M au sens grossier défini plus haut ; soit un autre point Q tel que $PQ < 1$ mm : je peux dire que Q est *voisin* de P. Mais est-il *voisin* de M ? Pas obligatoirement. En géométrie, les voisins de nos voisins ne sont pas nécessairement nos voisins.

Les quelques remarques nous font pressentir que la définition du voisinage d'un point sur une surface est une tâche pleine d'embûches, et qu'il faudra bien soigner nos axiomes si nous voulons raisonner sur les voisinages.

— En analyse, on peut aussi parler de voisinage : soit f_1 et f_2 deux valeurs (réelles) d'une fonction $y = f(x)$, x étant une variable réelle ; nous dirons que f_1 et f_2 sont deux valeurs *voisines* si certaines conditions (que nous n'avons pas à énoncer ici) concernant la différence $f_2 - f_1$ sont vérifiées. Appelons M_1 et M_2 les points représentant les valeurs f_1 et f_2 de la fonction dans un plan xOy : si f_1 et f_2 sont *voisines* au sens de l'analyse, alors M_1 et M_2 seront *voisins* au sens de la géométrie (à condition que nos systèmes d'axiomes définissant le voisinage soient bien choisis).

- *Plus généralement,* de Leibniz à Cauchy en passant par Euler, les mathématiciens ont eu l'attention attirée par des problèmes qui semblaient alors marginaux par rapport aux problèmes fondamentaux de la géométrie et de l'analyse et qui étaient principalement des problèmes d'apparence géométrique, faisant intervenir les notions de *voisinage*, de *connexité*, de *dimension* (la liste n'est pas limitative). Pour les résoudre géométriquement, ils ont été conduits à faire usage de méthodes inhabituelles, et Leibniz a créé l'expression *Analysis situs* (dans une lettre à Huygens, du 8 septembre 1679) pour désigner le corps de doctrines traitant de ces problèmes. Le terme leibnizien signifie « analyse de position », ce qui souligne bien l'aspect géométrique des questions posées.

- *Le mot « topologie » a été créé en 1836* par le mathématicien allemand Listing, élève de Gauss, comme substitut à *Analysis situs.* Il désigne alors non pas un corps de doctrines bien constitué, mais l'ensemble des méthodes permettant de traiter les problèmes posés en *Analysis situs*, problèmes qui sont, en général, géométriques, mais qui peuvent être traduits en termes d'analyse.

Entre 1840 et 1914 environ, le mot « topologie » désigne principalement l'étude des propriétés qui restent invariantes pour un certain type de transformations appelées d'abord *corrélations élémentaires* (en 1860, par l'astronome et mathématicien allemand Möbius), puis *homéomorphismes* (terme introduit dans les dernières années du XIXᵉ siècle par Poincaré). (Voir ci-dessous, la définition et l'illustration de la notion d'*homéomorphie*.)

- *Depuis le début du XXᵉ siècle,* des distinctions nouvelles sont apparues — et apparaissent encore, car la topologie est une branche très actuelle des mathématiques.

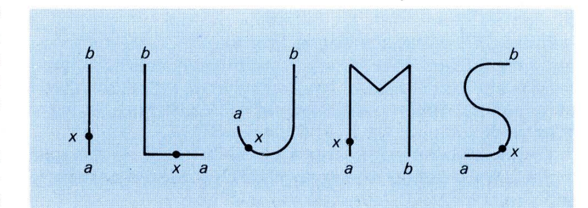
1 - En son sens le plus vaste, la topologie est l'étude d'ensembles dans lesquels on a défini une certaine structure, appelée *structure topologique*, et caractérisée par un certain nombre d'axiomes ; une structure topologique est encore appelée *une* topologie (ne pas confondre avec *la* topologie). Ces ensembles sont appelés des *espaces topologiques* ou encore des *espaces munis d'une topologie* (le mot « espace » étant pris au sens défini p. 46 et non au sens trivial d'espace géométrique ; toutefois l'espace géométrique est un espace particulier, dont les éléments peuvent être des *points* par exemple).

2 - On distingue — depuis les années 1920/1930 environ — la *topologie générale*, dite encore *ensembliste* ou *analytique*, et la *topologie algébrique*, appelée aussi *combinatoire*. Les problèmes les plus célèbres de l'*Analysis situs* relèvent de la topologie combinatoire ; la topologie générale concerne principalement des problèmes nés de la théorie des fonctions de variables réelles (mais, dans la mesure où ces fonctions peuvent avoir des images géométriques, la topologie générale peut traiter *en particulier* de problèmes géométriques, en rapport avec les idées de voisinage ou de connexité par exemple).

Exemples simples de problèmes topologiques.

- *L'homéomorphie.* Ce terme barbare recouvre une réalité dont il est aisé de donner une illustration concrète.

— Considérons un morceau de fil élastique. Nous pouvons lui faire prendre les formes (arbitraires) suivantes :

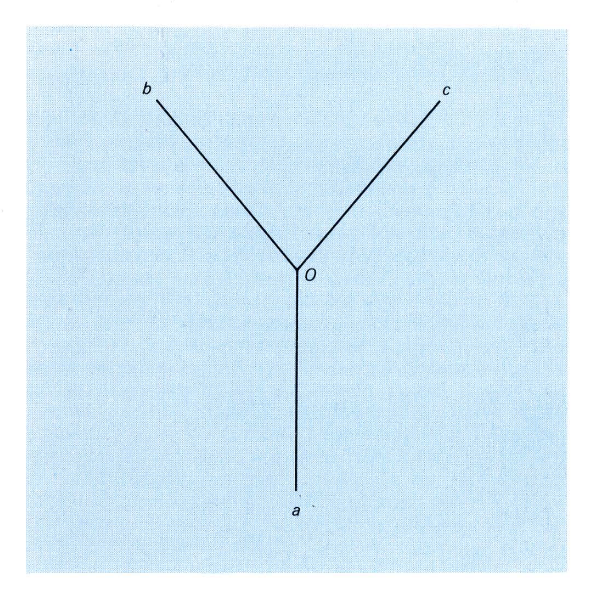


Chaque forme est une figure, c'est-à-dire un ensemble de points. Il est clair que, si l'on appelle a le point situé à l'un des bouts, b le point situé à l'autre « bout », et x un point quelconque sur le fil, une propriété telle que :

« x est entre a et b »

est vraie pour les formes **I, L, J, M** et **S.** La transformation qui change la forme du fil en laissant invariantes des propriétés telles que la précédente (qui concerne la position relative des points de la figure) est appelée un *homéomorphisme.*

— Soit maintenant la figure en forme de **Y** :



Il est impossible de passer de l'une des formes précédentes (**I, L, J, M** ou **S**) à la forme en **Y** sans sectionner le fil : les lignes telles que **I** et **Y** *ne sont pas* homéomorphes. Cela signifie, entre autres choses, qu'il existe au moins un point de la figure en **Y** qui n'a pas de correspondant dans la figure en **I.** Considérons en effet le point O où se rencontrent les trois branches du **Y** et appelons a, b et c les « bouts » de chaque branche. Le point O appartient à la fois aux trois branches Oa, Ob et Oc. Or, sur la figure en **I,** il n'existe aucun point qui appartienne à trois branches distinctes (un point x ne peut appartenir, au plus, qu'à deux branches xa et xb).

— Voici un exemple plus général. Traçons des figures diverses — segments de droite, cercles, triangles, etc. — sur une feuille de caoutchouc tendue ; puis déformons cette feuille en l'étirant, en soulevant certaines de ses parties, etc. Il est clair que certaines propriétés des figures ne vont pas se conserver après cette déformation : la longueur d'un segment, le fait pour tous les points d'un cercle d'être à la même distance du centre, etc. En revanche, si trois points a, b, c sont dans cet ordre sur l'une des figures avant la déformation, les points a', b', c' qui leur correspondent après la transformation sont dans le même ordre : la transformation conserve l'ordre des points ; de même, si deux segments se coupent sur la feuille initiale, ils se coupent encore après la déformation : l'intersection de deux segments est un autre invariant, etc. On peut donc dire que les figures déformées sont homéomorphes aux figures initiales pour les invariants considérés.

— Il faut bien comprendre qu'on ne peut parler d'homéomorphisme que pour certains invariants seulement. Ainsi la déformation de la feuille de caoutchouc n'est pas un homéomorphisme pour la propriété « être parallèle à », ou pour les distances entre deux

points. Cela signifie que, pour parler d'homéomorphisme entre deux ensembles de points X et Y, il faut d'abord définir sur X et sur Y certains caractères. On dit encore que l'on munit X et Y d'une *structure topologique* (ou, plus brièvement, d'une topologie). Nous verrons plus loin en quoi cela consiste.

● *Propriétés locales et propriétés globales.* Une surface est un ensemble de points, que nous pouvons appeler *espace* au sens défini p. 46. Chaque surface possède des propriétés typiques, qui sont liées à sa nature et qu'on appellera *topologiques* (on pourrait les déduire d'un système d'axiomes qui définirait la *structure topologique* de cet espace). Considérons, par exemple, la surface d'une sphère. Nous pouvons la ceindre d'un cercle élastique (équateur), qu'on peut réduire d'une façon continue jusqu'à ce qu'il se limite à un point (pôle). Soit maintenant la surface d'un tore (un pneu de bicyclette est un tore) : si nous l'entourons d'un cercle élastique, il nous est impossible de réduire ce cercle d'une manière continue jusqu'à ce qu'il ne soit plus qu'un point. Cette propriété (le cercle qui devient point) distingue l'espace sphérique de l'espace torique : c'est une propriété topologique. Nous disons que la sphère n'a pas la même topologie que le tore, quand on considère ces deux surfaces globalement.

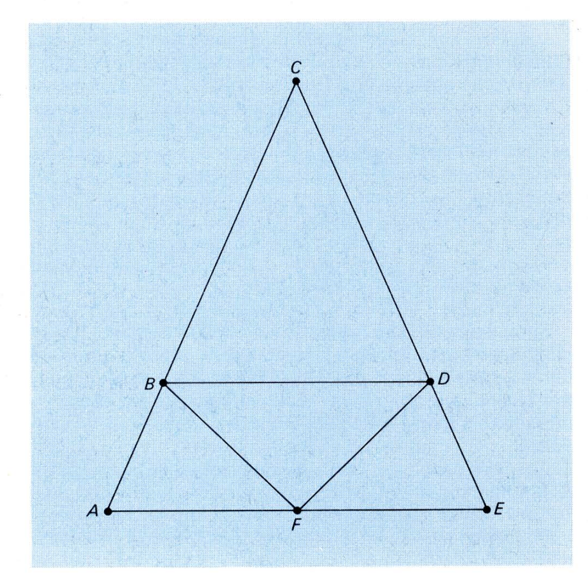
Voici une autre propriété topologique globale qui distingue la sphère d'un tore : je peux faire rouler une bille sphérique d'une infinité de façons ; en revanche un cerceau ne peut rouler que d'une seule manière. Voilà pourquoi on construit des roulements à billes, mais non pas des « roulements à bagues ». Cette aptitude au roulement est une propriété topologique globale.

Découpons maintenant un tout petit confetti sur une sphère et un autre sur un tore. L'un comme l'autre peuvent être assimilés à un petit morceau de plan : ils ont les mêmes propriétés topologiques, et on ne peut plus les distinguer. Autrement dit les *propriétés locales* (celles d'un confetti) d'une sphère et d'un tore sont les mêmes, alors que leurs *propriétés globales* sont différentes.

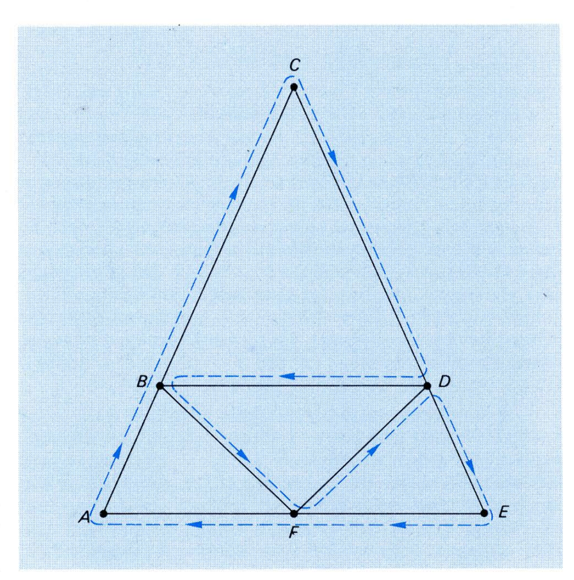
Cette distinction n'est pas sans intérêt et peut être généralisée. Étant donné un espace topologique (c'est-à-dire un ensemble dans lequel on a défini une topologie), une propriété ou une théorie qui est vraie aussi bien pour l'espace tout entier qu'au *voisinage* de ses points relève de la topologie générale. Si elle n'est pas applicable aux voisinages, elle relève de la topologie algébrique. Le lecteur remarque peut-être *in petto* que l'auteur de ces lignes n'a pas encore expliqué ce qu'étaient ces deux branches de la topologie, de sorte que ces remarques sur les propriétés globales ou locales semblent un peu gratuites : en fait, comme nous essayerons de le montrer plus loin, il est très important de savoir de quelle topologie relève un problème... ne serait-ce que pour le résoudre !

● *Un problème de réseau.* Voici un problème qui ressemble aux énigmes posées aux jeunes lecteurs de la presse enfantine : peut-on tracer le réseau suivant — qui passe par six nœuds A, B, ..., F — sans lever le crayon du papier et sans passer deux fois par le même chemin ?

Un problème de réseau. Si l'on veut donner au problème une allure plus concrète, on peut imaginer que A, B, ..., F sont des villes et que les segments AB, etc., sont des routes joignant ces villes. Le problème s'énonce alors ainsi : déterminer l'itinéraire qui permet de visiter toutes les villes sans parcourir deux fois la même route.

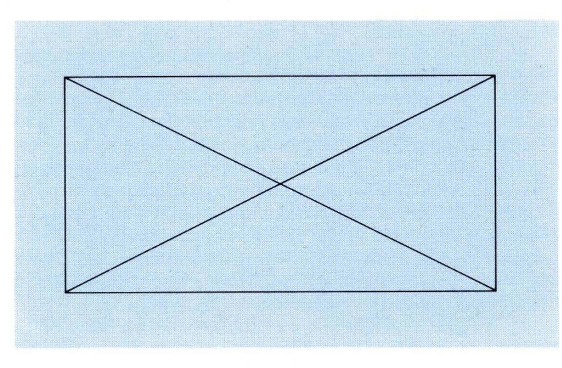


En tâtonnant quelque peu, on trouvera la solution suivante :



Solution du problème de réseau : il faut partir de A pour arriver à A ; on passe deux fois par le point D.

Dans le cas proposé, le problème est possible et simple. Mais si l'on proposait la configuration suivante, il n'aurait aucune solution.



Il est impossible de tracer cette figure sans repasser deux fois par un même segment.

Posons-nous maintenant le problème sous sa forme la plus générale : le réseau comprend n points A, B, C, ..., F reliés par des segments en nombre quelconque ; existe-t-il un trajet qui permet de parcourir une fois seulement tous les segments, et quel est-il ?

La solution de ce problème exige d'abord une définition : nous appelons *degré* d'un point le nombre de segments qui y aboutissent. Par exemple, dans le cas simple précédent, le point A est de degré 2 ; le point B est de degré 4 ; le point C est de degré 1, etc. Cela dit, on démontre les théorèmes suivants, qui fournissent la solution du problème :

— *Théorème I* : si un point est de degré impair, il doit être un point de départ ou un point d'arrivée.

— *Théorème II* : si, dans un réseau, il existe plus de deux nœuds de degré impair, le problème n'a pas de solution.

— *Théorème III* : aucun réseau ne possède qu'un seul nœud de degré impair ;

— *Théorème IV* : s'il n'y a aucun nœud de degré impair, le problème est toujours possible quel que soit le point de départ, avec lequel est confondu le point d'arrivée.

Dans l'exemple du réseau inscrit dans le triangle ACE, il n'y a aucun nœud de degré impair : le problème est donc toujours possible et, quel que soit le point de départ, on y reviendra. Dans l'exemple du réseau inscrit dans un rectangle, il y a 4 nœuds de degré impair (les quatre sommets du rectangle), donc d'après le théorème II, le problème n'a aucune solution.

● *Le problème des ponts de Königsberg* est une variante du problème précédent ; il a été étudié en 1735-36 par Euler qui l'expose en ces termes :

> *« Il y a, dans la ville de Königsberg, une île, appelée l'île de Kneiphof, que bordent deux bras de la rivière Pregel. Sept ponts traversent ces bras. Il s'agit de savoir s'il existe un itinéraire permettant de passer une fois, et une fois seulement, sur chacun de ces ponts... »*

En bon mathématicien, Euler ne se limite pas aux sept ponts de Königsberg ; il généralise ensuite le problème au cas d'une rivière de configuration quelconque, avec un nombre n de ponts quelconques. D'autres problèmes du même type ont intrigué les mathématiciens au XVIIIe siècle et au début du XIXe siècle ; voici quelques exemples.

— Le problème dit des *nœuds* (Gauss, Listing, etc.) : un réseau électrique est un ensemble de conducteurs, et l'on appelle *nœud* le point de rencontre de deux ou plusieurs conducteurs. Comment répartir ces nœuds en fonction de certaines conditions expérimentales données (résistances, intensités, etc.) ?

— Le problème du coloriage d'une carte a été abordé — sans succès — par Möbius, De Morgan, Cayley, Tait, A. B. Kempe ; ce n'est que tout récemment (1976) qu'on a « démontré » — et encore cette démonstration n'est-elle pas acceptée unanimement — qu'il suffisait de quatre couleurs pour colorier une carte de sorte que deux régions quelconques séparées par une frontière ne soient pas de la même couleur.

— La relation $F - A + S = 2$ entre le nombre F de faces d'un polyèdre, le nombre A de ses arêtes et le nombre S de ses sommets est connue sous le nom de « théorème de Descartes-Euler » ; c'est aussi un problème d'*analysis situs*.

— Etc.

Aperçu historique.

On se doute bien que la topologie n'a pas uniquement été créée pour répondre à des questions dans le genre de celles qui précèdent. Mais certaines de ces questions ont mis les mathématiciens sur la voie de la topologie, dont on va essayer de décrire l'histoire. Pour la commodité de l'exposé, nous séparerons la topologie générale et la topologie algébrique : mais leur histoire est enchevêtrée, du moins en ses débuts. D'autre part on retiendra cette remarque du mathématicien belge Guy Hirsch, auteur du chapitre consacré à la topologie dans l'*Abrégé d'histoire des mathématiques* publié sous la direction de Jean Dieudonné aux éditions Hermann (Paris, 1978).

> *... [la topologie générale] contrairement à la topologie algébrique, ne semble pas avoir conduit jusqu'à présent à l'élaboration de méthodes nouvelles applicables dans d'autres domaines de la mathématique que ceux-là mêmes qui lui ont donné naissance (op. cit., t. II, p. 214).*

● *La topologie générale.* C'est Cantor et Dedekind, les créateurs de la théorie des ensembles présentée p. 15, qui ont posé les premiers jalons de la topologie générale. Toutefois les notions topologiques qu'ils introduisent à propos de certaines propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels (c'est-à-dire l'ensemble des points de la droite réelle : voir p. 54) et des espaces à n dimensions $\mathbb{R}^n$ (« espace » est pris ici au sens ensembliste défini p. 46) n'ont pas été regroupées en une théorie distincte de la théorie des ensembles par nos deux auteurs. Autrement dit, ils ont bien vu l'aspect topologique des problèmes traités, mais ils n'ont pas consacré à ces propriétés une théorie à part entière. Parmi les notions topologiques dont ils font usage, citons :

— la notion de *point d'accumulation* (introduite par Weierstrass) ;

— la notion d'*ensemble des points d'accumulation* d'un ensemble (*ensemble dérivé*) ;

— la notion d'*ensemble ouvert* (ou, plus brièvement, d'*ouvert*), qui, nous le verrons ci-après (p. 129) est capitale en topologie.

Ce n'est qu'au début du XXe siècle que la topologie commence à devenir autonome par rapport à la théorie des ensembles, lorsque Fréchet (1906) définit des

ensembles appelés *espaces abstraits* qui ne sont pas des sous-ensembles euclidiens (comme la droite réelle par exemple) et qui possèdent néanmoins des propriétés topologiques (en particulier dans lesquels on peut définir des ouverts respectant certains axiomes dits de structure topologique). C'est Hausdorff (1914) qui posa le système axiomatique qui est à la base de la topologie générale, et l'on doit au mathématicien polonais Banach l'essentiel de la théorie des *espaces normés* (voir p. 106) qui est un outil extrêmement puissant.

• *La topologie algébrique (ou combinatoire).* — Les origines de la topologie combinatoire remontent aux travaux d'Euler. Le problème des ponts de Königsberg (1735) débouche sur la *théorie des graphes* (un graphe est un ensemble formé d'*arêtes* et de *nœuds*; page 128, nous avons étudié des problèmes de réseaux : un réseau géométrique euclidien est un graphe particulier. On peut concevoir des graphes dont les arêtes seraient non pas des segments de droite, mais des images homéomorphes de ces segments). C'est aussi à Euler qu'on doit l'énoncé de la *formule d'Euler* (1750-1751) ; en appelant S le nombre de sommets d'un polyèdre, A le nombre de ses arêtes et F le nombre de ses faces, on a la relation suivante :

$$S - A + F = 2. \qquad (1)$$

Cette formule avait été établie par Descartes, mais dans une perspective toute différente. Ainsi un cube est un polyèdre à 8 sommets, 12 arêtes et 6 faces, et l'on a bien :

$$8 - 12 + 6 = 2. \qquad (2)$$

La première démonstration de la formule d'Euler est due à un élève de Gauss, Karl von Staudt (1847). La propriété (1) est topologique, car elle s'applique aussi bien à un polyèdre euclidien classique qu'à un polyèdre dont les faces seraient courbes par exemple au lieu d'être planes. Elle a été étudiée dans cet esprit par de nombreux mathématiciens, au XIXe siècle (en particulier par Le Gendre, Cauchy, Gergonne, Möbius, Listing, Jordan, etc.).

— Entre 1850 et 1890 environ, deux catégories de travaux doivent retenir notre attention.

1 - Il y a d'abord les recherches de Riemann sur la théorie des fonctions d'une variable complexe (voir p. 124) qui le conduisent à une interprétation géométrique (surfaces de Riemann). Pour généraliser les théories de Riemann (qui disparut prématurément à l'âge de 40 ans), des mathématiciens comme Betti, Felix Klein, et — plus tard — W. von Dyck ont utilisé et étendu les raisonnements dont on s'était servi pour démontrer la formule d'Euler.

2 - A ce corps de doctrines, assez homogènes, il faut ajouter la découverte de *surfaces non orientables*, comme le *ruban de Möbius* (1858) ou la *bouteille de Klein* (1882). Le traitement analytique de ces surfaces relève aussi de méthodes proches de celles auxquelles nous venons de faire allusion et qu'on nomme, depuis Listing (1836) des méthodes *topologiques.* C'est aussi à cette époque que le mathématicien anglais Francis Guthrie posa à son maître et collègue De Morgan le fameux *problème des quatre couleurs* (1852) : sur la sphère (ou dans le plan) il suffit de quatre couleurs pour colorier une carte sans que jamais deux régions séparées par une frontière aient la même couleur. Cette conjecture (proposition plausible, mais non démontrée) a intrigué et intrigue encore les mathématiciens (une « démonstration » — qui n'en est peut-être pas une — a été proposée en 1976 par Appel et Haken ; la méthode employée par ces deux auteurs repose sur l'emploi d'un ordinateur).

Tous ces travaux relèvent de ce qu'on a appelé la topologie combinatoire.

— Entre 1892 et 1905 environ, Poincaré est conduit à aborder des problèmes de nature topologique en étudiant des courbes définies par des équations différentielles et des fonctions de variables complexes. En particulier, il est amené à définir des êtres mathématiques appelés *complexes*, divisés en *cellules*, et qui jouent un rôle important en topologie combinatoire et la théorie des complexes débouche sur une autre théorie, appelée *homologie* et l'étude de ce qu'on nomme des *variétés* (classe de figures qui interviennent dans l'étude de fonctions à plusieurs variables). L'exploitation des travaux de Poincaré a contribué à la création de la *topologie algébrique*, comme on nomme à partir de 1928 la généralisation des théorèmes de la topologie combinatoire.

— Durant le premier tiers du XXe siècle, les concepts proposés par Poincaré et quelques autres subirent un traitement axiomatique féroce, et la découverte du rôle des structures algébriques en topologie permet la création et l'exploitation de nouveaux concepts : notion de *catégorie* (à partir d'une proposition connue sous le nom de « théorème de Poincaré », des travaux de Hopf vers 1928), exploitée par Eilenberg et MacLane en 1942 ; concepts d'*invariance* (Alexander, Lefschetz), de *point fixe* (Brouwer, vers 1910) ; étude des *champs de vecteurs* (Brouwer, 1909, Whitney, 1935) ; notion de *cohomologie* (Lefschetz, 1930 ; Aleksandrov, 1932 ; Leray et H. Cartan, 1945).

— A partir de 1930/1935, les théories topologiques deviennent de plus en plus abstraites. La notion d'*homotopie* est analysée par Čech (à partir de 1932) et par Hurewicz (1935-1936) ; des espaces topologiques nouveaux font l'objet de travaux nombreux et très riches par leurs conséquences : *espaces fibrés, H-espaces* (« H » est l'initiale de Hopf), *espaces d'Eilenberg-MacLane* (1942), etc.

— Isolons enfin une conjecture établie par Poincaré et étudiée par Tietze en 1908 ; on la nomme *Hauptvermutung*, ce qui signifie en allemand « conjecture fondamentale » et nous ne l'expliquerons pas ici. Le grand problème est de savoir si cette conjecture est vraie ou fausse, et pour quels espaces elle est vraie. La question a été étudiée par J. Milnor (1961), Kirby et Siebenmann (1969), E. Moïse (1952), pour ne citer que les principaux travaux.

Deux théories fondamentales.

Topologie générale de la droite réelle.

• *Remarques préliminaires.*

1 - Considérons un ensemble X que nous nommerons un *espace* (au sens défini p. 46), et dont les éléments seront appelés des *points.* Dans le cas très particulier où ces éléments sont des points au sens géométrique du terme, l'espace est lui-même géométrique. Ainsi une ligne (droite ou courbe) est un espace à caractère géométrique ; une surface (plane ou gauche) est un espace géométrique ; un ensemble de courbes est un espace géométrique, etc. Mais ce caractère géométrique, très commode pour les explications imagées, est très particulier. On peut considérer un espace dont les éléments sont des nombres, ou encore des fonctions ou les valeurs de ces fonctions. Un ensemble particulièrement intéressant pour nous est l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (voir p. 53). L'image de cet ensemble est la ligne droite, prolongée à l'infini dans les deux sens : à chaque point (et il en a une infinité) de la droite correspond un nombre réel. L'ensemble $\mathbb{R}$ peut donc être appelé la *droite réelle.*

2 - Page 7, nous avons étudié les ensembles de deux points de vue.

— d'une part nous avons examiné les notions d'*appartenance* à un exemple, d'ensembles *nombrables* ou *dénombrables*, de relation d'*ordre*, d'*application*, etc. ; ce point de vue est rigoureusement ensembliste ;

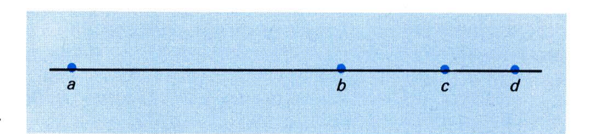
— d'autre part, nous avons appris à *calculer* dans un ensemble, c'est-à-dire à poser des règles opératoires sur les éléments d'un ensemble (les *lois de composition* interne ou externe, étudiées p. 36) ; ces règles décrivent ce qu'on appelle la *structure algébrique* de l'ensemble considéré ou, plus brièvement, son *algèbre.*

Nous allons maintenant munir un ensemble d'une structure dite *topologique* (et non plus algébrique). L'intérêt de cette structure, qui permet d'appeler l'ensemble qui en est muni : un *espace topologique*, sera compris par la suite. L'ensemble sur lequel nous allons travailler sera la droite réelle $\mathbb{R}$. Les propriétés que nous décrirons dans $\mathbb{R}$ pourront être interprétés de deux manières : **1°** analytiquement, comme des propriétés concernant les nombres réels ; **2°** géométriquement comme des propriétés concernant les points d'une droite.

• *Notion d'ouvert.* Page 17, nous avons défini les relations d'ordre symbolisées par « $<$ » et « $\leqslant$ » (ou « $>$ » et « $\geqslant$ »), et les notions d'*intervalle ouvert* $]a, b[$ et d'*intervalle fermé* $[a, b]$. Dans le cas de l'ensemble $\mathbb{R}$, l'intervalle $]a, b[$ contient tous les réels compris en a, et b, à l'exclusion de a et b, tandis que l'intervalle $[a, b]$ est composé de tous les réels compris entre a et b, de a et de b.

Considérons maintenant un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$. Nous dirons que A est un *ouvert* : **1°** s'il est vide ($A = \varnothing$) ; **2°** si, pour tout $x \in A$, il existe un intervalle ouvert contenant x et contenu dans A.

En d'autres termes, sur la droite réelle, un ouvert est une réunion d'intervalles ouverts (bien entendu, un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert).



La droite que nous avons tracée sur cette figure, indéfiniment prolongée dans les deux sens, est l'image géométrique de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels (chaque point de cette droite correspond à un nombre réel). Le segment ab sans les points a et b est un intervalle ouvert $]a, b[$; de même $]c, d[$ est un intervalle ouvert composé de tous les points du segment, c'est-à-dire à l'exclusion des points c et d. D'après la définition donnée dans le texte, le sous-ensemble $A =]a, b[$ de $\mathbb{R}$ est un ouvert ; il en est de même du sous-ensemble $B =]c, d[$ et de la réunion $C = A \cup B$ des deux sous-ensembles. On notera que C, qui est un ouvert, n'est pas un intervalle ouvert : il ne contient pas le segment bc.

La définition que nous venons de donner d'un ouvert de $\mathbb{R}$ est équivalente aux quatre axiomes suivants :

— $\mathbf{O}_1$: l'ensemble vide $\varnothing$ est un ouvert ;

— $\mathbf{O}_2$: la droite réelle $\mathbb{R}$ est un ouvert ;

— $\mathbf{O}_3$: toute réunion, *finie ou non* d'ouverts est un ouvert ;

— $\mathbf{O}_4$: toute intersection *finie* d'ouverts est un ouvert.

• *Notion de fermé.* Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit fermé si son complémentaire dans $\mathbb{R}$, $\complement A$, est fermé. Cette propriété correspond aux quatre axiomes :

— $\mathbf{F}_1$: l'ensemble vide $\varnothing$ est un fermé ;

— $\mathbf{F}_2$: la droite réelle F est un fermé ;

— $\mathbf{F}_3$: toute intersection, *finie ou non*, de fermés est un fermé ;

— $\mathbf{F}_4$: toute réunion, *finie*, de fermés est un fermé. (On remarque que la propriété $\mathbf{F}_1$ est *duale* de la propriété $\mathbf{O}_2$; que $\mathbf{F}_2$ est *duale* de $\mathbf{O}_1$, etc.)

• *Structure topologique de la droite* $\mathbb{R}$. Considérons l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ; nous avons vu qu'on pouvait le munir d'une *structure algébrique* définissant les opérations fondamentales sur les réels et leurs propriétés, c'est-à-dire permettant de calculer sur les nombres réels. C'est à ce calcul que sont entraînés tous les collégiens du monde.

Nous venons en outre de constater qu'on pouvait aussi définir dans $\mathbb{R}$ des sous-ensembles (= des parties de $\mathbb{R}$) respectant les axiomes $\mathbf{O}_1$, $\mathbf{O}_2$, $\mathbf{O}_3$ et $\mathbf{O}_4$. Appelons $\mathcal{O}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ qui sont des ouverts. Le fait que $\mathbb{R}$ soit une collection d'ouverts entraîne, pour les nombres réels, un certain nombre de propriétés qui n'étaient pas impliquées par la structure algébrique de la droite. En d'autres termes, le fait d'avoir défini, outre l'ensemble $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{O}$ des ouverts de $\mathbb{R}$ confère à $\mathbb{R}$ des propriétés nouvelles, qu'on appelle des propriétés *topologiques.* On dit encore qu'on a muni la droite $\mathbb{R}$ d'une *structure topologique* (d'une *topologie*), ou encore que le couple $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ est un *espace topologique*, ou encore que $\mathcal{O}$ définit sur $\mathbb{R}$ une topologie.

• *Notion de voisinage.* Supposons qu'un fabricant de confitures fasse figurer sur l'étiquette d'un pot de confiture la mention : « poids voisin de 250 g ». Qu'est-ce que cela signifie *concrètement* ? Qu'il y a, dans le pot, 250 grammes de confiture plus ou moins quelques grammes. Dans le langage du mathématicien, on doit dire : « le nombre qui exprime le poids en grammes de confiture contenu dans ce pot est *voisin* du réel $x = 250$ ». Mais le mathématicien a plus d'exigences que le fabricant de confitures : il lui faut aussi définir ce qu'il entend par *voisinage de x.*

Cette définition n'est possible que si l'on a muni la droite $\mathbb{R}$ d'une topologie, c'est-à-dire si l'on a posé les axiomes $\mathbf{O}_1$, $\mathbf{O}_2$, $\mathbf{O}_3$ et $\mathbf{O}_4$. Alors nous définissons ainsi le voisinage V d'un point $x \in \mathbb{R}$: on appelle *voisinage* d'un point $x \in \mathbb{R}$ tout sous-ensemble V de $\mathbb{R}$ contenant un ouvert contenant x. Cette définition mérite quelques commentaires.

1 - Le *voisinage* est une propriété topologique, puisqu'il ne peut être défini qu'à l'aide de l'ensemble $\mathcal{O}$ des ouverts de $\mathbb{R}$.

2 - Nous avons vu que tout intervalle ouvert de nombres réels est un ouvert, donc V est un voisinage de x si V contient un intervalle ouvert contenant x. Par exemple le sous-ensemble (ouvert) $]200, 300[$ est un voisinage de 250, puisqu'il contient, entre autres exemples, l'ouvert $]240, 260[$ qui contient $x = 250$. Et

l'ouvert]240, 260[est lui aussi un voisinage de x, puisqu'il contient l'ouvert]245, 255[qui contient x, etc. Bien plus : la droite $\mathbb{R}$, qui n'est autre que l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, est aussi un voisinage de x.

3 - On voit donc que le réel x a une infinité de voisinages. Pour que la mention « x est voisin de 250 g » ait une signification, il faut préciser de quel voisinage il s'agit (c'est-à-dire quel est l'écart maximal admis par rapport à 250 g).

4 - Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et soit x_0 un nombre réel. Le nombre x_0 est dit *point d'accumulation* de A si, dans tout voisinage de x_0, il existe au moins un point de A autre que x_0.

Considérons par exemple le sous-ensemble]0, 1[. Tout voisinage de 0 est un ouvert contenant 0 ; il contient donc : **1°** 0 ; **2°** des réels plus petits que 0 (= *négatifs*) ; **3°** des réels plus grands que 0 (= *positifs*). Or, parmi les réels positifs, il en est qui sont inférieurs à 1, donc compris dans l'intervalle]0, 1[: il existe donc, dans tout voisinage de 0, au moins un nombre appartenant au sous-ensemble]0, 1[et qui soit différent de 0 : 0 est donc un point d'accumulation pour $A =$]0, 1[. On pourrait montrer de même que 1 est un point d'accumulation pour A.

● *Conséquences.* La droite $\mathbb{R}$ étant munie d'une topologie (c'est-à-dire de la définition des ouverts — ou des fermés — dans $\mathbb{R}$), on peut démontrer un grand nombre de propositions qui décrivent les propriétés en rapport avec cette structure. Nous avons rencontré certaines de ces propositions pp. 17-18. Par exemple :

1 - toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure ;

2 - toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ a une borne inférieure.

Ces deux propriétés sont fondamentales. Elles permettent en particulier d'étudier les *suites numériques* (voir p. 106). Ainsi, en vertu de la proposition 1, toute suite croissante majorée possède une limite et, en vertu de la proposition 2, toute suite décroissante minorée a une limite. De telles suites sont donc *convergentes*.

Il existe d'autres propriétés de la droite réelle $\mathbb{R}$ qui peuvent être déduites de sa structure topologique et qui conduisent à d'importants théorèmes de la théorie des fonctions d'une variable réelle (par exemple le théorème de Bolzano-Weierstrass).

● *Généralisations.*

— Les points du plan sont les images de l'ensemble $\mathbb{R}^2$, qui, on l'a vu à la page 53, peut être muni de la structure d'espace vectoriel (ses éléments ont pour images les vecteurs de la géométrie plane classique). Considérons, dans le plan $\mathbb{R}^2$, un rectangle de dimensions $a \times b$; on l'appelle un *pavé*. Tous les points appartenant à la surface du rectangle, en y comptant ceux qui appartiennent à son périmètre, forment un *pavé fermé* ; si on exclut le périmètre, on a un *pavé ouvert*. Il est facile de démontrer que toute réunion de pavés ouverts est un *ouvert*, c'est-à-dire respecte les axiomes suivants :

— $\mathbf{O}_1$: l'ensemble vide $\varnothing$ est un ouvert ;
— $\mathbf{O}_2$: le plan $\mathbb{R}^2$ est un ouvert ;
— $\mathbf{O}_3$: toute réunion, finie ou non, d'ouverts est un ouvert ;
— $\mathbf{O}_4$: toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

On peut donc munir l'espace $\mathbb{R}^2$ d'une topologie, et en déduire les propriétés topologiques du plan, qui sont les images des propriétés topologiques d'une fonction de deux variables réelles $f(x, y)$.

— L'espace $\mathbb{R}^3$ (l'espace euclidien classique) est une collection de *pavés* à trois dimensions $a \times b \times c$; ici aussi on distingue des pavés ouverts, constitués de tous les points du parallélépipède $a \times b \times c$ à l'exception des points situés sur les faces de ce parallélépipède, et des pavés fermés. Une réunion de pavés ouverts est appelée un ouvert. Les ouverts de $\mathbb{R}^3$ vérifient les axiomes $\mathbf{O}_1$, $\mathbf{O}_2$, $\mathbf{O}_3$ et $\mathbf{O}_4$; l'espace $\mathbb{R}^3$ est ainsi muni d'une topologie. Les propriétés topologiques de l'espace à 3 dimensions sont les images des propriétés topologiques des fonctions de trois variables $f(x, y, z)$.

L'une de ces propriétés topologiques est la suivante : considérons une surface A dans l'espace $\mathbb{R}^3$ (ce peut être aussi bien une surface géométrique, comme la surface latérale d'un cône, la surface d'un cube, la surface d'une sphère, etc., qu'une surface gauche quelconque). Imaginons que ces surfaces soient en caoutchouc : on peut les déformer d'une manière continue (c'est-à-dire simplement en les étirant ou en les comprimant, sans déchirure, ni pliage, ni collage). Une telle déformation est appelée une *homéomorphie*, et — comme on l'a dit p. 127 — elle conserve certaines propriétés, qu'on appelle *topologiques*.

● *Conclusion (provisoire).* Nous avons muni la droite, le plan et l'espace de la géométrie d'Euclide d'une structure topologique, en y définissant des *ouverts* et en constatant qu'ils respectaient les quatre axiomes $\mathbf{O}_1$, $\mathbf{O}_2$, $\mathbf{O}_3$ et $\mathbf{O}_4$. Aux propriétés affines, métriques et projectives des figures il faut donc ajouter leurs propriétés topologiques (par exemple, la formule d'Euler est une propriété topologique des polyèdres). Ces propriétés sont les images de propriétés des fonctions d'une, deux ou trois variables réelles. Munir un ensemble d'une topologie n'est donc pas uniquement un jeu abstrait pour mathématiciens avertis ; c'est une manière de découvrir de nouvelles propriétés des figures et des fonctions.

Page 131, nous généraliserons encore cette méthode, en l'appliquant à n'importe quel ensemble E. Dès lors la topologie de la droite réelle ou de l'espace euclidien sera considérée comme un cas particulier de la topologie d'un ensemble quelconque, aussi abstrait soit-il. Il en résulte une importante économie de démonstration : telle propriété démontrée d'une manière très générale pour un espace topologique quelconque (c'est-à-dire pour un ensemble quelconque muni d'une topologie) contient en puissance toutes les propriétés topologiques particulières à la droite, au plan, etc.

La théorie simpliciale et l'homologie.

Cette théorie est un des chapitres les plus fondamentaux de l'algèbre combinatoire ; elle a été établie par Poincaré (1892-1905), puis approfondie par de nombreux mathématiciens, dont Hopf (1928), et elle débouche sur la *théorie de l'homologie* que développèrent notamment Veblen et Alexander (principalement à partir de 1913). Une généralisation plus récente a conduit à la *théorie du cobordisme* (R. Thom, 1954).

● *La notion de simplexe.* On appelle *simplexe* à n dimensions dans un espace $\mathbb{R}^n$ un sous-ensemble borné de cet espace déterminé par $n+1$ points de cet espace et qu'on appelle *sommets* du simplexe.

Pour $n \leqslant 3$, il est possible de donner des images géométriques des simplexes (mais il ne faut pas oublier que ce sont des images, et qu'il leur correspond des fonctions, c'est-à-dire des éléments analytiques). Pour $n > 3$, la représentation géométrique n'est plus possible, et lorsqu'on parle de *points*, par exemple, il faut entendre des éléments représentés par des fonctions de réels. Limitons-nous donc ici à des exemples pris sur la droite $\mathbb{R}$, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, qui sont étudiés en géométrie élémentaire.

— Sur la droite ($n = 1$), un simplexe est défini par 2 points a_0 et a_1 : c'est le segment $a_0 a_1$. Dans le plan ($n = 2$), un simplexe est défini par $n+1 = 3$ sommets a_0, a_1, a_2 : c'est un triangle. Dans l'espace ($n = 3$), un simplexe défini par $n+1 = 4$ points non dans un même plan : c'est un tétraèdre (pyramide dont les quatre faces sont des triangles). Notons au passage qu'un point est un simplexe de dimension nulle (si $n = 0$, le simplexe est défini par $n+1 = 1$ point).

— Nous désignerons un simplexe par le symbole σ, et nous indiquerons en exposant sa dimension. Ainsi un simplexe à 1 dimension (segment) se désignera par σ^1 ; un simplexe à 2 dimensions (triangle), par σ^2 ; un simplexe à 3 dimensions par σ^3, etc. Nous appellerons *faces* d'un simplexe à n dimensions les simplexes à $n-1$ dimensions obtenus en supprimant à tour de rôle un des sommets du simplexe considéré. Ainsi le simplexe à 3 dimensions $\sigma^3 = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ possède $n+1 = 4$ faces à $n-1 = 2$ dimensions, que nous distinguerons par des indices : σ_0^2, σ_1^2, σ_2^2, σ_3^2 (l'exposant rappelle que ces faces sont des simplexes à 2 dimensions) :

$$\begin{cases} \sigma_0^2 = (a_1, a_2, a_3) ; \\ \sigma_1^2 = (a_0, a_2, a_3) ; \\ \sigma_2^2 = (a_0, a_1, a_3) ; \\ \sigma_3^2 = (a_0, a_1, a_2) . \end{cases} \qquad (1)$$

De même un triangle ($n = 2$) possède 3 faces à $n-1 = 1$ dimension, à savoir ses trois côtés.

— Lorsqu'un simplexe est défini par ses n sommets dans un ordre déterminé, il est dit *ordonné*. Il y a donc autant de simplexes ordonnés que de permutations possibles pour n objets, soit $n!$ (lire « factorielle n » ; $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$; voir p. 33). Ainsi les trois points a_0, a_1 et a_2 définissent 6 triangles ordonnés :

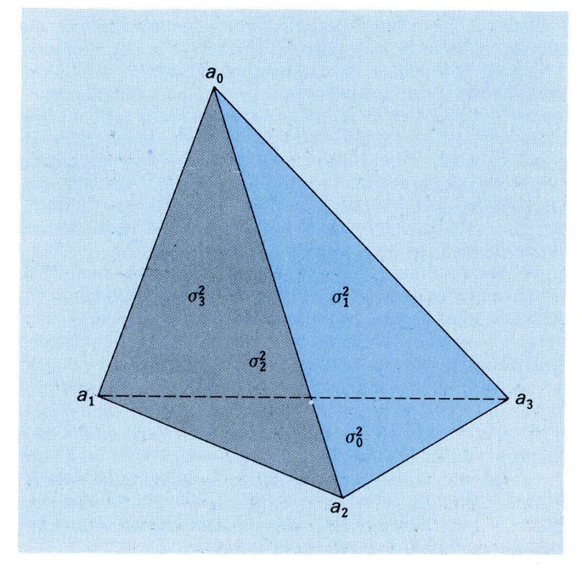
$$\begin{array}{ll} (a_0, a_1, a_2) & (a_0, a_2, a_1) \\ (a_1, a_2, a_0) & (a_2, a_1, a_0) \\ (a_2, a_0, a_1) & (a_1, a_0, a_2) . \end{array}$$

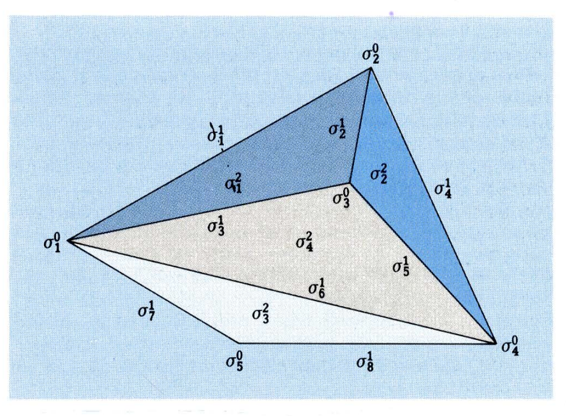
Les simplexes de la première colonne se déduisent les uns des autres par une permutation paire (voir p. 35), et sont dits pour cette raison équivalents. Il en est de même pour les simplexes de la deuxième colonne (en revanche on ne peut pas passer d'un simplexe de la première colonne à l'un de la seconde par une permutation paire). En résumé, les simplexes ordonnés à 2 dimensions (triangles) correspondant aux trois points a_0, a_1, a_2 se réduisent à 2 triangles dont on parcourt les sommets en sens inverse (a_0, a_1, a_2) et (a_0, a_2, a_1). On dit qu'il s'agit de *simplexes orientés*, et on les note σ^+ et σ^-. De même deux points sur une droite, a_0 et a_1, définissent les deux simplexes orientés (segments) $\sigma^+ = (a_0, a_1)$ et $\sigma^- = (a_1, a_0)$.

● *Notion de complexe.* On appelle *complexe* ou encore *polyèdre* un ensemble fini de simplexes soudés entre eux par leurs faces.

— Dans le plan $\mathbb{R}^2$, par exemple, un complexe à 2 dimensions est une figure obtenue par l'assemblage d'un nombre fini de triangles (en géométrie élémentaire, la figure est appelée « polygone » ; nous la nommerons « polyèdre à 2 dimensions »). Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, un polyèdre à 3 dimensions est la figure composée de tétraèdres soudés par leurs faces (ici, le terme « polyèdre » est pris en son sens usuel).

Représentation d'un simplexe à 3 dimensions.





Les quatre triangles (simplexes teintés en gris et en bleu), ainsi assemblés, forment un polyèdre à 2 dimensions. Nous avons utilisé la notation σ_i^n, n désignant la dimension des éléments (ainsi les sommets sont des points de dimension nulle, notés σ^0 ; les côtés des triangles sont notés σ^1 ; les triangles eux-mêmes σ^2).

— On appelle *chaîne à n dimensions* d'un polyèdre toute combinaison linéaire des simplexes du polyèdre considéré. Par exemple la combinaison :

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 \qquad (2)$$

des simplexes (triangles) constituant le polyèdre de la figure précédente est une chaîne à 2 dimensions (puisque, pour un triangle, $n = 2$). Si l'on distingue entre deux simplexes orientés σ^- et σ^+, on identifie le simplexe σ^- au simplexe σ^+ précédé du coefficient -1.

● *Notion de bord.* Oublions les représentations géométriques concrètes, et considérons $(n+1)$ points $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ définissant un simplexe σ à n dimensions. D'après ce qui a été expliqué plus haut, on obtient les faces de ce simplexe en écrivant tous les sommets moins un de σ. Ainsi, en supprimant le sommet a_0 on obtient la face $(a_1, a_2, ..., a_n)$ qui est elle-même un simplexe à $(n-1)$ dimensions (une dimension de moins que σ). Les autres faces de σ sont :

$(a_0, a_1, ..., a_n)$ (en enlevant a_1) ;
$(a_0, a_1, a_3, ..., a_n)$ (en enlevant a_2) ;
etc.
$(a_0, a_1, a_2, ..., \hat{a}_i ... a_n)$ (en enlevant a_i) ;
etc.
$(a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ (en enlevant a_n).

Le symbole $\hat{a}_i$ désigne le sommet supprimé.

— On appelle *bord* $\partial\sigma$ du simplexe à n dimensions σ la chaîne à $(n-1)$ dimensions de ses faces munies du coefficient 1 ou -1 :

$$\partial\sigma = (a_1, a_2, ..., a_n) + (-1)^i (a_0, a_1, ..., \hat{a}_i, ..., a_n) + ... + (-1)^n (a_0, a_1, ..., a_{n-1}) . \quad (3)$$

L'introduction du coefficient ± 1 est liée à la convention $\sigma^- = (-1)\sigma^+$. Si on ne distingue pas entre σ^- et σ^+, on évite les coefficients -1, ce qui rend le calcul plus simple, comme on va le voir sur l'exemple ci-dessous.

— Reprenons le polyèdre à 2 dimensions de la figure déjà proposée plus haut. Il est composé de simplexes à deux dimensions σ_i^2 $(i = 1, 2, 3, 4)$, à savoir de triangles. Les faces de chaque simplexe sont des simplexes à 1 dimension σ_j^1 $(j = 1, 2, ..., 8)$. Considérons la chaîne à 2 dimensions

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

qui a pour image les deux triangles bleus accolés (l'un clair et l'autre foncé). Les sommets de σ_1^2 sont $(\sigma_1^0, \sigma_2^0, \sigma_3^0)$ et ceux de σ_2^2 sont $(\sigma_2^0, \sigma_3^0, \sigma_4^0)$; les faces de ces deux simplexes sont les côtés σ_1^1, σ_2^1, σ_3^1, σ_4^1 et σ_5^1 des triangles. Le bord de la chaîne $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ est la chaîne à 1 dimension des faces en question. Si l'on oriente les triangles, on utilise la règle (3) ci-dessus. On peut aussi renoncer à cette orientation et additionner les faces modulo 2 (ce qui revient à supprimer toute face qui figure 2 fois) ; on a alors :

$$\partial(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) = (\sigma_1^1 + \sigma_2^1 + \sigma_3^1) + (\sigma_2^1 + \sigma_4^1 + \sigma_5^1) . \quad (4)$$

L'addition modulo 2 donne :

$$\partial(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) = \sigma_1^1 + \sigma_3^1 + \sigma_4^1 + \sigma_5^1 , \quad (5)$$

ce qui est la définition classique du bord d'un polygone en géométrie élémentaire.

● *Notion de cycle.* Si le bord d'une chaîne à n dimensions est 0, la chaîne est appelée un *cycle* à n dimensions. Considérons, par exemple, le bord de la chaîne $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ donné par l'équation (5) : ce bord n'est autre que le périmètre du polygone à 4 sommets σ_1^0, σ_2^0, σ_3^0, σ_4^0. Calculons le bord du bord de la chaîne, soit $\partial(\sigma_1^1 + \sigma_3^1 + \sigma_4^1 + \sigma_5^1)$. Pour cela, il faut faire l'addition modulo des faces de chaque simplexe σ^1 ; or les faces d'un segment (1 dimension) sont les points (0 dimension) limitant ce segment ; on a donc :

$$\partial(\sigma_1^1 + \sigma_3^1 + \sigma_4^1 + \sigma_5^1) = (\sigma_1^0 + \sigma_2^0) + (\sigma_1^0 + \sigma_3^0) + (\sigma_2^0 + \sigma_4^0) + (\sigma_2^0 + \sigma_4^0) + (\sigma_3^0 + \sigma_4^0) . \quad (6)$$

On constate que chaque sommet est répété deux fois, donc

$$\partial(\sigma_1^1 + \sigma_3^1 + \sigma_4^1 + \sigma_5^1) = 0 . \quad (7)$$

Le bord de la chaîne $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ est donc un cycle à 1 dimension.

Plus généralement, un cycle à n dimensions est une chaîne à n dimensions dont la valeur est 0. Lorsqu'un cycle Z est un bord pour un complexe K, on dit que « *Z est homologue à zéro sur K* », et on écrit cette relation sous la forme :

$$Z \sim 0 \text{ sur } K , \quad (8)$$

relation qui a été appelée par Poincaré *relation d'homologie*, ou, plus brièvement, une homologie.

● *Nombre de Betti.* Soit un polyèdre K à n dimensions ; on peut y définir le *groupe des bords* et le *groupe des cycles.* Le quotient du groupe des cycles par le groupe des bords est un groupe appelé *groupe d'homologie.* C'est un groupe commutatif, somme d'un certain nombre de groupes monogènes libres : ce nombre a été appelé par Poincaré *n-ième nombre de Betti du polyèdre K* (en hommage au mathématicien italien Betti).

PRINCIPAUX ASPECTS DE LA TOPOLOGIE.

La topologie est une branche très générale des mathématiques, qui sert non seulement à résoudre certains problèmes inabordables ou difficilement abordables par les méthodes usuelles de la géométrie et de l'analyse (par exemple le problème du coloriage d'une carte, les problèmes de réseaux, etc.), mais qui généralise d'une manière très abstraite et très fructueuse des théories mathématiques très diverses. Il est impossible, dans le cadre de cet ouvrage, de résumer tous les aspects de la topologie ; nous en soulignerons simplement les plus importants.

La topologie générale.

Espaces topologiques.

● *Définition.* On appelle *espace topologique* tout couple $(E, \mathbb{O})$, E étant un ensemble et $\mathbb{O}$ un ensemble de parties de E appelées des *ouverts*, satisfaisant aux quatre axiomes :

— $\mathbf{O}_1$: l'ensemble vide $\varnothing$ est un ouvert ;
— $\mathbf{O}_2$: l'ensemble E est un ouvert ;
— $\mathbf{O}_3$: toute réunion, finie ou non, d'ouverts est un ouvert ;
— $\mathbf{O}_4$: toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

On dit encore qu'on a défini une *topologie* sur E, ou qu'on a muni E d'une topologie.

Page 129, nous avons vu que l'ensemble $\mathbb{R}$ (la droite réelle) et l'ensemble $\mathbb{O}$ des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ définissent une topologie. De même on peut munir d'une structure topologique le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ en considérant les pavés ouverts de ce plan. Bien entendu, tout ensemble E peut être muni d'une topologie, quelle que soit sa nature, à partir du moment où l'on y définit l'ensemble $\mathbb{O}$ des ouverts, qui caractérise la structure topologique de l'espace en cause.

En général, on peut définir plusieurs topologies sur un ensemble : tout dépend de la définition de l'ensemble $\mathbb{O}$ choisie.

1 - Si l'on pose : $\mathbb{O}$ = ensemble de toutes les parties de E, c'est-à-dire si l'on *décide* d'appeler « ouvert » toute partie de E, la topologie ainsi définie est dite *discrète*. C'est celle qui comporte le plus grand nombre possible d'ouverts.

2 - Si l'on pose : $\mathbb{O} = \{\varnothing, E\}$, c'est-à-dire si l'on décide de n'appeler « ouvert » que l'ensemble vide et l'ensemble tout entier, la topologie est dite *grossière* ; c'est celle qui comporte le moins d'ouverts possible.

3 - Les topologies les plus fructueuses sont celles qui ne sont ni discrètes, ni grossières.

● *Concepts topologiques.* Dans un espace topologique $(E, \mathbb{O})$ on peut définir un certain nombre de concepts qui traduisent les propriétés topologiques de cet espace, notamment :

— le *voisinage* V d'un point $x \in E$;
— l'ensemble $V(x)$ des voisinages V de x ;
— ce qu'est un *point d'accumulation*, un *point isolé*, un *point adhérent* ;
— la *fermeture* et l'*intérieur* d'un ensemble ;
— la *frontière* d'un ensemble ;
— ce qu'est un ensemble *dense*, *non dense* ou *partout dense* ;
— la *connexité*.

Si l'ensemble E est la droite réelle $\mathbb{R}$ ou le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, ces concepts, dont la définition est rigoureuse à partir du moment où l'on a muni $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ d'une topologie, peuvent être traduits par des images géométriques.

● *Fonctions continues.* La continuité d'une fonction $y = f(x)$, x et y étant des éléments de deux ensembles X et Y, ne peut être définie que si X et Y sont munis d'une topologie (nécessaire pour parler de *voisinages*).

— L'application $X \xrightarrow{f} Y$ est *continue* en $x_0 \in X$ si à tout voisinage V de $f(x_0)$ il correspond un voisinage v de x_0 dont l'image par f soit V. Si elle est continue pour tout $x \in X$, elle est dite *continue sur* X.

— Si deux espaces topologiques X et Y peuvent être mis en correspondance par une bijection (voir p. 21) continue, ils sont dits *homéomorphes*, ou encore isomorphes topologiquement. Nous avons rencontré des exemples d'homéomorphie p. 130.

● *Concept de connexité.* L'idée intuitive de connexité est banale : elle correspond au fait qu'un ensemble est en un seul « morceau » et non en plusieurs. Par exemple une feuille de papier est une surface en un seul morceau : nous disons qu'elle est *connexe* ; mais la surface formée par un ensemble de 2 feuilles séparées n'est pas connexe. De même, considérons les deux fonctions d'une variable réelle x :

$$y = 3x ; \qquad y = \frac{1}{x} .$$

Nous avons vu, en analyse, que l'image de la première est une ligne droite passant par l'origine des axes de coordonnées, et que l'image de la seconde est une hyperbole équilatère, dont l'une des branches est dans l'angle xOy et l'autre dans l'angle $x'Oy'$. L'ensemble des points représentatifs de la fonction $y = 3x$ est connexe (en un seul « morceau », à savoir la droite $y = 3x$) ; l'ensemble des points représentatifs de la fonction $y = 1/x$ est en deux « morceaux », (les deux branches de l'hyperbole) : il n'est pas connexe.

— Pour définir la connexité d'un ensemble E, commençons par le munir d'une topologie, c'est-à-dire par y définir des ouverts (et, respectivement, des fermés) respectant les quatre axiomes $\mathbf{O}_1$, $\mathbf{O}_2$, $\mathbf{O}_3$ et $\mathbf{O}_4$ déjà énoncés. On peut alors définir ainsi un espace connexe :

un espace topologique E est connexe s'il n'existe aucune partition de E en deux ouverts non vides (ou, ce qui revient au même, en deux fermés non vides). Cette définition est équivalente à la suivante : un espace topologique E est connexe si les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées sont E et $\varnothing$.

— Prenons quelques exemples.

1 - L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est connexe.

2 - Tout intervalle (ouvert ou fermé) de $\mathbb{R}$ est connexe.

3 - Toute partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un intervalle n'est pas connexe. En effet, si A n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$, il existe alors deux points $x, y \in A$, tels que $[x, y] \not\subset A$; donc il existe un point a appartenant à l'intervalle $[x, y]$ et n'appartenant pas à A. On peut donc partager l'ensemble A en deux ensembles non vides $A \cap]\leftarrow, a[$ et $A \cap]a, \rightarrow[$. Ces deux ensembles sont ouverts dans A et constituent une partition de A : donc A n'est pas connexe.

4 - L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$: donc $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe.

Il existe de nombreuses propriétés des espaces topologiques que nous ne pouvons exposer ici, tel le fait d'être *compact*, ou encore le fait de posséder, en outre, une structure algébrique (groupe, anneau, corps, espace vectoriel), dans ce dernier cas, on dit qu'il s'agit d'un groupe topologique, d'un anneau topologique, etc.

Les fonctions numériques.

Toute application d'un ensemble E dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est appelée une *fonction numérique sur E*. Les propriétés de ces fonctions sont liées aux propriétés de $\mathbb{R}$, et en particulier à ses propriétés topologiques ; nous les avons déjà rencontrées en analyse, mais il est très séduisant de les aborder par la voie de la topologie générale. On peut ainsi retrouver d'une manière plus rigoureuse les notions de fonction monotone, de fonction connexe, de fonction continue et de dérivabilité, etc.

Topologie algébrique.

Le point de départ de la topologie algébrique est l'étude des propriétés topologiques de certaines surfaces introduites par Riemann pour : représenter les fonctions d'une variable complexe (surfaces de Riemann) et d'autres figures du même genre appelées *variétés*. On a commencé (Poincaré) par décrire ces propriétés à l'aide de la topologie combinatoire et notamment de la notion d'homologie (voir ci-contre p. 130) ; puis — à partir des années 1920 — on a traité ces problèmes d'une manière algébrique, d'où l'expression *topologie algébrique* pour désigner cette branche de la topologie.

Il est impossible de présenter l'ensemble des théories topologiques algébriques d'une manière succincte. Les quelques remarques historiques faites pp. 128-129 éclairent le lecteur sur les domaines abordés. Pour les détails, il faut avoir le courage de se plonger dans les traités spécialisés, comme celui de W.S. Massey (édité par Harcourt, Brace et World, en 1967) ou les *Lectures on Algebraic Topology* de M.J. Greenberg (Benjamin, 1967), auxquels nous renvoyons le lecteur.



On peut, certes, appliquer les résultats fondamentaux du calcul des probabilités aux paris des joueurs ; mais la « doctrine des chances », comme on la nommait au XVIIIe siècle, est une théorie très abstraite reliée aux aspects les plus délicats de l'analyse ou de la théorie des ensembles.

CALCUL DES PROBABILITÉS

RAPPEL HISTORIQUE.

Le calcul des probabilités remonte aux travaux de Cardan, Pascal, Fermat et Huygens, qui élaborèrent les concepts de probabilité mathématique d'un événement et d'espérance mathématique. La théorie des probabilités fut construite, sur ces bases, par Jacques Bernoulli (1705), Abraham de Moivre (1718) et par Laplace (1812). L'importance de la statistique, mise en valeur par les physiciens du XIXe siècle (notamment par Boltzmann, créateur de la physique statistique) ont conduit les mathématiciens à aborder les descriptions probabilistes à l'aide d'outils mathématiques hautement abstraits, comme la *théorie de la mesure* de Lebesgue ou la notion de *fonction caractéristique* (P. Lévy). L'axiomatisation de la théorie des probabilités a été l'œuvre de Kolmogorov (1933). Voici quelques points de repère historiques.

Dates	Événements
XIIe siècle	Apparition du mot « hasart » dans la langue française commune ; emprunté à l'espagnol *azar*, lui-même issu de l'arabe *az-zār* = « dé à jouer ». Le jeu de dés, répandu dans le monde grec puis romain, disparut en Occident après les grandes invasions. Il fut réintroduit en France par les Croisés, sous le règne de Saint-Louis.
Fin XVIe siècle	*De ludo aleae* (*Du jeu de hasard*), traité posthume de Cardan, qui calcule la probabilité de divers coups (Cardan était un joueur de dés passionné).
1654	Correspondance entre Pascal et Fermat : établissement des notions de base concernant le « calcul des chances » (probabilités simples, probabilités composées, espérance mathématique), en rapport avec l'analyse combinatoire.
1657	Huygens : traité *De ratiociniis in ludo aleae* (*Des raisonnements dans le jeu de dés*), contenant la formulation du concept d'espérance mathématique : si, parmi N cas ayant tous la même chance de se produire, un joueur peut gagner a dans n de ces cas, et b dans les autres, son espérance mathématique de gain a pour valeur : $$E = \frac{na + (N-n)\,b}{N}.$$
1705	Jacques Bernoulli écrit son *Ars conjectandi* (*Art de la conjecture*), qui paraîtra posthume, en 1713.
1708	P. R. de Montmort : *Essay d'analyse sur les jeux de hasard.*
1713	Publication de l'*Ars conjectandi* de Bernoulli, qui contient notamment la fameuse *loi des grands nombres* concernant la répétition d'un très grand nombre d'épreuves semblables.
1718	A. de Moivre : *Doctrine of chances* (*La doctrine des chances*) : énoncé de la règle des probabilités composées.
1738	Daniel Bernoulli (neveu de Jacques) étudie le problème connu sous le nom de « paradoxe de Saint-Pétersbourg » : deux joueurs A et B jouent à pile ou face ; si face est tiré au premier coup, A donne 1 franc à B ; ... si face est tiré au n-ième coup, A donne 2^{n-1} francs à B ; quelle est l'espérance mathématique de B ? L'application des règles de calcul des probabilités montre que cette grandeur devrait être infinie, ce qui est en contradiction avec le « bon sens ». C'est cette conclusion paradoxale qu'explique D. Bernoulli.
1733	Buffon introduit le calcul intégral dans le calcul des probabilités (« problème de l'aiguille »).
1763	Thomas Bayes : détermination de la probabilité des causes à partir des effets observés.
1771-1818	Mémoires de Laplace sur le calcul des probabilités ; sa théorie générale est développée dans la *Théorie analytique des probabilités* (1812).
1809-1823	Mémoires de Gauss sur la distribution des probabilités, la théorie des erreurs, etc.
1837	Poisson : formulation de la « loi des grands nombres » (formule de Poisson).
1846	Bravais : notion de corrélation (la théorie de la corrélation sera faite ultérieurement par Pearson).
1851	G. Boole : étude de la probabilité des causes (problème de Buyes).
1887	Čebyšev : démonstration rigoureuse des lois de Laplace (théorie des erreurs).
1903	K. Pearson : théorie de la corrélation.
1908	E. Borel : *Les probabilités dénombrables et leur application.*
1912	Markov : généralisation de la démonstration de Čebyšev.
1920-1925	Travaux de Fischer (tests statistiques) ; théorie de l'estimation.
1933	Kolmogorov : axiomatisation du calcul des probabilités.
1935-1937	P. Lévy : emploi de la *fonction caractéristique* d'une loi de probabilité.

NOTIONS SUR LA THÉORIE DES PROBABILITÉS.

Concepts fondamentaux.

Probabilité d'un événement.

● *Définition.*

— Un événement *aléatoire* est un événement qui ne peut être prévu ; on dit aussi qu'il est dû au *hasard*.

— La *probabilité d'un événement* est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure son caractère aléatoire : c'est le rapport du nombre de cas favorables (apparition de l'événement) au nombre total des cas possibles, *à condition que* tous les cas soient considérés comme *également probables*. Poincaré notait que « la vérification de la réalisation de cette dernière condition est laissée au bon sens ». Ainsi : probabilité de tirer *pile* au jeu de *pile ou face* : $p = 1/2$ (1 cas favorable, 2 cas possibles) ; probabilité de tirer le *cinq* avec un dé : $p = 1/6$ (1 cas favorable, 6 cas possibles). Événement *impossible* : $p = 0$; événement *certain* : $p = 1$.

— La *probabilité complémentaire* d'un événement A est la probabilité de voir apparaître l'événement contradictoire A'. Si $p = n/N$ est la probabilité de A, celle de A' est

$$q = 1 - p = \frac{N - n}{N}. \qquad (1)$$

Dans le cas de *pile ou face* :

$$p = q = \frac{1}{2} \text{ pour } \textit{pile} \text{ et pour } \textit{face}. \qquad (2)$$

— *Remarque* : Le calcul de n (nombre de cas favorables) et de N (nombre de cas possibles égale-

ment probables) exige souvent que l'on utilise les formules de dénombrement données pp. 33-36 et que nous conseillons au lecteur de revoir.

— *Notation* : la probabilité d'un événement E se note $Pr(E)$; c'est un nombre p compris entre 0 et 1 :

$$Pr(E) = p .$$

● *Théorèmes fondamentaux.*

— *Théorème des probabilités totales* : Si deux événements, A et B, de probabilités respectives $Pr(A)$ et $Pr(B)$ sont *exclusifs* l'un de l'autre (c'est-à-dire si l'occurrence « A et B » est impossible), la probabilité pour que l'un d'eux se produise est la somme des probabilités de chacun d'eux :

$$Pr(A \textbf{ ou } B) = Pr(A) + Pr(B) . \quad (3)$$

— *Théorème des probabilités composées* : Si deux événements A et B sont *indépendants*, la probabilité pour qu'ils se produisent tous les deux est :

$$Pr(A \textbf{ et } B) = Pr(A) \times Pr(B) . \quad (4)$$

● *Exemples.*

— *Probabilité pour tirer au hasard une boule rouge* **ou** *une boule noire d'un sac comprenant* 5 *boules rouges et* 15 *boules noires.*

$$Pr \text{ (boule rouge)} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \text{ ; } Pr \text{ (boule noire)} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \text{ ;}$$

donc :

$$Pr \text{ (boule rouge \textbf{ou} boule noire)} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 = \text{ certitude} . \quad (5)$$

(Ce résultat est évident : comme il n'y a que des boules rouges et des boules noires dans le sac, la boule tirée sera, ou rouge, ou noire).

— Sac *ternaire* comprenant 5 boules rouges, 15 noires et 15 blanches, soit, au total, 35 boules. *On demande Pr* (*boule rouge* **ou** *boule noire*).

L'événement « tirer une boule rouge » et l'événement « tirer une boule noire » sont *exclusifs* ; on peut alors appliquer le théorème des *probabilités totales* :

$$Pr \text{ (boule rouge)} = \frac{1}{7}, \quad Pr \text{ (boule noire)} = \frac{3}{7} \text{ ;}$$

donc :

$$Pr \text{ (boule rouge \textbf{ou} boule noire)} = \frac{4}{7} = 0{,}571\,4... \quad (6)$$

— *Probabilité de tirer deux fois de suite un numéro* (*par exemple le* 17) *à la roulette.*

Les deux événements sont *indépendants*, un coup de roulette n'ayant pas de rapport avec le coup précédent. On peut alors appliquer le théorème des *probabilités composées.* Comme il y a 37 numéros à la roulette, la probabilité de tirer le 17 est $p = 1/37$; la probabilité de tirer deux fois le 17 est :

$$Pr \text{ (17 \textbf{et} 17)} = p \times p = p^2 = \frac{1}{1369} . \quad (7)$$

La probabilité de réussir une passe de trois (trois fois de suite le 17) serait $p^3 = 1/50\,653$ (un peu moins de 2/100 000).

— *Probabilité de faire* 421 *avec trois dés.*

La probabilité de tirer l'une quelconque des faces d'un dé est $p = 1/6$. On peut faire 421 de six façons différentes.

1er dé	4	2	1	4	1	2
2e dé	2	1	4	1	2	4
3e dé	1	4	2	2	4	1
Probabilité de la combinaison	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6

Calculons p_1 ; la série : « 4 avec le 1er dé », « 2 avec le 2e dé », « 1 avec le 3e dé » est une suite de trois événements *indépendants*, qui ont chacun la probabilité $p = 1/6$; donc :

$$p_1 = p^3 = \frac{1}{216} .$$

De même :

$$p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{216} . \quad (8)$$

D'autre part, chaque combinaison exclut les autres (si l'on fait 421, dans cet ordre, on ne fait pas 214, etc.) ; on peut donc appliquer le théorème des *probabilités totales*, puisque « 421 » peut être fait de six manières :

$$p (\text{« 421 »}) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{6}{216} = \frac{1}{36} . \quad (9)$$

Variable aléatoire unidimensionnelle.

Considérons un ensemble dont chaque élément peut être affecté d'un nombre, ce nombre étant déterminé par le hasard : chaque élément X est appelé une *variable aléatoire*. Une variable aléatoire est dite *continue* si elle peut prendre toutes les valeurs réelles d'un intervalle donné ; elle est *discrète* dans le cas contraire.

● *Loi de probabilité et fonction de répartition.*

— On appelle *loi de probabilité* d'une variable aléatoire X toute relation permettant de déterminer la probabilité que la variable X prenne une valeur donnée quelconque, ou une valeur appartenant à un ensemble donné de valeurs.

— La probabilité $Pr(X < x)$ que la variable aléatoire X soit inférieure à x est appelée *fonction de répartition* de la variable ; on l'écrit $F(x)$.

$$F(x) = Pr(X < x) . \quad (10)$$

S'il s'agit d'une variable aléatoire discrète susceptible de prendre les valeurs $x_1, x_2, ..., x_k$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, ..., p_k$, on a :

$$F(x_i) = Pr(X < x_i) = p_1 + p_2 + \cdots + p_{i-1} . \quad (11)$$

— La dérivée $f(x)$ de la fonction de répartition $F(x)$ est appelée *densité de probabilité* :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} . \quad (12)$$

$f(x)\,dx$ est la *probabilité élémentaire* associée à dx telle que $x < X < x + dx$; on a évidemment :

$$\int f(x)\,dx = 1 \quad (13)$$

— Le nombre x_p tel que :

$$Pr(X < x_p) \leqslant p \leqslant Pr(X \leqslant x_p) \quad (0 < p < 1) \quad (14)$$

est appelé *fractile d'ordre p*. Le fractile d'ordre 0,5 est appelé *valeur équiprobable* ou *médiane.*

— On appelle *valeur dominante* ou *mode* d'une variable aléatoire toute valeur pour laquelle la probabilité (ou la densité de probabilité si la variable est continue) a une valeur maximale. S'il y a un seul mode, la loi de probabilité est dite *unimodale* ; s'il y a deux modes, elle est *bimodale* ; s'il y a plusieurs modes elle est *plurimodale.*

● *Espérance mathématique.*

— Pour une variable discrète X, dont les valeurs $x_1, x_2, ..., x_k$ sont affectées des probabilités $p_1, p_2, ..., p_k$, l'espérance mathématique $E(X)$ est donnée par :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_k x_k = \sum_i p_i x_i . \quad (15)$$

— Pour une variable continue, l'espérance mathématique est définie par :

$$E(X) = \int x f(x)\,dx , \quad (16)$$

l'intégrale étant prise sur tout le domaine de variation de X.

— Si $E(X) = 0$, la variable aléatoire est dite *centrée.* Si la variable X a pour espérance mathématique m, la variable centrée correspondante est $X - m$.

— Exemples simples (variables discrètes).

1 - Soit une loterie comprenant 1 000 billets et les lots suivants :

1 lot $x_1 = 10\,000$ F, 4 lots $x_2 = 750$ F, 5 lots $x_3 = 100$ F.

A ces lots correspondent les probabilités suivantes :

$$p_1 = \frac{1}{1\,000}, \quad p_2 = \frac{4}{1\,000}, \quad p_3 = \frac{5}{1\,000} ; \quad (17)$$

l'espérance mathématique totale pour la série considérée est :

$$E = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 10 + 3 + 0{,}5 = 13{,}5 \text{ (francs)} .$$

Remarque : le total des lots vaut $10\,000 + 3\,000 + 500 = 13\,500$ F ; chaque billet peut donc rapporter, *en moyenne*, $13\,500/1\,000 = 13{,}5$ F : on retrouve E.

2 - Un jeu est dit *équitable*, mathématiquement, si $E = 0$. Ainsi, à *pile ou face*, avec un enjeu unitaire de x francs, l'espérance mathématique de gain, pour un joueur qui choisit *pile*, est $e_1 = x/2 (p = 1/2)$; son espérance mathématique de perte est $e_2 = -x/2$ (perte = gain négatif). L'espérance mathématique totale est $E = e_1 + e_2 = 0$; le jeu est équitable.

● *Fonction caractéristique.* Soit X une variable aléatoire ; on appelle *fonction caractéristique* la fonction

$$\varphi(u) = E(e^{iux}) . \quad (18)$$

Pour une variable discrète, on a donc :

$$\varphi(u) = \sum_i e^{iux_j} p_i \quad (19)$$

et, pour une variable continue :

$$\varphi(u) = \int e^{iux} f(x)\,dx . \quad (20)$$

● *Moments.*

— On appelle *moment algébrique d'ordre q* le nombre m_q tel que :

$$m_q = E(X^q) \quad (21)$$

(pour $q = 1$, on pose $m_1 = m$).

— On appelle *moment algébrique d'ordre q par rapport à une origine a* le nombre noté ${}_a m_q$, défini par :

$${}_a m_q = E[(X - a)^q] ; \quad (22)$$

si l'on prend $a = E(X)$, le moment ${}_a m_q$ est appelé *moment algébrique centré d'ordre q* et s'écrit μ_q :

$$\mu_q = E[(X - E(X))^q] . \quad (23)$$

— On parle de *moments absolus* lorsqu'on considère, dans les formules (21), (22) et (23) les valeurs absolues $|X^q|$, $|(X - a)^q|$ et $|[X - E(X)]^q|$.

● *Moyenne et écart-type.*

— La *moyenne* d'ordre q par rapport à une origine a est le nombre :

$$\sqrt[q]{{}_a m_q} = \sqrt[q]{E[(X - a)^q]} . \quad (24)$$

— L'*écart-moyen* d'ordre q est le nombre :

$$\sqrt[q]{E[|(X - a)^q|]} . \quad (25)$$

— La *variance* est le moment algébrique centré d'ordre 2 :

$$V(x) = \mu_2 = E[[X - E(X)]^2] . \quad (26)$$

— L'*écart-type* σ est la racine carrée de la variance :

$$\sigma = \sqrt{V(x)} . \quad (27)$$

— La variable *aléatoire réduite* correspondant à X est la variable :

$$\frac{X - m}{\sigma} , \quad (28)$$

m désignant l'espérance mathématique de X.

Lois de probabilité.

Épreuves répétées (variable discrète).

● *Nombre d'épreuves à tenter.*

Soit p la probabilité d'un événement aléatoire ; on démontre que :

— le nombre moyen d'épreuves qu'il faut tenter pour que l'événement apparaisse au moins une fois est $m = 1/p$;

— le nombre moyen d'épreuves qu'il faut tenter pour qu'il se réalise t fois est $m_t = t/p$;

— le nombre moyen d'épreuves qu'il faut tenter pour qu'il se réalise s fois consécutives est

$$M = \frac{1}{1 - p} \left(\frac{1}{p^s} - 1 \right) . \quad (1)$$

Ainsi, il faut jeter *en moyenne* 2 fois une pièce pour qu'elle tombe au moins une fois sur pile (cela ne veut pas dire qu'on est certain d'obtenir *pile* en deux coups, mais que, sur une série de 1 000 coups, par exemple, on obtiendra environ 500 fois *pile*, soit une *moyenne de succès* qui tend vers 2 quand on augmente indéfiniment le nombre de coups).

Pour faire une série de 10 *pile*, il faut jeter, *en moyenne*, $M = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{\frac{1}{2^{10}}} - 1 \right) = 2\,045$ fois une pièce en l'air (même remarque que ci-dessus).

● *Probabilité d'apparition d'un événement.*

— Soit p la probabilité de cet événement ; si l'on tente une série de N épreuves, quelle est la probabilité z pour que cet événement apparaisse au moins une fois ? On montre que l'on a :

$$z = 1 - (1 - p)^N \quad (2)$$

(si $N = 1$, on obtient, naturellement, $z = p$).

Inversement, pour qu'un événement de probabilité p ait la probabilité z ($\neq p$) d'apparaître au moins une fois, il faut faire :

$$N = \frac{\lg(1 - z)}{\lg(1 - p)} \text{ épreuves} . \quad (3)$$

— Voici un début de table donnant N quand on connaît p et z :

z \ p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
$\frac{1}{10}$				1	11
$\frac{1}{4}$		1	2	3	29
$\frac{1}{2}$	1	3	4	7	69
$\frac{3}{4}$	2	5	8	13	138
0,9	4	8	13	22	230
0,95	5	11	17	29	299
0,99	7	16	26	44	459
0,999	10	24	38	66	688

Par exemple, si l'on veut avoir 99 chances sur 100 ($z = 0{,}99$) de tirer un as en jetant un dé ($p_{as} = 1/6$), il faut jeter le dé 26 fois. De même, en jetant 10 fois de suite une pièce de monnaie en l'air, on a 999 chances sur 1 000 ($z = 0{,}999$) qu'elle tombe au moins une fois sur *pile*.

● *Nombre moyen d'apparitions d'un événement de probabilité p.*

— Si l'on fait un très grand nombre de séries de N épreuves, l'événement apparaît, en moyenne $\mathcal{M}$ fois, avec $\mathcal{M} = Np$.

Ainsi, si l'on jette 1 000 fois une pièce de monnaie en l'air et si l'on répète un très grand nombre de fois cette expérience, on obtiendra tantôt un peu moins de 500 fois *pile*, tantôt un peu plus de 500 fois *pile*, mais, *en moyenne*, on obtiendra $Np = 1\,000 \times 1/2 = 500$ fois *pile*.

● Dans une suite de *K fois N épreuves* (K étant très grand), un événement de probabilité p peut apparaître, sur N épreuves : 0, 1, 2, ..., $(N-1)$, N fois. Mais les nombres d'apparitions n'ont pas tous la même probabilité de réalisation. Ainsi, si l'on jette $N = 600$ fois un dé, et qu'on recommence plusieurs fois ces 600 jets, il se peut que, dans une expérience, on ne tire pas un seul as, ou une seule fois un as sur 600 jets, mais cette circonstance a très peu de chances d'être observée. Le *nombre le plus probable* d'apparitions de l'as sera de 100 fois sur 600 jets. Plus généralement, le nombre le plus probable d'apparitions d'un événement est $n = Np$, si Np est un entier ; si Np n'est pas un entier, on forme la somme $Np + p$, et alors :

● ou bien $(Np + p)$ est un entier, et il y a deux nombres d'apparitions également probables : $n = Np + p$ et $n' = Np + p - 1$;

● ou bien $(Np + p)$ n'est pas un entier, et l'on prend l'entier immédiatement inférieur à $Np + p$ si $p < 1/2$, l'entier immédiatement supérieur si $p > 1/2$.

— La probabilité pour qu'il y ait n apparitions de l'événement en question est :

$$\mathcal{P}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi Np(1-p)}} . \qquad (4)$$

Lorsque $p = (1-p)$, comme dans le jeu de *pile ou face*, on a :

$$\mathcal{P}_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} . \qquad (5)$$

Loi de Laplace-Gauss (= loi normale).

Soit X une variable aléatoire continue et soit x un nombre réel quelconque, la probabilité pour que X soit inférieur à x est la fonction de répartition $F(x)$ définie ci-dessus. On peut déterminer cette fonction à partir de sa dérivée $f(x)$, c'est-à-dire de la densité de probabilité. Laplace et Gauss ont étudié le cas où cette fonction est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right] , \qquad (6)$$

dans laquelle m est l'espérance mathématique ou *moyenne* de la distribution et σ l'écart-type (voir définition p. 133).

Si l'on effectue le changement de variable :

$$u = \frac{x-m}{\sigma} , \qquad (7)$$

la loi de Laplace-Gauss s'écrit :

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \qquad (8)$$

avec $-\infty < u < +\infty$: c'est la *loi normale réduite*.



Un bon joueur de bridge n'a pas besoin d'être mathématicien, mais il se sert des résultats des calculs faits par des mathématiciens probabilistes. Voici un exemple simple : vous disposez, avec votre partenaire, supposé mort, de 8 cartes dans une couleur ; vos adversaires possèdent donc, à eux deux, 5 cartes, qui peuvent être réparties 3-2, 4-1 ou 5-0. Ces trois répartitions ont respectivement pour fréquence d'apparition théorique : 68 %, 28 % et 4 %.

Ph. Jeanbor © Photeb/T.

Loi binomiale et loi de Poisson.

● *La loi binomiale* donne la probabilité $Pr(X = x)$ pour que la variable aléatoire discrète X prenne la valeur x, x étant égal à 0, 1, 2, ..., n :

$$Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} , \qquad (9)$$

$\binom{n}{x}$ étant le nombre de combinaisons de n éléments pris x à x, soit (voir p. 34) :

$$\binom{x}{n} = \frac{n!}{x!(n-x)!} . \qquad (10)$$

Lorsque, dans une suite de n épreuves indépendantes, la probabilité d'un événement E est constante et égale à p pour chaque épreuve, la probabilité pour que cet événement se produise x fois au cours de ces n épreuves est donnée par la loi binomiale (voir pp. 133-134).

● *Loi de Poisson.* Soit m l'espérance mathématique de la variable X, on a aussi, pour $x = 0, 1, 2, \ldots$:

$$Pr(X = x) = e^{-m}\frac{m^x}{x!} . \qquad (11)$$

Ce résultat constitue la *loi de Poisson*.

Autres lois de probabilité.

● *Loi hypergéométrique.* C'est la loi :

$$Pr(X = x) = \frac{\binom{d}{x}\binom{N-d}{n-x}}{\binom{N}{n}} , \qquad (12)$$

dans laquelle x est la valeur (entière) de X ($x = 0, 1, 2, \ldots$), N l'effectif de la population étudiée, d une partie de N possédant un caractère particulier, et n l'effectif d'un échantillon.

● *Loi log-laplacienne.* Elle concerne une variable continue X, variant de a à l'infini :

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x-a)-m}{5}\right)^2\right] \qquad (13)$$

● *Loi exponentielle* (pour une variable continue variant de 0 à $+\infty$) :

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} \quad (\lambda > 0) . \qquad (14)$$

Variables k-dimensionnelles.

Au lieu de caractériser les individus d'une population par une seule variable X, on peut leur affecter deux variables aléatoires (X, Y), trois, quatre, ..., k variables aléatoires. On peut alors définir une loi de probabilité k-dimensionnelle, une fonction de répartition k-dimensionnelle, etc. Les fonctions qui interviennent ici sont des fonctions de plusieurs variables réelles. Nous ne les étudierons pas ici.

ANNEXE « MATHÉMATIQUES »

LA NUMÉRATION GRECQUE.

Les Grecs ont connu et utilisé trois systèmes de numération :

1 - *Le système attique* est un système vulgaire, qui s'est prolongé jusqu'à l'époque hellénistique et romaine ; il est analogue au système romain, encore usité de nos jours (« Louis XIV », « Chapitre IV » ; « le XVIIIe siècle », etc.).

2 - Le système dit des *lettres numérales* apparaît dans les textes scientifiques au IVe siècle ; c'est le système savant, largement employé dans les textes scientifiques à partir du IIIe siècle.

3 - Archimède a perfectionné le système précédent et en a proposé l'utilisation dans un opuscule intitulé *L'arénaire*.

Système attique.

Les nombres sont notés à l'aide de lettres, initiales des noms de nombres en grec. Le système est de juxtaposition :

I = 1 ;
Π = 5 ;
Δ = 10 ;
H = 100 ;
X = 1 000 ;
M = 10 000 (une *myriade*).

Exemples :

13 = Δ I I I.
48 = Δ Δ Δ Δ Π I I I.
50 = $\boxed{\Delta}$ (5 fois 10).
500 = $\boxed{H}$ (5 fois 100).
1979 = M $\boxed{H}$ H H H H $\boxed{\Delta}$ Δ Δ Π I I I I.

On rencontre aussi Γ^{Δ} au lieu de $\boxed{\Delta}$; Γ^{H} pour 500 ; Γ^{X} pour 5 000 et Γ^{M} pour 50 000.

Numération savante.

Signes employés : les 24 lettres de l'alphabet grec classique, augmenté de trois lettres anciennes :

F (*digamma*) ϟ (*koppa*) σπ (*sampi* : σ + π)

Toutes ces lettres sont suivies de l'accent « ' » pour ne pas être confondues avec les lettres servant à écrire les mots. On a ainsi :

Unités	Dizaines	Centaines
$\alpha' = 1$	$\iota' = 10$	$\rho' = 100$
$\beta' = 2$	$\kappa' = 20$	$\sigma' = 200$
$\gamma' = 3$	$\lambda' = 30$	$\tau' = 300$
$\delta' = 4$	$\mu' = 40$	$\upsilon' = 400$
$\varepsilon' = 5$	$\nu' = 50$	$\varphi' = 500$
$F' = 6$	$\xi' = 60$	$\chi' = 600$
$\zeta' = 7$	$o' = 70$	$\psi' = 700$
$\eta' = 8$	$\pi' = 80$	$\omega' = 800$
$\theta' = 9$	ϟ' = 90	$\sigma\pi' = 900$

Pour les *milliers*, on utilise les lettres des unités simples en plaçant l'accent en bas et à gauche de la lettre : $,\alpha = 1\,000$, $,\beta = 2\,000$, etc. jusqu'à $,\theta = 9\,000$. Exemples :

$$\omega'\,\xi'\,F' = 800 + 60 + 6 = 866\,. \qquad (1)$$

$,\theta\,\sigma\pi'$ϟ'$\,\theta' = 9\,999$ (le plus grand nombre qu'on puisse écrire avec ce système).

Pour les nombres supérieurs à 10 000, divers systèmes ont été proposés, notamment celui d'Apollonius : la lettre M (initiale de *murias* = myriade = 10 000) placée *après* un nombre signifie que ce nombre représente des dizaines de milliers (des myriades). Exemple :

$$\omega'\,\xi'\,F'\,M = 866 \text{ myriades} = 8\,660\,000\,. \qquad (2)$$

Avec cette convention on peut écrire tous les nombres jusqu'à 100 millions (10^8), ce dernier étant exclu. Le plus grand nombre « représentable » est donc :

$,\theta\sigma\pi'$ϟ'$\,\theta'\,M\,,\theta\sigma\pi'$ϟ'$\,\theta' = 99\,999\,999\ (10^8 - 1)\,.$ (3)

Quant aux fractions, les Grecs les écrivaient différemment selon qu'il s'agissait de fractions dont le numérateur était égal à l'unité ou de fractions quelconques. Des nombres tels que 1/3, 1/4, etc., étaient représentés par les lettres désignant 3, 4, ... suivies d'un double accent : « '' » ; ainsi :

$$\gamma'' = \frac{1}{3}, \quad \varepsilon'' = \frac{1}{5}\,. \qquad (4)$$

Les fractions « ordinaires », comme 5/7 ou 29/13 s'écrivaient ainsi, à l'aide d'une « barre », ancêtre de notre « trait de fraction » introduit par les Arabes :

$$\varepsilon'\,\overline{\zeta'} \quad \kappa'\,\theta'\,\overline{\iota'\,\gamma'}\,. \qquad (5)$$

Système d'Archimède.

Les nombres inférieurs à 10^8 sont notés comme ci-dessus ; ils constituent ce qu'Archimède appelle les *nombres du premier ordre* ; pour les 10^8 nombres suivants (de 10^8 à 10^{16}), Archimède propose de les compter à nouveau 1, 2, 3, ..., mais en les nommant *nombres du deuxième ordre* (2 signifie donc, si l'on précise qu'il s'agit d'un nombre du deuxième ordre : 2 unités du deuxième ordre, soit 2 fois 10^8 ; et ainsi de suite, jusqu'à 10^8 unités du deuxième ordre, c'est-à-dire jusqu'au nombre 10^{16}). De même, les nombres de 10^{16} à 10^{24} sont les nombres du troisième ordre, etc... Il en ira ainsi jusqu'au cent millionième ordre, qui se termine au nombre $100\,000\,000^{100\,000\,000}$, soit 10^8 élevé lui-même à la puissance 10^8. On parvient ainsi à la fin de la *première période* (selon la terminologie d'Archimède). Ce dernier terme, soit $(100\,000\,000)^{10^8}$, devient alors l'unité de la *seconde période*, et ainsi de suite, sans qu'il soit nécessaire de s'arrêter. Pour fixer les idées : le dernier nombre du cent millionième ordre de la cent millionième période s'écrirait, dans notre numération décimale, avec 80 000 millions de millions de chiffres ; et il pourrait servir lui-même d'unité pour une autre série. Ainsi donc, en utilisant uniquement les 27 signes numériques cités plus haut, mais en leur assignant un ordre à l'intérieur d'une période (et, si l'on veut, une période à l'intérieur d'une « super-période » et ainsi de suite à l'infini), Archimède montrait qu'on pouvait écrire n'importe quel nombre, aussi grand fût-il, même si ce nombre devait être supérieur « non seulement au nombre de grains de sable capable de remplir toute la Terre, mais encore à la masse de sable égale en volume à tout l'Univers », déclare-t-il dans *L'arénaire* (ce titre est dérivé du titre latin de l'œuvre d'Archimède ; *arena* = « sable »).

LES MATHÉMATICIENS ARABES.

(Nous avons adopté, rappelons-le, les règles de translittération recommandées par l'*Organisation internationale de normalisation* ; on a indiqué entre parenthèses la transcription usuelle — mais incorrecte — de certains noms de savants dont les œuvres sont connues en Occident depuis le Moyen Age ; « b. » est une abréviation pour *ibn* et signifie « fils de ».)

Le IXe siècle.

● *Muḥammad b. Mūsā al-H̱ʷārizmī* (al-Khwarezmi ou al-Khwarizmi, ou Mohammed ben Mousa en Occident). Ce fondateur de la mathématique arabe a vécu à la fin du VIIIe siècle et au début du IXe siècle, à la cour du calife al-Maʾmūn, qui régna à Baġdād de 813 à 833, successeur de son père Hārūn ar-Rašīd (Haroun al-Rachid). On lui doit : 1° un manuel d'arithmétique (perdu et connu par une copie incomplète du XIIIe siècle) dans lequel il introduit le système indien de numération, ultérieurement qualifié improprement « arabe » ; 2° des tables trigonométriques donnant les sinus (traduites en latin par Adélard de Bath en 1126) ; 3° des tables astronomiques ; 4° des travaux géodésiques et géographiques ; 5° un traité d'algèbre qui est le grand monument de la mathématique arabe, composé vers 850, et dont le titre complet est : *al-Kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ǧabr wa-l-muqābala*, d'où provient le mot « algèbre » (*al-ǧabr*).

Dès le Xe siècle on appelle *al-ǧabriyyūn* ceux qui emploient la méthode de l'*al-ǧabr wa-l-muqābala*. L'œuvre est connue des Occidentaux par une traduction latine partielle de Robert de Chester (*Liber algebrae et almucabola*, 1145) puis de Gérard de Crémone (v. 1114-1187).

● *Muḥammad b. ʿĪsā Abū ʿAbd Allāh al-Māhānī* (v. 860). Géomètre et astronome de Mahan (actuellement Kermān, en Iran). Il a entrepris une critique de la théorie des proportions et montré que le problème archimédien de la division de la sphère (couper une sphère par un plan de sorte que le rapport des volumes des deux segments sphériques obtenus ait une valeur donnée) se ramenait à la résolution d'une équation de la forme $x^3 + r = px^2$ (« équation d'al-Māhānī »).

● *Ṯābit b. Qurra al-Harrānī* (v. 826-901). Astronome et mathématicien qui dirigeait une école de traducteurs (à partir du grec) à Baġdād ; il a lui-même traduit l'*Introduction à l'arithmétique* de Nicomaque. Ṯābit a été le plus grand mathématicien arabe du IXe siècle après al-H̱ʷārizmī ; on lui doit : la théorie des *nombres amiables* (couples de nombres dont chacun est égal à la somme des diviseurs de l'autre ; une méthode pour calculer l'aire d'un segment de parabole, qui annonce le calcul intégral ; d'importants travaux astronomiques (y compris une révision de la traduction de l'*Almageste* ptolémaïque).

● *Aḥmad b. Yūsuf* (?-v. 912). Géomètre égyptien, auteur d'un traité sur la théorie des proportions.

Le Xe siècle.

● *Abū Kāmil Šuǧāʿ* (fin IXe-début Xe). On ignore tout de la vie de ce mathématicien qui travailla au Caire et qui fut la plus grande figure mathématique du Xe siècle islamique (son *floruit* se situe aux environs de 900). Continuateur d'al-H̱ʷārizmī, Abū Kāmil a développé la théorie des équations du second degré et de la théorie des nombres, et traité de la solution intégrale d'équations indéterminées (« analyse diophantine »). Son influence sur les mathématiciens occidentaux a été très grande ; elle s'est exercée par l'intermédiaire de Leonardo Fibonacci (Léonard de Pise, v. 1175-apr. 1240), qui introduit le système de numération « arabe » en Occident, ainsi que les méthodes algébriques.

● *Sinān b. Ṯābit* († 943). Mathématicien, physicien et astronome de Baġdād.

● *ʿAlī b. Aḥmad al-ʿImrānī* († v. 955). Commentateur d'Abū Kāmil, à Mossoul ; il s'est surtout illustré comme astrologue.

● *Iḫwān aṣ-Ṣafā*. Ce terme, qu'on traduit habituellement par « Frères de la Pureté », désigne une secte scientifico-religieuse, plus ou moins réservée à des initiés, fondée dans le dernier quart du Xe siècle, et dont les auteurs ont rédigé 52 Épîtres (*risāla*) dont l'ensemble constitue une sorte d'encyclopédie.

● *Abūǧaʿfar al-Ḫāzin* († v. 965). Astronome et mathématicien de Hurasan (Khorassan), en Iran. A notamment résolu l'équation d'al-Māhānī.

● *Sahl ad-Dīn al-Kūhī* (v. l'an 1000). Mathématicien irano-arabe qui a étudié les équations d'un degré supérieur à 2.

● *Abūʾ l-Fatḥ* (vers l'an 980). Mathématicien et astronome d'Ispahan.

● *Abū l'-Wafāʾ al-Būzǧānī* (960-997 ou 998). Mathématicien de l'École de Baġdād, commentateur d'Euclide, de Diophante et d'al-H̱ʷārizmī, auteur d'un traité sur les constructions géométriques et de travaux trigonométriques (calcul de sinus à 10^{-8} près, à l'aide de méthodes d'interpolation).

● *Hamīd b. al-Ḫiḍr al-Ḫuǧandī* († v. 1000). Mathématicien qui s'est intéressé à la théorie des nombres : il a montré que la somme de deux cubes ne peut être un cube.

● *Maslama b. Aḥmad* († v. 1007). Mathématicien et astronome originaire de Madrid et établi à Cordoue.

Le XIe siècle.

● *Abū r-Rayḥān Muḥammad b. Aḥmad al-Bīrūnī* (973-1048, connu en Occident sous le nom d'al-Biruni ou al-Bireni). L'une des plus grandes figures de la science et de la pensée de l'Islam, d'origine iranienne (né à Kāṯ dans le H̱ʷārizm — le « Kharezm » des Occidentaux — au Sud de la mer d'Aral). Il passa la première partie de sa vie dans sa patrie et en divers lieux de l'Iran, puis il suivit le sultan ghaznawide (de Ġazna, ville de l'Afghanistan oriental) Maḥmūd b. Sebüktigin dans ses expéditions en Inde et à la cour de Ġazna, où il mourut. On lui doit des travaux originaux et nombreux dans tous les domaines scientifiques et anthropologiques ; il a échangé une importante correspondance avec Avicenne son cadet de sept ans. En mathématiques, on retiendra, parmi une quinzaine de titres, son traité intitulé *Kitāb at-tafhīm li-awāʾ il ṣināʿat at-tanǧīm*. Les questions qui l'ont plus spécialement intéressé concernent : la théorie des proportions, le calcul trigonométrique, la cinématique (notions de vitesse à un instant donné et d'accélération).

● *Les mathématiciens espagnols* sont cités ici pour mémoire : Ibn as-Samḥ, de Grenade (979?-1035) ; al-Karmānī, de Cordoue (v. 976-1066), introducteur des théories des Frères de la Pureté ; Ibn Abī r-Riǧāl (Abenragel des Occidentaux), de Cordoue/Tunis (v. 1020-1040) ; Ibn aṣ-Ṣoffār, de Cordoue († 1035) ; Yūsuf al-Muʾtamin, roi de Sarāgosse († 1085).

● *Abū l-Ḥasan Kūšyār b. Labbān al-Ǧīlī* (fin Xe-début XIe siècle ; connu en Occident sous le nom de Kushyar ben Labban). Mathématicien originaire du Sud de la Caspienne, auteur d'une introduction à l'arithmétique indienne (vers 1000).

● *ʿUmar Ḫayyām* (en Occident, connu sous le nom d'Omar Khayyam ; v. 1038-1123). Poète et mathématicien iranien ʿUmar Ḫayyām a travaillé à Boukhara et à Ispahan. On lui doit un traité d'algèbre (1074), dans lequel il développe la théorie des équations d'al-H̱ʷārizmī et propose une solution géométrique des équations du troisième degré ; des *Commentaires* sur les *Éléments* d'Euclide (1077), avec une généralisation abstraite de la notion de nombre ; divers travaux d'arithmétique, de géométrie et d'astronomie et notamment une réforme très précise du Calendrier (1075).

Le XIIe siècle et le XIIIe siècle.

Le XIIe siècle.

C'est un siècle important pour le développement de l'influence de l'Islam en Occident : les traductions de l'arabe en latin, ou de l'arabe en hébreu puis en latin se multiplient (Adélard de Bath, déjà nommé, Robert Chester, Gérard de Crémone, Jean de Séville, Ecole de Tolède, etc.). Les historiens séparent nettement, à cette époque, les savants d'Orient et ceux d'Occident (Afrique du Nord maghrébine, Espagne, Séville, Italie). Tous les grands mathématiciens arabes du XIIe siècle sont orientaux, notamment Muḥammad b. Aḥmad al-Ḫaraqī († 1138 ou 1139), ʿAbd al-Malik aš-Šīrāzī (v. 1180) ; et le géomètre Muḥammad b. al-Ḥusayn (v. 1190).

Le XIIIe siècle.

- *al-Muẓaffar b. Muzaffar aṭ-Ṭūsī* (al-Tousi ou et-Tousi des Occidentaux, † v. 1213). Inventeur de l'*astrolabe linéaire* ou « bâton d'al-Tousi ».

- *Ibn al-Bannā'al-Marrākušī* (1256-1321). Savant marocain (le seul mathématicien maghrébin du XIIIe siècle), qui s'est occupé de philologie, d'exégèse, de rhétorique, d'astronomie et de mathématiques. Son mérite principal est d'avoir contribué à maintenir et à vulgariser le calcul en chiffres dits *ḡubār* (mot qui signifie « poussière ») : le calculateur répandait de la poussière sur une planchette (*taḫt*) et dessinait les chiffres à l'aide d'un bâtonnet. Pour effacer un résultat partiel, on le recouvrait d'un peu de poussière. Ce type de calcul est appelé *ḥisāb al-ḡubār*.

- *Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī* (« al-Tusi » en Occident, 1201-1274). Mathématicien et astronome, qui fonda et dirigea l'observatoire de Marāḡa (Azerbaïdjan) en 1259 (l'Ecole de Marāḡa, où travaillaient des savants chinois et musulmans, a combattu la tradition astronomique de Ptolémée et prépara la révolution copernicienne). On doit à ce savant de nombreuses découvertes et démonstrations : méthode d'extraction d'une racine *n*-ième, formule du binôme $(a+b)^n$ jusqu'à $n = 12$ (triangle de Pascal), un examen de la théorie euclidienne des droites parallèles, un traité de trigonométrie (y compris la trigonométrie sphérique), etc. Son influence sur les mathématiciens occidentaux (notamment sur Regiomontanus qui a développé le calcul trigonométrique en 1533) a été très importante.

Déclin de la science arabe.

Ce déclin se dessine dès le XIVe siècle et s'affirme d'une manière générale à partir du XVe siècle. Les principaux mathématiciens de cette période furent l'Algérien Ibn al-Qunfūḏ († en 1407 ou 1408), qui fit progresser l'usage des symboles en algèbre et chez al-Qalaṣādī († 1486) juriste et mathématicien de Grenade, commentateur d'Ibn al-Bannā' et auteur d'un très grand nombre d'ouvrages d'arithmétique et d'algèbre. Il a notamment perfectionné les symboles algébriques en utilisant les lettres suivantes :

ش (*š*) : *x* (l'inconnue d'une équation) ;
ل (*l*) : = ;
م (*m*) : x^2 ;
ك (*k*) : x^3 ;
ج (*ğ*) : $\sqrt{}$.

ARITHMÉTIQUE ÉLÉMENTAIRE ET CALCUL ALGÉBRIQUE CLASSIQUE.

Arithmétique élémentaire.

La numération.

- *Le problème.*

La *numération* est la méthode selon laquelle on représente les éléments de l'ensemble ℕ, c'est-à-dire les entiers naturels. On pourrait, par exemple, désigner chacun d'entre eux par un signe particulier : mais on épuiserait bien vite les possibilités de l'imagination humaine et, de plus, ces signes particuliers ne se prêteraient pas au calcul. Nous avons vu que les peuples de l'Antiquité ont proposé des systèmes variés, plus ou moins ingénieux, plus ou moins commodes, reposant, pour la plupart, sur le principe de juxtaposition, qui est celui — entre autres — de la numération romaine (les Romains en ont été les héritiers et non pas les créateurs). Résumons le système romain.

— L'unité est représentée par un I ; on écrit ensuite autant de barres qu'il y a d'unités : I (*un*), II (*deux*), III (*trois*), IIII (*quatre*, qui peut aussi s'écrire autrement).

— Le nombre *cinq* s'écrit V ; il représente une collection de cinq I ; à partir de V, il est possible d'écrire de nouveaux nombres avec la convention suivante : le I placé *avant* le V signifie qu'il faut le soustraire de V, les I placés *après* le V doivent être ajoutés à V. On a donc : IV (*quatre*), V (*cinq*), VI (*six*), VII (*sept*), VIII (*huit*).

— *Dix* s'écrit X ; on peut lui adjoindre des I avec les mêmes règles que pour V ; on a donc : IX (*neuf*), X (*dix*), XI (*onze*), XII (*douze*), XIII (*treize*), puis toujours en additionnant les signes : XIV (dix plus quatre, soit *quatorze*), XV (*quinze*), XVI, XVII, XVIII.

— Une collection de X permet d'écrire *vingt*, *trente*, *quarante*, etc. : XX, XXX, XXXX, etc.

— les autres signes sont : L (*cinquante*), C (*cent*), D (*cinq cents*), M (*mille*). Un nombre comme *mille neuf cent soixante-douze* s'écrit : MCMLXXII (le C devant le M doit se soustraire du M, comme le I devant le V ou le X).

Ce système est très lourd et très peu commode. Toutes les opérations que nous faisons automatiquement avec le système décimal de position (retenir 2, poser 3, faire des produits partiels, etc.) deviennent très vite des calculs inextricables, qui ne peuvent être menés à bien qu'avec l'utilisation de *tables numériques*.

Ce sont, on l'a vu, les Hindous et les Arabes qui, trois mille ans après les Mésopotamiens, ont redécouvert le *système de position*, qui permet d'écrire n'importe quel nombre avec un nombre réduit de signes, toujours les mêmes, dont la valeur dépend de leur position, de leur *rang*.

- *Numération dans un système de base B.*

La méthode moderne de numération, inventée par les Sumériens et perfectionnée par les Hindous et les Arabes, puis par les arithméticiens de la Renaissance, consiste à écrire un nombre *x* quelconque à l'aide d'un petit nombre de signes appelés *chiffres* ou *signes numériques*, qui comprennent *au minimum deux signes*, 1 pour l'unité, 0 pour zéro unité, mais qui peuvent en comporter beaucoup plus (notre système usuel, très encombrant, en compte dix).

On démontre, en arithmétique, qu'un entier quelconque *x*, supérieur à 1, peut s'écrire sous la forme d'une somme de *n* termes :

$$x = a_{n-1}\,B^{n-1} + a_{n-2}\,B^{n-2} + \cdots + a_{n-p}\,B^{n-p} + \cdots + a_2\,B^2 + a_1\,B + a_0\,.$$

B s'appelle la *base* du système ; on le représente conventionnellement par 10, quel que soit l'entier *B* (si *B* = *deux*, on représentera le nombre *deux* par 10 ; si *B* = *trois*, on représentera le nombre *trois* par 10 ; etc.). Si *B* = *dix*, on représentera le nombre *dix* par 10 : c'est d'ailleurs notre système usuel ; si *B* = *douze*, on représentera *douze* par le symbole 10, et ainsi de suite. Les nombres a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0 sont *tous* inférieurs à *B* et a_{n-1} est différent de 0.

Si le nombre *x* est compris entre B^{n-1} et B^n, il y aura *n* nombres de la forme a_{n-i} ; pour représenter *x*, il n'est pas nécessaire d'écrire la somme ci-dessus : il suffit d'écrire, de la gauche vers la droite, les nombres a_{n-1}, a_{n-2} ....

En résumé, dans un système de base *B* :

— la base *B* est représentée par 10, quel que soit *B* ;

— le nombre *x* tel que $B^n > x \geqslant B^{n-1}$ se représente avec *n* signes (*chiffres*), dont le premier, a_{n-1}, est obligatoirement différent de zéro ; les autres peuvent être tous nuls ; de toute façon ils sont tous inférieurs à *B*.

— on écrit alors :

$$x = a_{n-1}\,a_{n-2} \ldots a_2\,a_1\,a_0\,,$$

cette notation représentant l'entier *x* dans le système de base *B*.

- *Application : le système décimal.*

La base *B* représente, ici, une *dizaine* (par exemple les dix doigts des deux mains). Les chiffres de ce système sont les nombres inférieurs à dix, soit : *un* = 1, *deux* = 2, *trois* = 3, *quatre* = 4, *cinq* = 5, *six* = 6, *sept* = 7, *huit* = 8, *neuf* = 9. A ces signes s'ajoute le chiffre 0 (*zéro*).

— Soit à représenter un nombre inférieur à *B* ; il suffit d'utiliser l'un des neuf signes. Par exemple, le nombre de pattes d'un cheval est représenté par 4, le nombre de voyelles dans l'alphabet français par 6, le nombre des Muses dans l'Antiquité par 9, etc.

— Le nombre *dix* est représenté par *B* = 10.

— Soit enfin un nombre supérieur à *B*, par exemple le nombre d'œufs qu'il y a dans une *grosse* (douze douzaines, soit cent quarante-quatre œufs). Nous avons, en appelant *x* ce nombre et en le comparant aux puissances successives de *B* : *B* (*dix*) = 10, B^2 (dix fois dix) = 10^2 = 100, B^3 (dix fois B^2) = 10^3 = 1 000 ; d'après l'inégalité double $B^3 > x \geqslant B^2$, on voit qu'il faudra *n* = 3 chiffres pour représenter le nombre *x*. On aura donc :

$$x = a_2\,B^2 + a_1\,B + a_0\,,$$

avec $a_2 = 1$ (une centaine), $a_1 = 4$ (quatre dizaines) et $a_0 = 4$ (quatre unités simples).

Finalement, on écrit :

$$x = a_2\,a_1\,a_0 = 144\,.$$

— Un nombre comme B^n s'écrit avec un 1 suivi de *n* zéros.

— Remarque : chaque signe (chiffre) s'interprète en fonction de son *rang*. Le rang zéro est celui des unités simples (ici, il y a 4 unités simples) ; le chiffre occupant, dans le sens de droite à gauche, le premier rang après le rang zéro est le *chiffre des dizaines* (des *B-aines* d'une façon générale) : il représente les unités du *premier ordre*. Le chiffre occupant le deuxième rang après le rang zéro (en allant de la droite vers la gauche) représente les unités du deuxième ordre (ici : les *centaines*) ; ... le chiffre occupant le *n*-ième rang représente les unités du *n*-ième ordre, etc.

Le système décimal est notre système usuel. Il est commode dans la mesure où il permet de « compter sur ses doigts » ; mais il est encombrant, puisqu'il exige dix signes numériques. En outre, il présente un certain nombre de défauts du point de vue de la divisibilité (voir ci-après, p. 138).

- *La numération binaire.*

C'est la plus simple de toutes. La base du système est *B* = *deux* et s'écrit, conformément à la règle générale, *B* = 10. Puisque la base *B* est égale à *deux*, il n'y aura que deux signes numériques, 0 et 1. On aura, successivement :

B^2 = *quatre*, B^3 = *huit*, B^4 = *seize*, etc.

— Soit à représenter un nombre inférieur à *B* : on utilise l'un des deux signes ; exemples :

nombre de têtes d'un cheval = 1 ;
nombre de cornes d'un cheval = 0.

— Le nombre *deux* est représenté par 10 ; exemple :

nombre d'oreilles d'un cheval = 10.

Comme nous sommes habitués, depuis notre plus tendre enfance, à nous exprimer en système décimal, cette manière d'écrire risque de nous induire en erreur dans un texte courant. Il faudrait donc préciser : « 10 dans le système binaire » pour ne pas confondre avec « 10 dans le système décimal ». Dans la suite de cet exposé, quand les nombres à transcrire seront exprimés dans le système décimal (qui est celui que tout le monde sait lire et comprend), nous utiliserons des caractères gras, les notations binaires (ou autres) seront en caractères maigres. Ainsi :

deux { s'écrira 10 en système binaire,
s'écrira **2** en système décimal,

d'où **2** = 10, et ainsi de suite.

— Les puissances successives de *deux*, B^2, B^3, B^4, ... s'écriront avec deux zéros, trois zéros, quatre zéros, ... **2** = 10, $\mathbf{2}^2$ = 100, $\mathbf{2}^3$ = 1 000, $\mathbf{2}^4$ = 10 000, ...

— Pour transcrire un nombre en système binaire, on applique les règles théoriques énoncées plus haut. Ainsi le nombre *cinq* (en notation décimale : **5**), que nous nommerons provisoirement *x*, est tel que :

$$B^3 > x \geqslant B^2\,;$$

il s'écrit donc avec *n* = 3 chiffres (qui ne seront que des 0 ou des 1), le chiffre du troisième rang à partir de la droite (unités du deuxième ordre) étant obligatoirement un 1, puisqu'il ne peut être un 0. On a :

$$x = \mathbf{4} + \mathbf{1} = B^2 + \mathbf{1}\,,$$

donc, en binaire :

$$x = 100 + 1 = 101\,,$$

d'où

$$\mathbf{5} = 101\,.$$

— Un procédé commode consiste à écrire le nombre à transcrire en haut d'une colonne, en notation décimale ; on le divise une première fois par **2** et l'on écrit le quotient de cette division sous le nombre à transcrire, le reste (qui est 0 ou 1) étant inscrit en face de ce nombre ; on recommence la même opération pour le quotient obtenu, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne un quotient nul et un reste égal à 1. Il suffit alors de lire *de bas en haut* la colonne des restes pour avoir la transcription binaire du nombre décimal d'où l'on est parti.

Exemple : Soit à transcrire 157 en binaire ; on a : 157 divisé par 2 donne comme quotient 78 et comme reste 1 ; 78 donne comme quotient 39 et comme reste 0 ; etc. :

157	1	
78	0	
39	1	
19	1	
9	1	**157** = 10011101 .
4	0	
2	0	
1	1	
0		

(Ce procédé est général ; voir ci-dessous).

— Pour transcrire en notation décimale un nombre écrit en système binaire, il suffit d'additionner les unités des divers ordres, comme ceci :

Ordres	8^e	7^e	6^e	5^e	4^e	3^e	2^e	1er	unités simples
Nombre d'unités		1	0	0	1	1	1	0	1
Équivalent décimal		$\mathbf{2}^7 \times 1$	$\mathbf{2}^6 \times 0$	$\mathbf{2}^5 \times 0$	$\mathbf{2}^4 \times 1$	$\mathbf{2}^3 \times 1$	$\mathbf{2}^2 \times 1$	$\mathbf{2} \times 0$	**1**

Le nombre 10011101 s'écrit donc, en système décimal :

$$\mathbf{2}^7 + \mathbf{2}^4 + \mathbf{2}^3 + \mathbf{2}^2 + \mathbf{1} = \mathbf{128} + \mathbf{16} + \mathbf{8} + \mathbf{4} + \mathbf{1} = \mathbf{157.}$$

(Pour les règles opératoires en système binaire, voir ci-dessous, p. 137).

- *Base quelconque.*

— Quelle que soit la base *B*, elle est représentée par *B* = 10.

— Le nombre de chiffres (signes numériques) nécessaires est égal à *B* (y compris le 0). Ainsi, dans le système à base *douze*, il faudra *douze* chiffres (les dix chiffres arabes et, par exemple, deux lettres grecques, α et β, pour désigner *dix* et *onze*) ; dans le système de base **5** il en faudrait *cinq*, etc.

— On a toujours B^2 = 100, B^3 = 1 000, ...

— Pour passer du système décimal usuel au système de base *B*, on procède comme pour le passage en système binaire, en écrivant la série des quotients par *B* et les restes correspondants ; si la base est supérieure à *dix*, les restes pourront être désignés par des signes tels que α, β, etc. Le passage inverse, du système de base *B* au système décimal, se fait selon le même principe que le passage du système binaire au système décimal.

— *Exemple* : Soit à écrire le nombre (en décimal) **6683** dans le système duodécimal (*B* = 12) et dans le système à base **7.**

1° Signes du système duodécimal : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α (*dix*), β (onze).

Signes du système de base **7** : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2° Calcul :

Base *B* = **12** (**12** = 10, **144** = 100, ...)

6683	**11** = β
556	4
46	**10** = α
3	3
0	

6683 = 3 α 4 β (en système duodécimal) ;

Base *B* = **7** (**7** = 10, **49** = 100, **343** = 1 000, ...)

6683	5
954	2
136	3
19	5
2	2
0	

6683 = 25325 (avec la base *B* = **7**).

— Le calcul inverse est immédiat ; ainsi 25325 (base **7**) donne :

Ordres	5^e	4^e	3^e	2^e	1er	unités simples
Nombre d'unités		2	5	3	2	. 5
Équivalent décimal		2×7^4	5×7^3	3×7^2	2×7	5

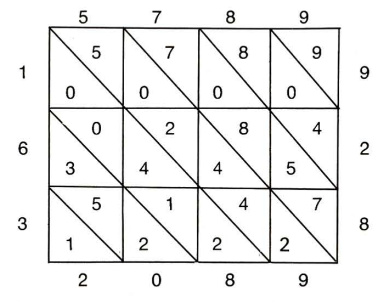
Donc : 25325 (base **7**) $=$ **$2\times7^4+5\times7^3+3\times7^2+2\times7+5$** $=$
$=$ **$4802+1715+147+14+5=6683$.**

Calcul sur les nombres entiers.

Les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication, division) se font à partir de *tables* qui indiquent les résultats de ces opérations pour toute composition des nombres *x* inférieurs à la base du système. Dorénavant, nous ferons tous les calculs dans le système décimal (c'est-à-dire que nous renoncerons à transcrire les nombres dans un système tel que le système binaire ou le système duodécimal) ; il ne sera plus nécessaire d'utiliser des caractères gras pour la numération décimale et des caractères maigres pour les autres types de numération (qui seront, éventuellement, précisés).

● Les quatre opérations sur les nombres entiers.

Quand on sait calculer les sommes, les différences, les produits et les quotients des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 associés deux à deux, on peut faire toutes les opérations sur n'importe quel autre nombre, aussi grand soit-il. Les procédés de calcul sont enseignés dans les classes élémentaires et peuvent être utilisés par des machines à calculer. Ces procédés ne sont pas les seuls possibles. Voici, à titre de curiosité, la méthode ancienne pour poser les multiplications, dite méthode *per gelosia*. On a pris comme exemple la multiplication de 5789 par 361.



On inscrit le multiplicande de gauche à droite et le multiplicateur de bas en haut sur les côtés d'un rectangle. Dans chaque case, divisée en deux par une diagonale, on inscrit le résultat du produit des deux nombres écrits en tête de la ligne et de la colonne auxquelles appartient la case ; le chiffre des dizaines de ce produit est écrit à gauche de la diagonale, le chiffre des unités à droite. On fait ensuite la somme des nombres dans les bandes diagonales, en reportant les retenues d'une bande sur l'autre, en commençant par la bande du haut. On lit le résultat de la multiplication « autour » du rectangle, en partant de l'angle inférieur gauche et en remontant jusqu'à l'angle supérieur droit : 2089829. (Vérifier, en faisant la multiplication selon le procédé classique.)

● *Unités fractionnaires.*

Nous étudierons plus loin les règles de calcul sur les fractions ; on sait que le système décimal permet d'exprimer n'importe quelle fraction en *dixièmes*, *centièmes*, *millièmes*, etc. Ces unités sont dix fois, cent fois, mille fois, ... plus petites que les unités simples. On les distingue de celles-ci en les écrivant à leur droite et en les séparant par un signe conventionnel : la *virgule*, « , » ou, dans les pays anglo-saxons, le *point* « . ». Dans un système de base *B*, on pourrait adopter le même principe, les unités fractionnaires étant alors *B* fois, $B\times B$ fois, $B\times B\times B$ fois, ... plus petites que les unités simples.

Pour multiplier un nombre par 10, 100, 1 000, ..., 10^n, on inscrit à sa droite un, deux, trois, ... *n* zéros s'il s'agit d'un nombre entier, ou bien on déplace la virgule de 1, 2, ... *n* rangs vers la droite s'il s'agit d'un nombre à partie fractionnaire. Inversement, pour diviser un nombre par 10^n, on enlève *n* zéros (s'ils existent) à ce nombre s'il est entier, ou bien on déplace la virgule de *n* rangs vers la gauche.

Ainsi, un nombre, avec sa partie entière et sa partie fractionnaire (décimale s'il s'agit du système usuel à base 10), devient, dès qu'il est écrit, un symbole relatif, sur lequel les calculs deviennent mécaniques.

● *Extraction des racines carrées.*

Voici, sans démonstration, le procédé de calcul, appliqué à l'exemple

$$x=\sqrt{163{,}689}\,.$$

— On partage le nombre donné en tranches de deux chiffres à partir de la virgule, vers la gauche et vers la droite ; la première tranche à gauche peut n'avoir qu'un chiffre, la dernière tranche à droite peut être complétée par un zéro :

1|63|,68|90.

— On extrait la racine entière de la première tranche, c'est-à-dire le plus grand nombre dont le carré est inférieur ou égal au nombre que représente la première tranche. Ici, la première tranche est 1, la racine carrée de 1 est 1 ($1\times1=1$).

Ce résultat, 1, est le premier chiffre de la racine *x* cherchée ; on l'inscrit en face du nombre donné, et on écrit, sous la première tranche, la différence entre cette première tranche et le nombre trouvé (ici : $1-1=0$) :

```
1|63|,68|90 | 1
0           |
```

— On abaisse la tranche suivante (63) et on sépare un chiffre à droite du nombre ainsi formé ; on double le chiffre 1 trouvé à la racine et on inscrit ce « double » sous la racine :

```
1|6 3|,68|90 | 1
0 6|3        | 2
```

— On divise la tranche 06 par 2 (le nombre qui a été inscrit sous le 1), et l'on inscrit le quotient, 3, à droite de 2 ; on fait ensuite le produit $23\times3=69$; ce produit est supérieur à 63, il ne convient pas, car on ne peut pas le soustraire de 63. On essaie alors le chiffre immédiatement inférieur à 3, soit 2 ; le produit $22\times2=44$ est inférieur à 63 : le chiffre 2 convient :

```
1|6 3|,68|90 | 1              1|6 3|,68|90 | 1
0 6|3        | 23 × 3 = 69    0 6|3        | 22 × 2 = 44
(63 − 69 impossible)          (63 − 44 = 19)
```

— On soustrait 44 de 063 ; on trouve 19 ; le chiffre 2 est le deuxième chiffre de la racine ; on l'inscrit à droite du 1 ; 19 est écrit sous 63 et l'on abaisse à côté de 19 la tranche suivante, 68. Comme cette tranche est décimale, on met une virgule à la racine, après le 2 :

```
1|6 3|,68|90 | 12,
0 6|3        | 22 × 2 = 44
  1 9 68     |
```

— On sépare un chiffre à droite de 1968, on double le nombre trouvé à la racine, soit 24, et on divise 196 (obtenu en séparant un chiffre à droite de 1968) par 24, ce qui donne, comme quotient, 8. On essaie 8 comme au 4e, en écrivant 8 à la droite de 24, ce qui donne 248, et en effectuant $248\times8=1984$; 1984 est supérieur à 1968, donc 8 ne convient pas, et il faut essayer 7, qui convient ($247\times7=1729$), et qui est donc le troisième chiffre de la racine :

```
1|6 3|,6 8|90 | 12,           1|6 3|,6 8|90 | 12,7
0 6|3         | 22 × 2 = 44   0 6|3         | 22 × 2 = 44
  1 9  6|8    | 24              1 9  6|8    | 247 × 7 = 1729
                                  2 3 9     |
                              (1968 − 1729 = 239)
```

— On abaisse la tranche 90 ; on sépare un chiffre à droite ; on double 127, ce qui fait 254 (on ne tient pas compte de la virgule pour ces calculs intermédiaires) ; on divise 23990 par 254 ; on trouve 9, chiffre qu'on essaie ($2549\times9=22941$, inférieur à 23990 ; donc 9 convient) ; 9 est le quatrième chiffre de la racine.

```
1|6 3|,6 8|9 0 | 12,79
0 6|3          | 22 × 2 = 44
  1 9  6|8     | 247 × 7 = 1729
    2 3 9 9|0  | 2549 × 9 = 22941
      1 0 4 9  |
```

Résultat : la racine carrée de 163,689 est 12,79 ; le reste est 0,1049.

Vérification : $(12{,}79)^2=12{,}79\times12{,}79=163{,}5841$, et $163{,}689-163{,}5841=0{,}1049$.

Si l'on voulait pousser plus loin le calcul, on abaisserait une tranche 00 à la droite de 1049, qui est le dernier reste partiel, et l'on continuerait de la même façon.

● *Opérations en système binaire.*

La table d'addition se réduit à :

$$0+0=0\,;\quad 1+0=1\,;\quad 1+1=10\,;$$

et la table de multiplication à :

$$0\times0=0\,;\quad 0\times1=0\,;\quad 1\times1=1\,.$$

Soit à additionner les deux nombres (binaires) 100101110 et 111011 ; on écrira :

```
    11111
100101110
   111011
---------
101101001
```

Voici les étapes du calcul (en partant de la droite) : 0 et 1 font 1, je pose 1 ; 1 et 1 font 10, je pose 0 et je retiens 1 ; 1 et 0 font 1, et 1 de retenue font 10, je pose 0 et je retiens 1 ; 1 et 1 font 10, et 1 de retenue font 11, je pose 1 et je retiens 1 ; 1 et 0 font 1, et 1 de retenue font 10, je pose 0 et je retiens 1 ; 1 et 1 font 10, et 1 de retenue font 11, je pose 1 et je retiens 1 ; 0 et 1 de retenue font 1, je pose 1 ; 0 n'est ajouté à aucune retenue, je pose donc 0 ; de même je pose 1 (les retenues ont été inscrites en petits caractères).

La multiplication est tout aussi simple (voir exemple ci-dessous).

```
  1011
   ×11
------
  1011
 1011
------
100001
```

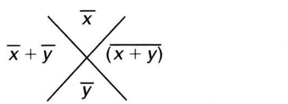
● *Preuves des opérations.*

Soit deux nombres *x* et *y*, exprimés dans un système de base *B*. Appelons $\overline{x}$ et $\overline{y}$ les congruences modulo *a* qui admettent respectivement *x* et *y* pour représentants. On établit les égalités :

$$\overline{x}+\overline{y}=\overline{(x+y)}\quad\text{et}\quad \overline{x}\,.\,\overline{y}=\overline{(xy)}\,.$$

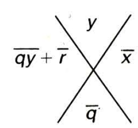
Supposons que nous puissions déterminer facilement le reste de la division d'un nombre *x* par *a* ; faire la *preuve par a* consiste à vérifier des égalités de congruences. Par exemple, si nous avons calculé le produit 131×72 et trouvé 9432, la preuve par *a* de cette opération consiste à vérifier que $\overline{131}\times\overline{72}=\overline{9432}$.

On utilise la propriété suivante, liée aux systèmes de numération : si un nombre *x* est écrit dans un système de base *B*, le reste de la division de *x* par $(B-1)$ est le même que le reste de la division de la somme de ses chiffres par $(B-1)$. Il est donc immédiat de calculer les congruences modulo $(B-1)$ et de faire, par conséquent, la preuve par $(B-1)$ des opérations. On dispose généralement les congruences $\overline{x}$, $\overline{y}$, etc. dans les quatre angles d'une croix :



Preuve de l'addition $x+y$: On calcule les congruences $\overline{x}$ et $\overline{y}$, et on vérifie que $\overline{x}+\overline{y}=\overline{(x+y)}$.

Preuve de la multiplication xy : on vérifie que $\overline{x}\,.\,\overline{y}=\overline{(xy)}$.



Preuve de la division de *x* par *y* (quotient : *q* ; reste : *r*) : on vérifie que $\overline{qy}+\overline{r}=\overline{x}$.

Dans le système décimal ($B=10$), on fait la preuve par $B-1=9$. Par exemple, pour le produit $131\times72=9432$, on a :

Reste de la division par 9 de 131 = reste de la division par 9 de $(1+3+1)=5$, c'est-à-dire : $\overline{131}=\overline{(1+3+1)}=\overline{5}$; de même $\overline{72}=\overline{(7+2)}=\overline{0}$ et $\overline{9432}=\overline{0}$. On a donc d'une part : $\overline{131}\times\overline{72}=\overline{5}\times0=\overline{0}$ et, d'autre part,

$$\overline{9432}=\overline{(131\times72)}=\overline{0}:\overline{0}=\overline{0}\,,$$

donc la multiplication a des chances d'être exacte. (Cette « preuve » ne donne pas une garantie certaine de l'exactitude du résultat trouvé, car un résultat comme 94329, par exemple, donnerait aussi une congruence égale à 0, puisque 94329 diffère de 9432 par le chiffre 9, qui n'influe pas sur le reste de la division par 9 de la somme des chiffres.)

PGCD et PPCM ; caractères de divisibilité.

(Voir aussi p. 25.)

● *Rappel.*

Un entier naturel différent de 1 qui n'admet pour diviseurs que lui-même et l'unité est appelé un *nombre premier*. Deux ou plusieurs nombres sont dits *premiers entre eux* lorsqu'ils n'admettent que l'unité comme diviseur (entier) commun.

— *Théorème de Bézout* : Deux entiers positifs *a* et *b* sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux entiers positifs *u* et *v* tels que $au-bv=1$.

— Conséquence : si *a* est premier avec *b* et avec *c*, il est premier avec le produit *bc*.

— *Théorème de Gauss* : Si *a* et *b* sont deux nombres premiers entre eux et si *a* divise le produit *bc*, alors *a* divise *c*.

— Conséquence : si *a* est divisible séparément par deux entiers *b* et *c* premiers entre eux, alors il est divisible par le produit *bc*.

— *Théorème* : Tout nombre entier est décomposable en un produit de facteurs premiers, et cela d'une façon unique.

● *Méthode pratique de décomposition d'un nombre en facteurs premiers.*

— On écrit le nombre à décomposer en haut d'une colonne et on le divise par le premier des nombres premiers, 2 ; si cette division peut se faire sans reste, c'est-à-dire si le nombre donné est divisible par 2, on inscrit le quotient en dessous du nombre donné et le facteur 2 en face de ce nombre.

— Si le quotient obtenu est divisible par 2, on inscrit à nouveau 2 en face du quotient, et le deuxième quotient en dessous du premier. On continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les divisions par 2 possibles. On passe ensuite la division du dernier quotient obtenu par 3, puis par 5, 7, ... en suivant l'ordre des nombres premiers. Quand la division n'est pas possible exactement, on passe au facteur suivant. La décomposition est terminée lorsque le dernier quotient obtenu est 1.

```
4 776 408 | 2
2 388 204 | 2
1 194 102 | 2
  597 051 |
```

— *Exemple.* Soit à décomposer en facteurs premiers le nombre 4 776 408. Il est divisible par 2, ce qui donne le quotient $q_1=2\,388\,204$; q_1 est divisible par 2, ce qui donne $q_2=1\,194\,102$; q_2 est divisible par 2, ce qui donne $q_3=597\,051$; q_3 n'est pas divisible par 2, ce qui met un terme aux divisions par 2 ; on passe alors aux divisions par 3.

597 051 est divisible par 3 (voir ci-après, p. 138) et donne comme quotient $q_4=199\,017$; q_4 est aussi divisible par 3, ce qui donne $q_5=66\,339$; q_5 est divisible par 3 et donne le quotient $q_6=22\,113$, qui est encore divisible par 3 et donne $q_7=7\,371$; on continue ainsi jusqu'à $q_{11}=91$, qui n'est plus divisible par 3.

4 776 408	2
2 388 204	2
1 194 102	2
597 051	3
199 017	3
66 339	3
22 113	3
7 371	3
2 457	3
819	3
273	3
91	7
13	13
1	

Pour q_{11}, on cherche les nombres premiers supérieurs à 3 susceptibles de le diviser exactement ; 5 ne convient pas, mais 7 donne comme quotient $q_{12} = 13$, qui, lui-même, est premier, n'admettant que $q_{13} = 13$ et 1 comme diviseurs.

Finalement, on a :

$$4776408 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^8 \times 7 \times 13 .$$

● *Calcul du PGCD de deux ou plusieurs nombres.*

Règle : On décompose les nombres en question en facteurs premiers et on forme le produit de tous les *facteurs premiers communs* aux diverses décompositions, affectés de leur *plus petit exposant.*

Exemple : PGCD des nombres 103 194, 8 316 et 5 544. On décompose les trois nombres en facteurs premiers selon la méthode exposée plus haut :

103 194	2	8 316	2	5 544	2
51 597	3	4 158	2	2 772	2
17 199	3	2 079	3	1 386	2
5 733	3	693	3	693	3
1 911	3	231	3	231	3
637	7	77	7	77	7
91	7	11	11	11	11
13	13	1		1	
1					

$103\,194 = 2 \times 3^4 \times 7^2 \times 13$; $8\,316 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 11$; $5\,544 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11$.

Les facteurs communs, affectés de leur plus petit exposant, sont 2, 3^2 et 7, donc :

$$\text{PGCD} = 2 \times 3^2 \times 7 = 126 .$$

● *Calcul du PPCM de deux ou plusieurs nombres.*

Règle : On décompose les nombres en facteurs premiers et on forme le produit de tous les facteurs premiers *différents, communs ou non*, qui figurent dans les décompositions, chaque facteur étant affecté de son *plus grand exposant.*

Exemple : le PPCM de 103 194, 8 316 et 5 544 (mêmes nombres que ci-dessus) est

$$\text{PPCM} = 2^3 \times 3^4 \times 7^2 \times 11 \times 13 = 4\,540\,536 .$$

● *Caractères de divisibilité.*

Il existe des règles permettant, dans certains cas, de reconnaître, sans faire la division, si un nombre est divisible par un autre ; ces règles s'appellent des *caractères de divisibilité.* Nous ne donnerons que les plus usuelles d'entre elles.

— Divisibilité par 2 : un nombre est divisible par 2 quand il se termine par 0 ou par un chiffre pair.

— Divisibilité par 4 : un nombre est divisible par 4 quand le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible lui-même par 4.

— Divisibilité par 8 : un nombre est divisible par 8 quand le nombre formé par ses trois derniers chiffres est lui-même divisible par 8.

— Divisibilité par 2^n : un nombre est divisible par 2^n quand le nombre formé par ses n derniers chiffres est lui-même divisible par 2^n.

— Divisibilité par 5 : un nombre est divisible par 5 quand il se termine par 0 ou par 5.

— Divisibilité par 25 : un nombre est divisible par 25 quand il se termine par 00, 25, 50 ou 75.

— Divisibilité par 3 : un nombre est divisible par 3 quand la somme de ses chiffres est divisible par 3.

— Divisibilité par 9 : un nombre est divisible par 9 quand la somme de ses chiffres est divisible par 9.

— Divisibilité par 11 : un nombre est divisible par 11 quand la différence entre la somme de ses chiffres de rangs impairs et la somme de ses chiffres de rangs pairs est nulle, ou égale à 11, ou à un multiple de 11.

Fractions et rapports.

Calcul sur les fractions.

● *Définitions.*

Une fraction est un élément de l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, la notation $\mathbb{Z}^*$ désignant l'ensemble $\mathbb{Z}$ privé du 0. Une fraction se note (a, b), ou a/b, ou $\frac{a}{b}$; a est le *numérateur* et b le *dénominateur* de la fraction. Nous résumons ci-dessous les règles pratiques de calcul sur les fractions. Pour la théorie, voir à la p. 31.

● *Comparaison des fractions et des nombres entiers.*

— Une fraction dont les deux termes sont égaux est égale à l'unité : par exemple, 3/3 = 1. Si le numérateur est supérieur au dénominateur, la fraction est supérieure à l'unité ; si le numérateur est inférieur au dénominateur, elle est inférieure à l'unité.

— Si le numérateur est divisible par le dénominateur, la fraction peut être remplacée par un nombre entier : 8/2 = 4. Inversement, un nombre entier peut être converti en fraction : par exemple, pour convertir le nombre 8 en fraction de dénominateur égal à 5, on écrit : $8 = 8 \times 5/5$.

● *Simplification des fractions.*

Pour simplifier une fraction, on divise ses deux termes par un même nombre, diviseur commun du numérateur et du dénominateur ; lorsque ces divisions ne sont plus possibles, la fraction est dite *irréductible*. Deux méthodes peuvent être utilisées.

— Les diviseurs communs sont apparents (on les découvre en appliquant les caractères de divisibilité aux deux termes de la fraction) : la simplification est immédiate.

— Les diviseurs communs ne sont pas apparents : on cherche le PGCD des deux termes de la fraction et on les divise par ce PGCD. La fraction obtenue est irréductible.

Dans ce qui suit, nous supposerons que les fractions dont on part sont irréductibles.

● *Réduction au même dénominateur.*

— *Méthode directe* : Pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur, D, on multiplie entre eux tous les dénominateurs, et on multiplie chaque numérateur par le produit des dénominateurs des autres fractions.

Exemple : soit à réduire au même dénominateur les fractions 3/4, 5/9, 1/6, 7/13. On a :

$$D = 4 \times 9 \times 6 \times 13 = 2808$$

et :

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 9 \times 6 \times 13}{D} = \frac{2106}{2808} ,$$

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \times 4 \times 6 \times 13}{D} = \frac{1560}{2808} , \text{ etc.}$$

— *Méthode du PPCM* : On décompose chaque dénominateur en facteurs premiers et on calcule le PPCM de ces dénominateurs, ce qui donne le dénominateur commun cherché. On multiplie ensuite chaque numérateur par les facteurs du dénominateur commun qui ne figurent pas dans le dénominateur correspondant.

Exemple : Reprenons les quatre fractions considérées ci-dessus.

$$\text{PPCM de } 4, 9, 6, 13 = 2^2 \times 3^2 \times 13 ,$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3^2 \times 13}{468} = \frac{351}{468} , \quad \frac{5}{9} = \frac{5 \times 2^2 \times 13}{468} = \frac{260}{468} , \text{ etc.}$$

● *Opérations sur les fractions.*

— Addition : On simplifie, puis on réduit au même dénominateur les fractions à additionner ; on a alors :

$$\frac{a}{D} + \frac{b}{D} = \frac{a + b}{D} .$$

— Soustraction : même règle opératoire, mais $(a + b)$ est remplacé par $(a - b)$.

— Multiplication : on simplifie les fractions à multiplier, puis on fait le produit des numérateurs et celui des dénominateurs :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} .$$

— Division : pour diviser une fraction a/b (dividende) par une fraction c/d (diviseur), on multiplie la fraction dividende par la fraction diviseur renversée :

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} .$$

Le calcul sur les fractions n'est compliqué qu'en apparence : en fait, tout calcul un peu important se ramène à une série de petits calculs élémentaires qu'il suffit de faire avec soin, en respectant bien les règles opératoires. La simplification des calculs exige une certaine pratique, que donnent les exercices.

Rapports et proportions.

● *Définitions.*

— On appelle *rapport* de deux nombres réels a et b le quotient q du nombre a par le nombre b, supposé non nul ; ce quotient est positif, négatif, ou nul (si $a = 0$), et représenté par la notation a/b.

— Étant donné deux ensembles A et B, formés d'éléments notés $a_1, a_2, a_3, \dots$ pour A et $b_1, b_2, b_3, \dots$ pour B, on dit que ces ensembles sont formés de *nombres proportionnels* si le rapport, a_i/b_i, de deux éléments de même rang appartenant respectivement aux deux ensembles A et B est indépendant du rang i, c'est-à-dire si

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_i}{b_i} = k .$$

Si les ensembles A et B sont dénombrables et si leurs éléments vérifient les égalités précédentes, on dit que A et B forment des *suites de nombres proportionnels.*

● *Propriétés des nombres proportionnels.*

— *Théorème* : Si deux nombres non nuls, a et a', sont proportionnels à deux nombres non nuls, b et b', dans le rapport k, l'égalité

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = k$$

entraîne l'égalité

$$\frac{xa + ya'}{xb + yb'} = k ,$$

à la condition que $xa + ya'$ et $xb + yb'$ soient tous deux différents de zéro.

— *Application* : En faisant successivement $x = y = 1$, puis $x = 1$ et $y = -1$, le théorème précédent permet d'écrire :

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a + a'}{b + b'} = \frac{a - a'}{b - b'} = k .$$

● *Proportions.*

— Quatre nombres, a, b, c, d, *pris dans cet ordre*, forment une *proportion* si les deux premiers sont proportionnels aux deux derniers, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} .$$

Les termes a et d sont appelés les *extrêmes*, les termes b et c sont les *moyens.*

— *Théorème fondamental* : Quatre nombres non nuls, a, b, c, d, pris dans cet ordre, forment une proportion *si, et seulement si*, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens :

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Leftrightarrow ad = bc .$$

— Corollaire : on déduit du théorème précédent qu'on peut permuter, dans une proportion, les extrêmes entre eux et les moyens entre eux (on a toujours, en effet, $ad = bc$).

— *Quatrième proportionnelle* : Étant donné trois nombres non nuls, a, b, c, on appelle quatrième proportionnelle à ces trois nombres, pris dans cet ordre, le nombre x tel que a, b, c, x soient en proportion :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} , \quad \text{d'où} \quad x = \frac{bc}{a} .$$

— *Moyenne proportionnelle* : On appelle moyenne proportionnelle à deux nombres non nuls, a et b, un nombre x tel que a, x, x, b soient en proportion :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} , \quad \text{d'où} \quad x^2 = ab .$$

Calcul algébrique élémentaire.

Nous présentons ici un ensemble de règles de calcul et de formules, sans donner de justification, et sans référence aux armatures logiques expliquées dans le texte (pp. 7 à 73). Les nombres sur lesquels on calcule sont supposés *réels.*

Nombres relatifs.

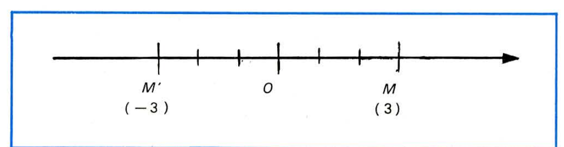
● *Interprétation graphique.*

Si l'on choisit, sur un axe, une origine O (figure ci-dessous) et si l'on veut préciser la position d'un point M, il faut, non seulement donner sa distance à cette origine, mais aussi indiquer s'il se trouve *à droite* ou *à gauche* de O. Le nombre qu'on fait correspondre à la position du point M comprend donc deux parties :

— la mesure, avec une unité quelconque, de la distance OM ; ce peut être un nombre entier ou fractionnaire, rationnel ou irrationnel (voir pour ce dernier cas les pp. 54-55) ;

— un signe quelconque précisant sa position à gauche ou à droite de O. On peut choisir le signe « + » pour les mesures à droite de O, et le signe « − » pour les mesures à gauche.

Avec ces conventions, la position du point M est désignée par $(+3)$ et la position du point M' par (-3).



● *Description d'un nombre relatif.*

Un nombre relatif comprend deux parties :

— un nombre arithmétique (entier ou fractionnaire, rationnel ou irrationnel) : c'est sa *valeur absolue* ;

— un signe « + » (*nombre positif*) ou « − » (*nombre négatif*).

Quand on veut désigner uniquement la valeur absolue d'un nombre relatif, on l'encadre entre deux barres verticales :

$$|-3| = 3 \quad \text{ou} \quad |+3| = 3 .$$

Nous désignerons souvent, par la suite, un nombre relatif par une lettre, comme a, b, x, etc. Ne pas oublier que, dans ce cas, le symbole « a » comprend *une valeur absolue* et *un signe.*

● *Comparaison des nombres relatifs.*

— Tout nombre positif est supérieur à 0 (> 0 : lire « plus grand que 0 »).

— Tout nombre négatif est inférieur à 0 (< 0 : lire « plus petit que 0 »).

— 0 n'est ni positif ni négatif.

— De deux nombres positifs, le plus grand est celui qui a la plus grande valeur absolue.

— De deux nombres négatifs, le plus grand est celui qui a la plus petite valeur absolue (exemple : − 4 °C est une température *plus élevée* que − 22 °C).

— Deux nombres relatifs ayant même valeur absolue mais de signes contraires sont dits *opposés* : + 3 et − 3 sont opposés.

Opérations sur les nombres relatifs.

● *Addition.*

Pour additionner deux nombres relatifs a et b, on applique les règles indiquées par le tableau suivant :

Cas considéré	Résultat	
	Signe	Valeur absolue
a et b de même signe	Le signe commun	Somme des deux valeurs absolues.
a et b de signes contraires	Signe de celui qui a la plus grande valeur absolue.	Différence des deux valeurs absolues.

Exemples : $(+7)+(-5)=(+2)$,
$(-5)+(-8)=(-13)$.

Pour additionner plusieurs nombres relatifs, on peut ajouter le deuxième au premier, puis le troisième au résultat précédent, et ainsi de suite ; on peut intervertir l'ordre des termes.

- *Soustraction.*

Pour retrancher un nombre relatif b d'un autre nombre relatif a, on ajoute à a le nombre b changé de signe (c'est-à-dire l'*opposé* $b'=-b$). Une soustraction se ramène donc à une addition : il n'y a pas de « soustraction impossible » en algèbre (alors qu'il y en avait en arithmétique élémentaire).

- *Multiplication.*

Le produit de deux nombres relatifs a et b est un nombre relatif p dont la valeur absolue est le produit des valeurs absolues de a et de b, et dont le signe est donné par la *règle des signes* :

Signe de *a*	Signe de *b*	Signe de *p*
+	+	+
−	−	+
+	−	−
−	+	−

Le produit de deux nombres a et b peut être représenté par la notation $a \times b$, ou $a \cdot b$, ou simplement ab.

— Deux nombres de même signe ont un produit positif ; deux nombres de signes contraires ont un produit négatif.

— $a=0=0\times a=0$, quel que soit a.

— En multipliant un nombre relatif par $+1$ on obtient le même nombre.

— En multipliant un nombre relatif par -1 on obtient le nombre opposé.

— Pour faire le produit de plusieurs nombres, on multiplie le premier par le deuxième, puis le résultat obtenu par le troisième et ainsi de suite. Pratiquement, on peut aussi faire le produit de toutes les valeurs absolues sans se préoccuper des signes, puis compter les signes négatifs : le résultat est positif si le nombre de signes négatifs est nul ou pair, il est négatif dans le cas contraire.

Exemple :

$$(-3)\times(+5)\times(+6)\times(-12)\times(+9)\times(-2)=p.$$

Produit des valeurs absolues = 19 440.
Nombre de signes négatifs : 3 (impair).
Donc $p=-19\,440$.

- *Division.*

Diviser un nombre relatif a (dividende) par un nombre relatif b (diviseur), c'est trouver un troisième nombre relatif c qui, multiplié par b, donne a. On obtient c en faisant le quotient de la valeur absolue de a par celle de b et en lui donnant un signe conformément à la règle des signes, appliquée à a et b.

— On appelle *inverse* d'un nombre le quotient de 1 par ce nombre ; l'inverse de x est donc $1/x$. Pour diviser a par b, on peut aussi multiplier a par l'inverse de b :

$$a : b = a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

La multiplication d'un nombre par son inverse donne 1.

— La division de a par 0 est impossible (n'a pas de sens).

— La division de a par 1 donne a.

— La division d'un nombre par lui-même donne 1.

— La division d'un nombre par -1 donne ce nombre changé de signe.

- *Puissance n-ième d'un nombre relatif.*

C'est le produit de n facteurs égaux à ce nombre. Par exemple :
$(-3)^3=(-3)\times(-3)\times(-3)=-27$ (ne pas confondre $(-3)^3$ avec $(-3)\times 3$).
$a^4=a\times a\times a\times a$ (ne pas confondre a^4 avec $a\times 4$).

— D'après ce que nous avons dit plus haut (procédé pratique de multiplication de plusieurs facteurs), on voit que :

— si a est positif, a^n est positif ;

— si a est négatif, a^n est positif si n est pair, et négatif si n est impair.

— Cas particulier important : le *carré* d'un nombre (élévation de ce nombre à la puissance 2) est toujours positif, quel que soit ce nombre (2 est pair).

— *Exposants.* Lorsqu'on écrit, par exemple, a^4, le chiffre 4, écrit (en petits caractères) en haut et à droite de a, s'appelle l'*exposant* de a.

— Exposant 0 : par convention, $a^0=1$, quel que soit a.

— Exposant 1 : $a^1=a$.

— Exposant négatif : une puissance d'exposant négatif est l'inverse de la puissance d'exposant positif opposé au précédent. Exemples :

$$a^{-5}=\frac{1}{a^5},\quad 10^{-3}=\frac{1}{10^3},\quad \text{etc.}$$

- *Racine n-ième d'un nombre.*

— *Racine n-ième arithmétique d'un nombre arithmétique.* Étant donné un nombre arithmétique A, il existe un nombre arithmétique X, et un seul, tel que

$$X^n = A.$$

Ce nombre X s'appelle la *racine n-ième arithmétique* de A. On le désigne par la notation $\sqrt[n]{A}$. L'écriture $\sqrt[n]{\ }$ s'appelle un *radical* ; n est l'*indice* de ce radical.

$\sqrt[2]{A}$ s'appelle la racine carrée arithmétique de A ; dans ce cas, on se dispense, en général, d'écrire l'indice du radical. $\sqrt[3]{A}$ s'appelle la racine cubique de A.

— *Produit et quotient de deux racines carrées.* On démontre les formules suivantes :

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}\quad\text{et}\quad\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

— *Racine n-ième d'un nombre relatif.* On appelle racine *n*-ième d'un nombre relatif *a tout nombre relatif* x tel que

$$x^n = a. \qquad (1)$$

Cas où $n=2$ (racine carrée). D'après ce qui précède, on appelle racine carrée de a tout nombre x tel que

$$x^2 = a. \qquad (2)$$

On sait que le carré d'un nombre relatif, positif ou négatif, est toujours positif ; si donc a est négatif, il n'existe aucun nombre x remplissant la condition (2) ; autrement dit, un nombre négatif n'a pas de racine carrée (dans le domaine des réels).

Mais considérons un nombre positif, par exemple $a=+9$. Il existe deux nombres relatifs tels que $x^2=9$; ce sont $+3$ et -3 ; le nombre 9 a donc deux racines carrées opposées. De façon analogue, 25 a deux racines carrées opposées : $+5$ et -5 ; 1 a deux racines carrées opposées, $+1$ et -1 ; 2 a deux racines carrées opposées, $+\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ (nombres irrationnels), etc. D'une manière générale, tout nombre relatif positif a possède deux racines carrées opposées, $+\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Cas où $n=3$ (racine cubique). D'après la définition générale, on appelle racine cubique de a tout nombre x tel que

$$x^3 = a. \qquad (3)$$

Si a est positif, x^3 doit être positif. Or, le cube d'un nombre (produit d'un nombre impair de facteurs égaux à ce nombre) et ce nombre lui-même sont de même signe ; donc x doit être positif. Le nombre a possède alors une racine cubique et une seule, qui est positive.

Si a est négatif, x^3 doit être négatif, donc x doit être négatif. Le nombre a possède alors une racine cubique et une seule, qui est négative.

Finalement, un nombre relatif a admet, quel que soit son signe, une racine cubique et une seule, qui est de même signe que lui.

Généralités sur le calcul algébrique.

Parenthèses.

Nous avons isolé les nombres relatifs dans des parenthèses, en écrivant, par exemple, $(+7)$, (-5), etc.

Lorsqu'on a à calculer une somme de nombres relatifs écrits de cette façon, on peut se débarrasser des parenthèses de la façon qu'indique l'exemple suivant :

au lieu de :

$$(+12)+(-5)+(+3),$$

on écrit simplement :

$$12-5+3,$$

en omettant, devant le premier terme, le signe + si (comme c'est le cas dans l'exemple ci-dessus) ce terme est positif.

S'il s'agit d'une suite d'additions et de soustractions (on a alors à calculer ce qu'on appelle une *somme algébrique*), on peut, de même, se débarrasser des parenthèses, en changeant le signe de chaque terme précédé du signe « − ». Ainsi, au lieu de

$$(+12)-(-5)+(+3)-(+2),$$

on écrira

$$12+5+3-2.$$

Il arrive que, dans l'écriture d'une somme algébrique, un groupe de termes consécutifs soit écrit entre parenthèses (ou entre crochets) ; cela indique que la somme algébrique partielle de ces termes doit être remplacée par son résultat.

Ainsi, ayant à calculer

$$(+12)-[(+5)-(+2)-(-7)]+(+3),$$

on calculera d'abord le résultat de l'opération écrite entre crochets :

$$(+5)-(+2)-(-7)=5-2+7=+10\,;$$

on sera alors ramené au calcul de :

$$(+12)-(+10)+(+3).$$

Enfin, dans le cas où les termes d'une somme algébrique sont représentés par des lettres, si un groupe de termes est écrit entre parenthèses :

— lorsque l'expression mise entre parenthèses est précédée du signe « + » on peut supprimer les parenthèses purement et simplement ;

— lorsque l'expression mise entre parenthèses est précédée du signe « − », on peut supprimer les parenthèses, moyennant que l'on remplace par son opposé chacun des termes de cette expression. Ainsi :

$$a+(b-c+d)-f=a+b-c+d-f\,;$$
$$a-(b-c+d)-f=a-b+c-d-f.$$

- *Expressions algébriques.*

Une expression algébrique est un ensemble de lettres (représentant des nombres relatifs) et de nombres relatifs, sur lesquels il faut pratiquer certaines opérations indiquées par les symboles opératoires.

Une expression algébrique est dite :

— *entière*, s'il n'y figure aucune lettre en dénominateur ;

— *rationnelle*, s'il n'y figure aucune lettre sous un radical ;

— *fractionnaire*, s'il y figure une ou plusieurs lettres en dénominateur ;

— *irrationnelle*, s'il y figure une ou plusieurs lettres sous un radical.

Par exemple :

— $\dfrac{2\,ax}{5}$ est une expression entière ;

— $3\,x\,\sqrt{5}$ est une expression rationnelle, car, s'il figure un nombre sous un radical, on n'y trouve aucune lettre placée sous un radical ;

— $\dfrac{3\,ax-5}{2\,ab}$ est une expression fractionnaire ;

— $3\,\sqrt{x}$ est une expression irrationnelle.

On appelle *valeur numérique* d'une expression algébrique pour des valeurs données des lettres qui y figurent le nombre que l'on obtient en y remplaçant ces lettres par les valeurs données et en effectuant les calculs indiqués.

Par exemple, la valeur numérique de l'expression $\dfrac{2\,ax}{5}$ pour $a=-3$ et $x=10$ est :

$$\frac{2\times(-3)\times 10}{5}=-12.$$

— *Monômes.* On appelle monôme une expression entière dans laquelle les seules opérations portant sur des lettres sont des multiplications ou des élévations à une puissance. Exemples : $3\,ax^2$, $2/3\,abx^3$ sont des monômes. Le facteur numérique s'appelle le *coefficient* du monôme, les lettres constituent sa *partie littérale.*

— Deux monômes qui ont la même partie littérale sont dits *semblables.* Le *degré* d'un monôme par rapport à l'une des lettres qui y figurent est l'exposant de cette lettre : par exemple $3\,ax^2$ est du premier degré en a (exposant 1, non écrit) et du deuxième degré en x (exposant 2). Le degré d'un monôme par rapport à l'ensemble de ses lettres est la somme de tous ces degrés particuliers ; ici, $3\,ax^2$ est du troisième degré par rapport à l'ensemble de ses lettres.

— *Opérations sur les monômes.*

Addition. — Si les monômes sont semblables, on additionne les coefficients et l'on conserve la partie littérale. Exemple : $3\,ax+5\,ax=8\,ax$. Si les monômes ne sont pas semblables, on les écrit à la suite les uns des autres en les faisant précéder du signe « + » : l'expression devient un *polynôme.*

Multiplication d'un monôme par un monôme. — On multiplie entre eux les coefficients et entre elles les parties littérales. Ce calcul exige que l'on connaisse les règles du calcul des puissances (voir ci-dessous). On aura, par exemple :

$$-3\,ax^2\,y^5\,z\times 5\,axz^3=-15\,a^2\,x^3\,y^5\,z^4.$$

- *Calcul sur les puissances.*

Dans ce qui suit, a désigne un nombre relatif quelconque, les exposants m et n sont des nombres entiers qui peuvent être positifs, négatifs ou nuls (le cas d'exposants fractionnaires est étudié ci-dessous, au n° 4).

Cela posé, voici quelles sont les règles fondamentales du calcul des puissances :

$$a^m\times a^n=a^{m+n}\,;\quad (a^m)^n=a^{mn}\,;\quad a^m : a^n=a^{m-n}.$$

Exemples d'application de ces règles :

$$a^2\times a^5=a^7\,;\ a^{-2}\times a^3=a^1=$$
$$=a\left(\text{ou} : a^{-2}\times a^3=\frac{1}{a^2}\times a^3=a\right);$$
$$a^2 : a^5=\frac{a^2}{a^5}=a^{2-5}=a^{-3}=\frac{1}{a^3}.$$

- *Exposants fractionnaires.*

— *Convention.* $\sqrt[n]{a}$ peut s'écrire $a^{1/n}$; $1/n$ est un exposant fractionnaire.

Avec cette convention d'écriture, $a^{m/n}$ désigne la racine n-ième de a^m.

Polynômes.

● *Définitions.*

Un *polynôme algébrique* est une expression rationnelle constituée par une somme algébrique de monômes.

Exemples de polynômes :

$$3x + 1\ ;\quad 3x^2 - 5x - 2\ ;\quad 4ax^3 - 2bxy + cz - 2x^4 z\ ; \ldots$$

La *valeur numérique* d'un polynôme pour des valeurs données des lettres qui y figurent est le nombre que l'on obtient quand on remplace ces lettres par les valeurs données.

— *Réduction des termes semblables.* On appelle ainsi le fait de remplacer tous les monômes semblables par leur somme effectuée. Par exemple :

$$2abx^3 - 3b^2 y + 5az - 7abx^3 + 2b^2 y = -5abx^3 - b^2 y + 5az\,.$$

— *Degré d'un polynôme* : c'est le degré du monôme qui a le plus haut degré (après réduction). Par exemple, le polynôme précédent est de degré 3 par rapport à x (le monôme de plus haut degré par rapport à x est $-5abx^3$), de degré 2 par rapport à b, etc.

— *Polynôme homogène* : polynôme dont tous les termes sont du même degré par rapport à l'ensemble des lettres qui y figurent. Exemple :

$$a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

(chaque terme est du degré 3 par rapport à l'ensemble des lettres qui y figurent).

— *Polynôme ordonné par rapport à une lettre* : c'est un polynôme préalablement réduit et dont les termes sont écrits par ordre des puissances décroissantes ou croissantes de la lettre choisie. Par exemple, le polynôme

$$P = 2a^3 x - 5bx^5 + 4abx^2 - 7x^4 - abc$$

peut aussi s'écrire, en l'ordonnant par rapport à x :

$$P = -5bx^5 - 7x^4 + 4abx^2 + 2a^3 x - abc\,.$$

Bien entendu, on aurait pu tout aussi bien ordonner P par rapport aux puissances croissantes de x (le premier terme serait alors $-abc$, le second, $2a^3 x$, etc.), ou par rapport aux puissances décroissantes de a ; etc.

— On est souvent amené à considérer, en algèbre élémentaire, des polynômes de la forme :

$$A = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e\,.$$

(nous avons pris ici un exemple du quatrième degré en x, mais on aurait pu prendre A de n'importe quel degré en x). Dans ces polynômes, les lettres a, b, c, ... sont les coefficients des diverses puissances de la *variable* x ; le terme « e » est le *terme constant.* Ces dénominations proviennent du fait que dans des expressions telles que A, les coefficients a, b, c, ... désignent souvent des grandeurs invariables pour un polynôme donné, alors que x désigne une quantité essentiellement variable.

Il est commode, pour un polynôme de degré n, de renoncer à appeler les coefficients a, b, c, ..., mais d'utiliser des *indices*, c'est-à-dire des nombres écrits (en petits caractères) en bas et à droite d'une lettre, comme par exemple : a_1, qui doit se lire « a indice 1 », ou — s'il n'y a pas de confusion possible avec un exposant — « a un ». Un polynôme à une seule variable x, et de degré n, s'écrit alors de la façon suivante :

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + a_4 x^{n-4} + \cdots + a_{n-1} x + a_n\,.$$

● *Addition et soustraction des polynômes.*

— Pour additionner deux polynômes A et B, il suffit de les écrire à la suite l'un de l'autre et de réduire le nouveau polynôme obtenu, $A + B$.

— Pour soustraire un polynôme B d'un polynôme A, il suffit d'écrire, à la suite des termes du polynôme A, tous les termes du polynôme B changés de signe et de réduire le polynôme obtenu, $A - B$.

Exemples :

$$\begin{aligned} A &= 3ax^3 - 5bx^2 + 4ax - 7\,; \\ B &= ax^3 + 2bx^2 - 3bx + 5\,; \\ A + B &= 4ax^3 - 3bx^2 + 4ax - 3bx - 2\,; \\ A - B &= 2ax^3 - 7bx^2 + 4ax + 3bx - 12\,. \end{aligned}$$

(En disposant les polynômes à additionner l'un au-dessous de l'autre, les termes semblables étant sur une même colonne, les calculs sont immédiats.)

● *Multiplication des polynômes.*

— *Produit d'un polynôme par un nombre relatif.* La règle : $a(B + C) = aB + aC$ s'applique d'une manière générale ; on a ainsi (le polynôme A étant le même que plus haut) :

$$\begin{aligned} kA &= k(3ax^3 - 5bx^2 + 4ax - 7) \\ &= 3akx^3 - 5bkx^2 + 4akx - 7k\,. \end{aligned}$$

— *Produit d'un polynôme par un monôme.* On multiplie tous les termes du polynôme par le monôme donné et l'on ajoute les résultats. Exemple :

$$\begin{aligned} 2abx(3ax^3 - 5bx^2 + 4ax - 7) &= \\ = 6a^2 bx^4 - 10ab^2 x^3 &+ 8a^2 bx^2 - 14abx\,. \end{aligned}$$

(Quand on multiplie un monôme par un monôme, on a intérêt à faire d'abord le produit des coefficients numériques et à en écrire le résultat avec le signe du produit ; on écrit ensuite les lettres l'une après l'autre, dans l'ordre alphabétique, en appliquant les règles du calcul sur les puissances.)

— *Produit d'un polynôme par un polynôme.* Soit à faire le produit PQ, P et Q désignant les deux polynômes suivants :

$$P = 5bx^2 + 4ax - 7,\quad Q = 2ax^2 - 3bx + 5\,.$$

On multiplie chaque terme du polynôme P par le premier terme de Q, puis chaque terme de P par le second terme de Q, et ainsi de suite ; on ajoute ensuite les résultats, on réduit les termes semblables et l'on ordonne, le cas échéant. Quand les polynômes sont à une seule variable (comme c'est le cas ici) on peut disposer l'opération comme une multiplication banale, en plaçant les uns en dessous des autres les termes de même degré en x et en laissant éventuellement un vide pour les degrés manquants :

$$\begin{array}{rlllll} P: & 5bx^2 & +4ax & -7 & & \\ Q: & \underline{2ax^2} & \underline{-3bx} & \underline{+5} & & \\ P\times 2ax^2: & 10abx^4 & +8a^2x^3 & -14ax^2 & & \\ P\times(-3bx): & & -15b^2x^3 & -12abx^2 & +21bx & \\ P\times 5: & & & +25bx^2 & +20ax & -35 \end{array}$$

Par addition des trois produits partiels, on obtient, sous forme de polynôme ordonné suivant les puissances décroissantes de x :

$$\begin{aligned} PQ = 10abx^4 + 8a^2 x^3 - 15b^2 x^3 - 14ax^2 - 12abx^2 &+ \\ + 25bx^2 + 21bx + 20ax - 35&\,. \end{aligned}$$

S'il y avait eu, dans les trois produits partiels, des monômes semblables, nous en aurions fait la réduction ; mais tel n'était pas le cas, d'où la longueur de l'écriture du produit PQ.

— Une application importante du produit de deux polynômes concerne les *identités remarquables.* On appelle identité une égalité entre deux expressions littérales qui est vraie quelles que soient les valeurs qu'on donne aux lettres qui y figurent (cette définition est très restreinte ici ; pour une définition plus générale, se reporter au texte).

Appliquons les règles de la multiplication des polynômes au produit $(a + b)(a + b)$, qui peut s'écrire aussi $(a + b)^2$, puisque les deux expressions entre parenthèses sont les mêmes. En posant la multiplication comme ci-dessus, on a :

$$\begin{array}{r} a + b \\ \underline{a + b} \\ a^2 + ab \\ \underline{ab + b^2} \\ a^2 + 2ab + b^2\,, \end{array}$$

d'où l'égalité

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\,,$$

qui est vraie pour tout couple de valeurs a et b : c'est une identité remarquable.

Voici quelques autres identités remarquables couramment utilisées en algèbre élémentaire :

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2\,; \\ (a - b)(a + b) &= a^2 - b^2\,; \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3\,; \\ (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3\,; \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2)\,; \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2)\,. \end{aligned}$$

● *Mise en facteur.*

Les expressions que l'on traite en algèbre élémentaire ne sont pas « anarchiques » comme dans nos exemples : les parties littérales de polynômes ne comprennent alors que deux ou trois lettres, souvent une seule variable, et il est fréquent que des termes de même degré soient semblables (du moins dans les applications simples). De toute façon, on cherche toujours, en mathématiques, à obtenir l'expression la plus simple et la plus commode en vue de calculs ultérieurs ; pour cela, on fait subir systématiquement aux expressions certaines transformations, comme la réduction des termes, l'ordonnancement, etc. L'une de ces pratiques est très importante : il s'agit de la *mise en facteur.*

— *Exemple numérique.* S'il existe, dans une série de produits à ajouter ou à retrancher, des produits qui présentent un même facteur, ce facteur est dit *facteur commun* ; par exemple, dans l'expression

$$(3 \times 11) + (6 \times 5) - (3 \times 7)\,,$$

on constate que le facteur 3 est présent dans les trois produits, soit explicitement (1er et 3e produits), soit implicitement (2e produit : $6 = 3 \times 2$, d'où $6 \times 5 = 3 \times 2 \times 5$).

Pour effectuer la *mise en facteur commun* du facteur 3, on procède ainsi :

— on écrit 3 isolément ;

— on le multiplie par une parenthèse dans laquelle sont écrits les facteurs restants de chaque produit, précédés du signe « + » ou du signe « − » selon le signe du produit en question.

Ainsi, dans notre exemple, le facteur 3 sera suivi d'une parenthèse qui comprendra :

11 précédé du signe « + » (1er produit) ;

10 précédé du signe « + » : 3 est en effet un facteur du produit $3 \times 2 \times 5$; lorsqu'on l'a isolé, il ne reste plus, de ce produit, que $2 \times 5 = 10$;

7 précédé du signe « − » (3e produit).

D'où l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} (3 \times 11) + (6 \times 5) - (3 \times 7) &= 3(11 + 10 - 7) \\ &= 3 \times 14 = 42\,. \end{aligned}$$

— *Cas d'un polynôme.* Le problème est plus ou moins simple, selon la nature du polynôme. Nous résumons dans ce qui suit les cas les plus courants qui peuvent se présenter.

— Le facteur commun est un monôme : ce cas est très voisin de l'exemple numérique précédent ; en voici un exemple : le polynôme

$$P = 3a^2 x^4 - 5abx^3 + 7a^3 bx^2 + 6ab$$

est composé de quatre monômes qui contiennent chacun le facteur a (il y a bien des monômes dans lesquels ce facteur est au degré 2 ou 3, mais alors il n'est plus commun aux deuxième et troisième termes, dans lesquels il ne figure qu'à la puissance 1). On peut isoler ce facteur comme on l'a fait plus haut pour 3 ; les monômes restants, qu'on écrira entre parenthèses, seront obtenus en divisant les monômes de P par a, conformément aux règles de calcul sur les puissances ; d'où :

$$P = a(3ax^4 - 5bx^3 + 7a^2 bx^2 + 6b)\,.$$

Bien entendu, nous avons pris un exemple extrêmement simple ; le monôme facteur commun peut être plus « compliqué » que « a » ; par exemple les deux monômes

$$\frac{4\alpha^4 \gamma x^5 y^2}{5} \quad \text{et} \quad \frac{16\alpha^2 \gamma^4 x^3 y}{35}$$

ont en commun le facteur $\dfrac{4\alpha^2 \gamma x^3 y}{5}$.

Il est fréquent de rencontrer des polynômes dont la forme se prête à l'application d'une identité remarquable. Ainsi, considérons par exemple le polynôme suivant :

$$P = 9a^2 b^2 - 25x^2 y^6\,.$$

Le lecteur constatera sans peine que $9a^2 b^2$ est le carré de $3ab$ et que $25x^2 y^6$ est le carré de $5xy^3$; P est donc de la forme $A^2 - B^2$, expression que l'une des identités remarquables indiquées au n° 3 permet de mettre sous la forme $(A - B)(A + B)$; donc

$$P = (3ab - 5xy^3)(3ab + 5xy^3)\,.$$

Dans le cas général, la décomposition en facteurs d'un polynôme exige l'application de ces méthodes, mais aussi d'autres « astuces » de calcul... et une certaine habileté. C'est une opération très importante, car elle est à la base de la résolution des équations.

Les fractions rationnelles.

● *Quelques définitions.*

Une fraction rationnelle est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes.

— Simplifier une fraction rationnelle, c'est éliminer, au numérateur et au dénominateur, les facteurs communs (qui peuvent être des coefficients numériques, des monômes ou des polynômes). Lorsque tous les facteurs communs ont été éliminés, la fraction est dite *irréductible.*

— Une fraction rationnelle dont le dénominateur est égal à 0 n'a pas de sens : on dit qu'elle n'existe pas. Ainsi la fraction :

$$\frac{A}{a - b}$$

n'a pas de sens si $a = b$; elle a donc pour *condition d'existence* $a \neq b$.

— Pour simplifier une fraction rationnelle, il est nécessaire de mettre chacun de ses termes sous la forme d'un produit de facteurs : d'où l'importance des règles indiquées au paragraphe *d.*

● *Calculs sur les fractions rationnelles.*

Les règles de calcul sont les mêmes que pour les fractions ordinaires : réduction au même dénominateur, addition, soustraction, multiplication, division, élévation à une puissance, extraction de racines se font comme s'il s'agissait d'opérations sur des nombres, avec cette différence que les éléments sur lesquels on calcule sont des monômes ou des polynômes.

Par exemple, les fractions rationnelles A/B et C/D, dans lesquelles A, B, C et D désignent des polynômes ou des produits de polynômes, peuvent être réduites au même dénominateur comme des fractions ordinaires : un dénominateur commun sera le produit des deux polynômes B et D et l'on aura finalement les deux fractions AD/BD et BC/BD.

Les fractions rationnelles jouent un rôle important en algèbre et en analyse : voir pp. 7 à 73.

CALCUL SUR LES NOMBRES COMPLEXES.

Rappelons que deux nombres complexes $z = a + b\,\mathrm{i}$ et $z' = a - b\,\mathrm{i}$ sont dits *conjugués* ; on a $zz' = a^2 + b^2$. Sous sa forme trigonométrique un nombre complexe s'écrit :

$$z = a + b\,\mathrm{i} = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{1}$$

(ρ : module ; θ : argument), et l'on a $\rho^2 = a^2 + b^2$, $\cos\theta = a/\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sin\theta = b/\sqrt{a^2 + b^2}$.

Produit, quotient, puissances.

1 - *Produit.*

$$\begin{aligned} zz' &= (aa' - bb') + (ab' + ba') \\ &= \rho\rho'[\cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}\sin(\theta + \theta')] \end{aligned} \tag{2}$$

2 - *Quotient.*

$$\frac{z}{z'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}\,\mathrm{i} \tag{3}$$

ou

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'}[\cos(\theta - \theta') + \mathrm{i}\sin(\theta - \theta')] \tag{4}$$

3 - *Élévation à la puissance n.*

On montre que pour $z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$:

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)\,. \tag{5}$$

Dans le cas où $\rho = 1$ on obtient la *formule de Moivre* (1730) :

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta\,. \tag{6}$$

4 - *Forme exponentielle d'un nombre complexe.*

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho\, e^{i\theta}. \qquad (7)$$

Pour $\rho = 1$ on a la formule d'Euler :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \qquad (8)$$

Racines.

Un nombre complexe $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ possède n racines n-ièmes données par la formule :

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)} =$$

$$= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \qquad (9)$$

avec $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

1 - $\sqrt{i}, \sqrt[3]{i}$.

On remarque que le module de i est 1 et son argument $\theta = \pi/2$. D'où :

$$\sqrt{i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \qquad (10)$$

et :

$$\sqrt[3]{i}\ \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} \\ \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2} \\ -i \end{cases} \qquad (11)$$

2 - $\sqrt[n]{i}$.

En appelant α la valeur de $\sqrt[n]{i}$ obtenue en faisant $k = 1$ dans (9), on montre que toutes les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont de la forme α^k, avec $k = 0, 1, 2, \ldots, (2n-1)$.

ALGÈBRE LINÉAIRE.

Calcul de déterminants.

Le principe du calcul consiste à chercher (par tâtonnements, par intuition, etc.) les combinaisons qui permettent de réduire l'ordre du déterminant. On utilise notamment la propriété n° 7 p. 59 et l'on cherche à faire apparaître des zéros dans les lignes ou les colonnes. On développe ensuite le déterminant par rapport aux éléments de la ligne ou de la colonne ainsi simplifiée, conformément aux formules (11) et (12) de la propriété n° 6 des déterminants. En procédant de proche en proche, on parvient à un déterminant du 2e ordre.

Soit par exemple à calculer :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

On remarque qu'en multipliant la troisième ligne par -2 et en l'additionnant avec la deuxième, on va faire apparaître un zéro dans la première colonne $(2 - 2 = 0)$. Voici le calcul

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -4 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

(les éléments de la troisième ligne donnent $-2, -14, -8$ et -4 ; ajoutés aux éléments de la deuxième ligne de (1), ils donnent $0, -13, -4, 1$).

Multiplions les éléments de la troisième ligne par 3 et ajoutons-les aux éléments de la quatrième ligne ; on obtient :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -4 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 26 & 13 & 7 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

Enfin retranchons la troisième ligne de la première, pour faire apparaître un troisième zéro :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -16 & -11 & -6 \\ 0 & -13 & -4 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 26 & 13 & 7 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Les transformations « intérieures » sont terminées (toute autre combinaison ferait disparaître un ou plusieurs zéros). Appliquons maintenant la formule (12) en développant par rapport aux éléments de la première colonne : on obtient ici $(n = 4)$:

$$D = A_{11}\,a_{11} + A_{21}\,a_{21} + A_{31}\,a_{31} + A_{41}\,a_{41}. \qquad (5)$$

Mais comme $a_{11} = a_{21} = a_{41} = 0$, (5) devient :

$$D = A_{31}\,a_{31} = A_{31}, \qquad (6)$$

A_{31} étant le cofacteur de $a_{31} = 1$; comme la somme des indices $3 + 1 = 4$ est paire, A_{31} a pour valeur le mineur obtenu en rayant la troisième ligne et la première colonne de (4), soit :

$$D = A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -16 & -11 & -6 \\ 0 & -13 & -4 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 26 & 13 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -16 & -11 & -6 \\ -13 & -4 & 1 \\ 26 & 13 & 7 \end{vmatrix} \qquad (7)$$

(7) est un déterminant d'ordre 3 qu'on peut réduire à un déterminant d'ordre 2 en faisant apparaître de nouveaux zéros dans une ligne ou dans une colonne en utilisant la présence de l'élément 1 dans la deuxième ligne. Multiplions donc la deuxième ligne par 6 et ajoutons-la à la première ligne, on obtient un 0 à la place de -6 :

$$D = \begin{vmatrix} -94 & -35 & 0 \\ -13 & -4 & 1 \\ 26 & 13 & 7 \end{vmatrix} \qquad (8)$$

puis multiplions la deuxième ligne par -7 et ajoutons-la à la troisième ligne :

$$D = \begin{vmatrix} -94 & -35 & 0 \\ -13 & -4 & 1 \\ 117 & 41 & 0 \end{vmatrix} \qquad (9)$$

Développons D par rapport à la troisième colonne ; comme celle-ci contient deux éléments nuls $(a_{13} = a_{33} = 0)$, il reste :

$$D = A_{23}\,a_{23} = A_{23} \qquad (10)$$

(puisque $a_{23} = 1$). Le cofacteur est le mineur de $a_{23} = 1$, affecté du signe « $-$ » $(2 + 3 = 5$, impair), soit :

$$D = A_{23} = -\begin{vmatrix} -94 & -35 \\ 117 & 41 \end{vmatrix} \qquad (11)$$

On a donc :

$$D = -[(-94 \times 41) - (-35 \times 117)] = -241. \qquad (12)$$

Inversion des matrices carrées.

Soit la matrice :

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} \qquad (13)$$

et cherchons son inverse A^{-1}.

1 - Déterminons les cofacteurs des éléments de A (voir le tableau ci-après) :

2 - Le déterminant D a pour valeur, en développant par rapport à la première ligne :

$$D = -21 - 4 = -25 \qquad (14)$$

(il n'est pas nul, donc la matrice est non singulière).

3 - La matrice adjointe A^* est :

$$A^* = \begin{vmatrix} -7 & -4 & 10 \\ -2 & 6 & -15 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} \qquad (15)$$

D'où :

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{7}{25} & \frac{4}{25} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{25} & -\frac{6}{25} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{25} & \frac{3}{25} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} \qquad (16)$$

Élément a_{ij}	Mineur M_{ij}	$i + j$	Cofacteur A_{ij}
$a_{11} = 3$	$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -7$	2	-7
$a_{12} = 1$	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$	3	-4
$a_{13} = 0$	$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10$	4	10
$a_{21} = 2$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2$	3	-2
$a_{22} = -1$	$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$	4	6
$a_{23} = 1$	$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15$	5	-15
$a_{31} = 0$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$	4	1
$a_{32} = 5$	$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$	5	-3
$a_{33} = 2$	$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$	6	-5

POLYNÔMES, FRACTIONS RATIONNELLES, ÉQUATIONS.

Compléments sur les polynômes.

Idéaux de polynômes.

- *Définition.*

Soit l'ensemble des polynômes, $K[x]$, et un polynôme particulier A de cet ensemble ; les multiples de A forment une classe de congruence particulière qui constitue un sous-ensemble $\mathcal{I}$ de $K[x]$, caractérisé par les trois propriétés suivantes :

— $\mathcal{I}$ contient le polynôme nul ;

— si deux polynômes A_1 et A_2 appartiennent à $\mathcal{I}$, alors leur différence $A_1 - A_2$ appartient aussi à $\mathcal{I}$;

— si A_1 appartient à $\mathcal{I}$, alors, pour tout $B \in K[x]$, le polynôme BA appartient aussi à $\mathcal{I}$.

De façon générale, tout sous-ensemble $\mathcal{I}$ vérifiant ces trois propriétés est appelé un *idéal de polynômes.*

- *Théorème.*

Tout idéal $\mathcal{I}$ de l'ensemble $K[x]$ est constitué par l'ensemble des multiples d'un même polynôme A. On dit que *A engendre* l'idéal $\mathcal{I}$.

PGCD et PPCM de *n* polynômes.

- *Composition de l'idéal $\mathcal{I}$ selon les différents cas possibles.*

— Soit $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par deux polynômes A et B, c'est-à-dire l'ensemble des polynômes de la forme $AU + BV$. Si $\mathcal{I} = K[x]$, il n'existe pas, au sens strict, un polynôme D de degré supérieur ou égal à 1 qui l'engendre ; autrement dit il n'existe pas de polynôme qui divise exactement les polynômes A et B, qui sont alors dits *premiers entre eux.* (Il est, certes, possible de les diviser par une constante, c'est-à-dire par un polynôme de degré zéro, mais cela ne nous avance à rien, pas plus, en tout cas, que le fait de diviser par 1 des nombres premiers entre eux.)

— Si $\mathcal{I}$ est strictement inclus dans $K[x]$, alors les polynômes qui le constituent sont des multiples d'un polynôme D, de degré égal ou supérieur à l'unité, qu'on appelle *le plus grand commun diviseur* (PGCD) de A et B.

— Le cas $\mathcal{I} = 0$ exige que tous les polynômes de $\mathcal{I}$ soient nuls ; il ne nous intéresse donc pas.

- *Théorème de Bézout.*

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux polynômes A et B soient premiers entre eux est qu'il existe 2 polynômes U et V tels que :

$$AU + BV = 1.$$

- *Propriétés du PGCD.*

— Si l'on multiplie les polynômes A et B par un même polynôme P, leur PGCD est aussi multiplié par P ; inversement, si l'on divise ces polynômes par l'un de leurs diviseurs communs, le PGCD est divisé par ce diviseur.

— Une condition nécessaire et suffisante pour que des polynômes admettent un diviseur commun D comme PGCD est que les quotients de ces polynômes par D soient premiers entre eux (dans leur ensemble).

- *PPCM.*

— L'ensemble des multiples communs à deux polynômes constitue un idéal de l'anneau des polynômes. Il existe un polynôme M dont tous les multiples constituent l'ensemble des *multiples* communs aux deux polynômes ; M est le *plus petit commun multiple* (PPCM) des polynômes considérés.

— Le PPCM de deux polynômes est égal au quotient de leur produit par leur PGCD.

Théorème de Gauss-D'Alembert.

Ce théorème, connu aussi sous le nom de *théorème fondamental de l'algèbre*, s'énonce ainsi :
Tout polynôme de degré n à coefficients complexes admet n racines complexes, distinctes ou non.
Ce théorème a été affirmé par Girard (1625) et démontré par Gauss.
Pour le démontrer, il faut d'abord démontrer que tout polynôme de degré n à coefficients complexes admet au moins une racine. Cette démonstration fait appel à l'analyse ; nous renvoyons aux traités spécialisés.

Compléments sur les équations.

Factorisation du trinôme du second degré.

Le trinôme du second degré est un polynôme dont la forme générale est

$$f(x) = ax^2 + bx + c\,, \quad a \neq 0\,, \tag{1}$$

les coefficients a, b et c appartenant à un *corps* (ce sont des nombres *réels* dans le cas le plus élémentaire, bien connu des lycéens ; mais les coefficients peuvent aussi être complexes). Voici les étapes du calcul permettant la *mise en facteurs* du trinôme.

- On divise par a tous les termes du trinôme, et l'on met a en facteur :

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right). \tag{2}$$

- On *reconnaît* dans $x^2 + \frac{b}{a}x$ le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$; en effet :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

(application de l'identité bien connue concernant le carré d'une somme).
On peut donc écrire :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}. \tag{3}$$

- Portons ce résultat dans (2) ; il vient :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right], \tag{4}$$

qui s'écrit aussi, en effectuant,

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]; \tag{5}$$

cette forme est appelée la *forme canonique* du trinôme du second degré.

- Si nous nous plaçons dans le corps des réels (c'est-à-dire, du point de vue du calcul, si nous considérons qu'un nombre négatif n'a pas de racine carrée), nous sommes conduits, à ce stade de la décomposition, à distinguer *trois cas* :
 — ou bien la quantité $b^2 - 4ac$ est positive, et alors elle possède deux racines carrées réelles opposées, $-\sqrt{b^2 - 4ac}$ et $+\sqrt{b^2 - 4ac}$;
 — ou bien elle est négative, et elle ne possède pas de racine carrée réelle ;
 — ou bien elle est nulle, et le trinôme se réduit à $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

Appelons Δ cette quantité, nommée *discriminant* ; dans le premier cas, Δ admettant les racines $\pm\sqrt{\Delta}$, on peut écrire :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right], \tag{6}$$

c'est-à-dire :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right], \tag{7}$$

en appliquant à (6) l'identité

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)\,,$$

avec $A = \left(x + \frac{b}{2a}\right)$ et $B = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Dans le deuxième cas ($\Delta < 0$), $-\Delta$ est une quantité positive, et il en est de même pour $-\frac{\Delta}{4a^2}$; l'égalité (6) s'écrit donc sous la forme

$$f(x) = a(P^2 + Q^2)\,, \tag{8}$$

avec

$$P^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{et} \quad Q^2 = -\frac{\Delta}{4a^2},$$

et le polynôme est irréductible (on ne peut pas le mettre sous la forme d'un produit de deux binômes du premier degré).
Le troisième cas n'exige aucun commentaire.

- Si nous nous plaçons dans le corps des complexes, ces distinctions n'ont plus de raison d'être. Que Δ soit positif ou négatif, il admet toujours deux racines carrées, toutes deux réelles si $\Delta > 0$, toutes deux complexes (imaginaires conjuguées) si $\Delta < 0$, à savoir $\pm i\sqrt{-\Delta}$. On a donc, dans tous les cas, en désignant par $\sqrt{\Delta}$ l'une quelconque de ces racines,

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right), \tag{9}$$

le cas particulier $\Delta = 0$ conduisant à :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2. \tag{10}$$

L'équation du second degré.

Si l'on impose au trinôme du second degré de prendre la valeur zéro, nous allons devoir ne donner à la variable x que les valeurs qui vérifient l'équation $f(x) = 0$.

- *Dans le corps des complexes*, l'équation du second degré admet toujours deux racines, distinctes ou confondues, réelles ou complexes.

Exemple : Résoudre l'équation $2x^2 - 6x + 9 = 0$. On a immédiatement : $\Delta = 36 - 72 = -36$.
— Factorisation du trinôme écrit au premier membre de cette équation :

$$2x^2 - 6x + 9 = 2\left(x - \frac{6}{4} + \frac{\sqrt{-36}}{4}\right) \times$$
$$\times \left(x - \frac{6}{4} - \frac{\sqrt{-36}}{4}\right) = 0\,,$$

soit, puisque $\sqrt{-36} = 6i$,

$$2\left(x - \frac{3}{2} + \frac{3i}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} - \frac{3i}{2}\right) = 0.$$

— Pour qu'un produit soit nul, il faut et il suffit qu'un de ses facteurs soit nul ; donc les deux racines de l'équation proposée sont :

$$x' = \frac{3 - 3i}{2} = \frac{3(1 - i)}{2} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{3(1 + i)}{2}\,;$$

ce sont deux racines complexes conjuguées.

- *Dans le corps des réels*, l'équation précédente aurait été dite « impossible » ; on doit donc discuter l'existence des racines.

- *D'une manière générale*, lorsque les racines existent (c'est-à-dire dans tous les cas si l'on se place dans le champ complexe, dans certains cas seulement si l'on se limite au champ réel) le trinôme du second degré peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x - x')(x - x'')\,,$$

x' et x'' désignant les deux racines, qui peuvent être confondues en une seule racine, dite *racine double*, si $\Delta = 0$.

Équation du troisième degré :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

La méthode de Tartaglia-Cardan repose sur une série de « trouvailles » et d'idées audacieuses.

- *Méthode générale de résolution.*
 — On divise tous les termes par a, ce qui donne l'équation suivante, équivalente à l'équation proposée :

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0. \tag{1}$$

— On remplace x par l'inconnue z, telle que $z = x + \frac{b}{3a}$, transformation qui a pour effet de faire disparaître le terme en x^2 et de conduire à l'équation équivalente

$$z^3 + pz + q = 0. \tag{2}$$

— Pour résoudre (2), on pose $z = u + v$, et l'on obtient l'équation

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0. \tag{3}$$

— Si $u + v$ vérifie (2) et si $3uv + p = 0$, on aboutit au système équivalent

$$\left.\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q\,, \\ uv &= -\frac{p}{3}\,, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

qui s'écrit aussi :

$$\left.\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q\,, \\ u^3 v^3 &= -\frac{p^3}{27}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

u^3 et v^3, dont on connaît la somme, $S = -q$, et le produit, $P = -p^3/27$, sont racines de l'équation du second degré suivante :

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0\,, \tag{5}$$

dont le discriminant est

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} = \frac{4p^3 + 27q^2}{27}.$$

Les racines (réelles ou complexes) de (5) sont :

$$t' = \frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad t'' = \frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

L'une de ces racines, par exemple t', est égale à u^3 ; l'autre à v^3 ; on a donc $u = \sqrt[3]{t'}$ et $v = \sqrt[3]{t''}$, d'où, puisque $z = u + v$;

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}}\,,$$

formule — en apparence assez compliquée — connue sous le nom de *formule de Cardan*.

— Soit, par exemple, $u^3 = t'$; alors, comme nous l'avons dit, $u = \sqrt[3]{t'}$. Mais, puisque nous sommes dans le champ complexe, nous devons tenir compte de ce qu'un nombre complexe comme t' possède *trois racines cubiques* ; si l'on nomme l'une d'elles α (réelle ou complexe), les deux autres sont $j\alpha$ et $j^2\alpha$, j et j^2 étant les racines cubiques imaginaires de l'unité. On a donc :

$$u_1 = \alpha\,, \quad u_2 = j\alpha\,, \quad u_3 = j^2\alpha\,;$$

et, comme $uv = -p/3$, d'où $v = -p/3u$,

$$v_1 = -\frac{p}{3\alpha}\,, \quad v_2 = -\frac{p}{3j\alpha} = -j^2\frac{p}{3\alpha}\,,$$
$$v_3 = -\frac{p}{3j^2\alpha} = -\frac{p}{3\alpha}j \quad \left(\text{car } \frac{1}{j} = j^2\right).$$

— Finalement on obtient les trois racines

$$z_1 = \alpha - \frac{p}{3\alpha}\,, \quad z_2 = j\alpha - j^2\frac{p}{3\alpha}\,, \quad z_3 = j^2\alpha - j\frac{p}{3\alpha}\,,$$

les coefficients étant supposés complexes.

- *Cas où les coefficients p et q sont réels.* C'était le cas traité par Cardan. Étudions-le d'abord sous son aspect général. La résolution de l'équation $z^3 + pz + q = 0$ conduit à résoudre l'équation du second degré $t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$, dont le discriminant, $\Delta = \frac{4p^3 + 27q^2}{27}$, est du même signe que $4p^3 + 27q^2$ (la division par 27 — nombre positif — n'intervient pas quant au signe de Δ). Si nous nous reportons au tableau résumant la discussion de l'équation du second degré dans le cas de coefficients réels, nous voyons que :
 — Si $\Delta > 0$, t' et t'' sont des racines réelles ; par conséquent $\sqrt[3]{t'} = \alpha$ est réelle. Mais les deux autres racines cubiques de t', à savoir $j\alpha$ et $j^2\alpha$, sont complexes (nous n'avons pas le droit de les oublier !). Donc z_1 est réel, z_2 et z_3 sont complexes conjugués.
 — Si $\Delta = 0$, $t' = t''$ = nombre réel ; donc $u = v = \alpha = \sqrt[3]{t'}$ est réel et $j\alpha$ et $j^2\alpha$ sont, ici encore, complexes conjugués.
 — Si $\Delta < 0$, t' et t'' (c'est-à-dire u^3 et v^3) sont complexes conjugués, ainsi donc que u et v (puisque le produit uv est réel et égal à $-p/3$) ; donc $z = u + v$ est réel et l'équation admet trois racines réelles, z_1, z_2, z_3.

Équation du quatrième degré :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

La *méthode de Ferrari* consiste :
— à diviser tous les termes par a, pour obtenir une équation de la forme :

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0\,;$$

— à décomposer le premier membre en un produit de trinômes du second degré en considérant que $x^4 + px^3$ est le début du développement du carré de $\left(x^2 + \frac{p}{2}x + \lambda\right)$, λ étant déterminé par les conditions du calcul (conditions qui conduisent à une équation du troisième degré, dont l'inconnue est λ, et qui est résolue par la formule de Cardan.
On obtient alors l'équation sous la forme :

$$(Ax^2 + Bx + C)(A'x^2 + B'x + C') = 0\,,$$

et l'on trouve, sans difficulté, ses quatre racines (deux pour chaque trinôme), qui sont toutes complexes si les coefficients a, b, ... sont complexes, réelles ou complexes conjuguées si les coefficients sont réels.
— Remarque : La méthode ressemble à celle qui est employée pour l'équation du second degré, pour laquelle on utilisait le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, comme on l'a indiqué ci-dessus (discriminant) et comme on l'enseigne dans tous les manuels scolaires élémentaires. La méthode de Ferrari conduit généralement à des calculs compliqués. Dans la pratique, on cherche à simplifier le problème en utilisant — avec l'astuce que donne l'expérience du calcul algébrique — les particularités de l'équation proposée.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Principaux résultats de la géométrie classique.

La géométrie classique est celle qu'on enseigne encore dans les établissements scolaires. Elle présente un double intérêt : 1° elle habitue de jeunes esprits, peu entraînés à l'abstraction, à raisonner avec rigueur sur des notions voisines de l'expérience concrète quotidienne ; 2° elle est commode : quand nous cherchons combien de rouleaux de papier peint sont nécessaires pour tapisser notre chambre, nous faisons un calcul d'aires en utilisant les formules de la géométrie classique ; de même — et d'une façon un peu plus compliquée — nous faisons usage de la science euclidienne pour tracer le plan d'une maison ou d'un pont, pour représenter en projection un objet quelconque, etc.

Nous avons expliqué comment cette géométrie n'était qu'un cas particulier, une application très limitée, des géométries abstraites et générales édifiées par les mathématiciens du XIXe et du XXe siècle, et il nous a semblé inutile d'en reprendre systématiquement les propositions et les démonstrations, au demeurant faciles à retrouver dans n'importe quel manuel scolaire élémentaire. Par contre, il est sans doute intéressant de regrouper les résultats classiques en un bref répertoire alphabétique, débarrassé de l'armature logique qui a été présentée et commentée pp. 75 à 88 ; c'est ce que nous faisons dans ce qui suit. Le lecteur — et en particulier l'élève débutant — y retrouvera sans difficulté la définition, la règle, la propriété, la formule dont il peut avoir besoin.

• *Adjacent.* Adjectif signifiant *contigu* ; s'emploie surtout en parlant d'*angles*. Deux angles sont dits « adjacents » s'ils ont même sommet, un côté commun, et s'ils sont situés de part et d'autre de ce côté commun. Une propriété importante : deux angles adjacents supplémentaires ont leurs côtés non communs en ligne droite ; deux angles adjacents complémentaires ont leurs côtés non communs perpendiculaires.

• *Aigu* (en parlant d'un angle). Angle inférieur à un angle droit (voir *angle*).

• *Aires.* On appelle *aire* un nombre mesurant une surface. Voici les formules donnant les aires des surfaces les plus usuelles.

1° *Surfaces planes.*

S désigne l'aire considérée.

— Carré de côté a : $S = a^2$.

— Rectangle de longueur L et de largeur l : $S = L \times l$.

— Parallélogramme de hauteur h relative à un côté de longueur b : $S = b \times h$.

— Losange de diagonales d et d' : $S = (d \times d')/2$.

— Trapèze de bases B et b, de hauteur h :

$$S = \frac{(B+b) \times h}{2}.$$

— Triangle : en appelant a, b, c les longueurs des trois côtés : h, h', h'' les hauteurs correspondant respectivement à ces côtés ; $2p$ le périmètre ($2p = a + b + c$) ; R le rayon du cercle circonscrit ; r le rayon du cercle inscrit, on a :

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{bh'}{2} = \frac{ch''}{2} = pr$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$= \frac{abc}{4R}.$$

— Triangle rectangle d'hypoténuse a :

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{bc}{2}.$$

— Polygones réguliers inscrits ou circonscrits à un cercle de rayon R :

Polygone	Inscrit	Circonscrit
Triangle équilatéral	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$	$3R^2\sqrt{3}$
Carré	$2R^2$	$4R^2$
Hexagone convexe	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$	$2R^2\sqrt{3}$
Octogone convexe	$2R^2\sqrt{2}$	$8R^2(\sqrt{2}-1)$
Pentagone convexe	$\frac{5R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$	
Décagone convexe	$\frac{5R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	

On a aussi, pour tout polygone régulier, en appelant a l'apothème et p le périmètre :

$$S = \frac{a \times p}{2}.$$

— Polygone quelconque : on décompose le polygone en différentes parties (généralement des triangles), obtenues en menant, par exemple, les diagonales issues d'un même sommet, et on calcule l'aire de chacune de ces parties ; l'aire du polygone est la somme de ces aires partielles.

— Cercle de rayon R et de diamètre $D = 2R$:

$$S = \pi R^2 = \pi \frac{D^2}{4} \text{ (voir } pi\text{)}.$$

— Secteur circulaire d'angle α et de rayon R :

$$\alpha \text{ en radians : } S = \frac{R^2 \alpha}{2};$$
$$\alpha \text{ en degrés : } S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360};$$
$$\alpha \text{ en grades : } S = \frac{\pi R^2 \alpha}{400}.$$

2° *Surfaces des polyèdres.*

A = aire latérale du polyèdre, S = aire totale = aire latérale + aires des bases.

— Prisme droit de hauteur H et de périmètre de base p : $A = p \times H$.

— Parallélépipède rectangle d'arêtes a, b, c : $S = 2(ab + bc + ca)$.

— Cube d'arête a : $S = 6a^2$.

— Pyramide régulière (périmètre de base = p, apothème = a, apothème de la base = b) :

$$A = \frac{p \times a}{2}; \quad S = \frac{p(a+b)}{2}.$$

— Tronc de pyramide régulier (périmètres des bases = p et p', apothème a) :

$$A = \frac{(p+p')a}{2}.$$

3° *Surfaces courbes.*

Mêmes notations.

— Cylindre droit à base circulaire (rayon de base = R, hauteur = H) :

$$A = 2\pi RH, \quad S = 2\pi R(R+H).$$

— Cône droit à base circulaire (rayon de base = R, génératrice = a) :

$$A = \pi Ra, \quad S = \pi R(R+a).$$

— Tronc de cône droit à bases circulaires (rayons des bases R et r, génératrice = a) :

$$A = \pi(R+r)a, \quad S = \pi R(R+a) + \pi r(r+a).$$

— Surface engendrée par un segment $AB = a$ tournant autour d'un axe situé dans le même plan que AB mais ne le traversant pas :

$$S = 2\pi A'B' \cdot IO \text{ (voir figure 1)}.$$

— Surface engendrée par une ligne polygonale régulière tournant autour d'un diamètre du cercle inscrit ne la traversant pas (voir figure 2) :

$$S = 2\pi r \cdot A'B'.$$

— Aire de la sphère (rayon = R, diamètre = D) : $S = 4\pi R^2 = \pi D^2$.

— Zone sphérique (rayon de la sphère : R ; hauteur de la zone : H) : $S = 2\pi RH$.

— Fuseau sphérique (angle dièdre α) : $S = 2R^2\alpha$ (α en radians).

• *Angle.* Portion de plan limitée par deux demi-droites (les *côtés* de l'angle) issues d'un même point (*sommet* de l'angle). Pour la mesure des angles, voir p. 89. Un *angle plat* est un angle dont les côtés sont dans le prolongement l'un de l'autre ; un *angle droit* est la moitié d'un angle plat. Lorsqu'une droite coupe deux autres droites (voir figure 3) on a les définitions suivantes :

1 et 5 : angles alternes-externes ; 3 et 4 : angles alternes-internes ; 2 et 4 : angles intérieurs et d'un même côté ; 3 et 5 : angles correspondants.

• *Angle dans l'espace.* Étant donné deux droites D et D', l'angle de ces deux droites dans l'espace est l'angle que forment deux parallèles à D et D' menées d'un point O quelconque.

• *Angle d'une droite et d'un plan.* C'est l'angle aigu formé par la droite et sa projection orthogonale sur le plan.

• *Angle de deux plans.* Voir *dièdre*.

• *Apothème d'un polygone régulier.* C'est le rayon du cercle inscrit au polygone. En appelant a l'apothème, c le côté du polygone, R le rayon du cercle circonscrit, on a :

$$a^2 = R^2 - \frac{c^2}{4}.$$

• *Apothème d'une pyramide régulière.* C'est la hauteur d'une de ses faces, issue du sommet de la pyramide.

• *Arc de cercle.* Portion de cercle limitée par deux points.

• *Axe radical de deux cercles.* C'est l'ensemble des points qui ont *même puissance* par rapport à ces deux cercles (voir : *Puissance*). Appelons O et O' les centres des deux cercles, I le milieu de OO', A le point où l'axe radical, perpendiculaire à OO', coupe OO', on a :

$$2\,\overline{OO'} \cdot \overline{IA} = R^2 - R'^2.$$

Si les cercles sont sécants, leur axe radical est la corde commune prolongée indéfiniment ; s'ils sont tangents, c'est la tangente commune au point de contact des deux cercles. S'ils sont extérieurs ou intérieurs, il faut faire une construction spéciale ; l'axe radical ne coupe aucun des deux cercles.

• *Bissecteur d'un dièdre* : Demi-plan issu de l'arête qui divise le dièdre en deux dièdres égaux. Tout point du bissecteur est équidistant des deux faces du dièdre, et, inversement, tout point intérieur au dièdre équidistant de ses deux faces est dans le bissecteur.

• *Bissectrice d'un angle.* Demi-droite issue du sommet qui partage l'angle en deux angles égaux. Un point intérieur à un angle est équidistant des deux côtés de cet angle si, et seulement si, il est situé sur la bissectrice de cet angle.

— Dans un triangle, il y a trois angles, donc trois bissectrices intérieures et trois bissectrices extérieures. Les bissectrices intérieures sont concourantes au centre du cercle inscrit au triangle ; les bissectrices extérieures concourent deux à deux avec la bissectrice intérieure du troisième angle au centre du cercle exinscrit dans le troisième angle.

— Propriétés des bissectrices dans un triangle (voir figure 4) :

$$\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}; \quad \frac{D'B}{AB} = \frac{D'C}{AC}; \quad DB = \frac{ac}{b+c};$$

$$D'B = \frac{ac}{b-c} \quad (b > c).$$

D et D' sont conjugués harmoniques par rapport à B et C. $AB \cdot AC = AD^2 + BD \cdot DC = BD' \cdot D'C - AD'^2$.

$$AD^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2}; \quad AD'^2 = \frac{a^2 bc}{(b-c)^2} - bc$$
$$(b > c).$$

• *Capable (arc).* Arc de cercle tel que, de chaque point M appartenant à l'arc considéré, on voit un segment donné sous un angle donné α (figure 5).

• *Carré.* Parallélogramme dont les quatre côtés sont égaux et dont les angles sont droits. Pour inscrire un carré dans un cercle, on trace deux diamètres perpendiculaires dont on joint les extrémités. En appelant a le côté : diagonale = $a\sqrt{2}$, rayon du cercle circonscrit $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

• *Centre de gravité d'un triangle.* Point de concours des médianes. Il est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet correspondant. Il est aligné avec le centre O du cercle circonscrit et l'orthocentre H, et se trouve au tiers du segment OH à partir de O.

• *Cercle.* Courbe plane fermée dont tous les points sont à la même distance R (*rayon*) d'un point fixe intérieur (*centre*) ; inversement, si un point M est à la distance $OM = R$ de O, il appartient au cercle. Voici quelques propriétés classiques du cercle.

— Tout cercle partage le plan en deux régions ; la région intérieure contient le centre O et tout point M' de cette région est tel que $OM' < R$; la région extérieure contient les points M'' tels que $OM'' > R$.

— Tout diamètre est axe de symétrie ; le centre O est centre de symétrie.

— Soit une droite D, d la distance de O à cette droite. Si $d = 0$, D est un diamètre ; si $d = R$, D est tangente au cercle ; si $0 < d < R$, D est sécante au cercle (deux points communs) ; si $d > R$, D est extérieure au cercle.

— *Positions relatives de deux cercles* de rayons R et R' ; $OO' = d$.

$d > R + R'$: cercles extérieurs ;
$d = R + R'$: cercles tangents extérieurement ;
$d = |R - R'|$: cercles tangents intérieurement ;
$d = 0$: cercles concentriques ;
$d < |R - R'|$: cercles intérieurs ;
$|R - R'| < d < R + R'$: cercles sécants.

— *Figures caractéristiques* dans un cercle : voir figure 6.

— *Angle de deux cercles sécants* : c'est l'angle que font les tangentes aux deux cercles en l'un des deux points communs. Si cet angle est droit, les cercles sont dits *orthogonaux* ; on a alors, avec $d = OO'$, $R^2 + R'^2 = d^2$.

— Construction d'un cercle passant par trois points donnés A, B, C : on mène les médiatrices de deux quelconques des segments AB, AC et BC ; le centre du cercle cherché est leur intersection.

— La longueur de la circonférence est $l = 2\pi R$.

• *Circonscrit.* Cercle circonscrit à un triangle : cercle passant par ses trois sommets. S'il existe un cercle passant par tous les sommets d'un polygone, ce cercle est dit circonscrit à ce polygone.

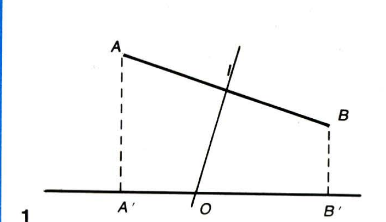
— Dans le cas d'un triangle, le centre du cercle circonscrit est le point de concours des médiatrices du triangle ; son rayon R est donné par les formules ci-dessous (voir aussi *aire*) :

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},$$
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

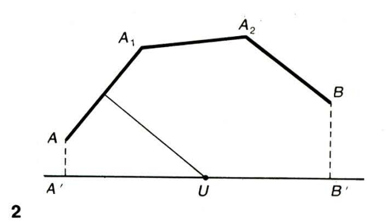
• *Complément (d'un angle).* Angle qu'il faut ajouter à un angle donné pour obtenir un angle droit.

• *Complémentaire.* Angles complémentaires : angles dont la somme est égale à un angle droit.

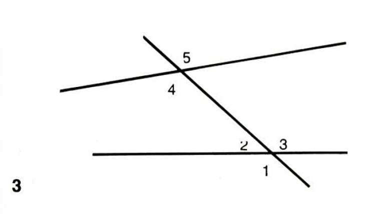
• *Concourantes (droites).* Droites ayant un point commun. Dans un triangle, les droites remarquables suivantes sont concourantes : hauteurs (concourantes à l'orthocentre H du triangle), médiatrices (centre du cercle circonscrit), médianes (centre de gravité), bissectrices intérieures (centre du cercle inscrit dans le triangle), une bissectrice intérieure et les bissectrices extérieures des deux autres angles (centre d'un cercle exinscrit).



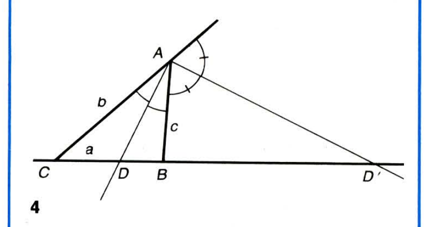
1



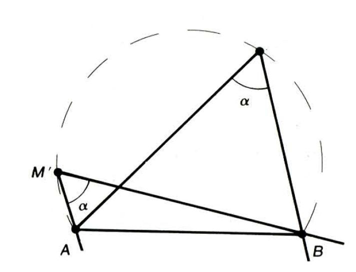
2



3

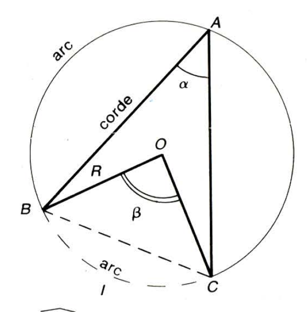


4



en pointillé : arc capable de l'angle α relativement aux segments AB

5



$\widehat{BAC} = \alpha$ = angle inscrit.

$\widehat{BOC} = \beta$ = angle ou centre.

$\beta = 2\alpha$

Arc de longueur $l = \beta$ radians $= \frac{L}{R}$

Si $\alpha = 1$ droit, BC est un diamètre.

6

• *Cône.* Solide limité par une surface conique à une nappe et par un plan rencontrant toutes les génératrices ; l'intersection du plan et de la surface conique est la *base* du cône ; la distance du sommet S au plan est la *hauteur* du cône.

— *Cône à base circulaire* : cône dont la directrice (base) est un cercle.

— *Cône de révolution* (cône droit à base circulaire) : cône à base circulaire dont le sommet se trouve sur l'axe du cercle de base. Un cône de révolution est engendré par un triangle rectangle tournant autour d'un des côtés de l'angle droit.

— *Plan tangent* : le plan tangent en M (distinct du sommet S) à un cône contient les tangentes en M à toutes les courbes tracées sur le cône et passant par M. Il contient aussi la génératrice SM et la tangente à la directrice au point A où SM coupe cette directrice.

— *Cône circonscrit à une sphère* : cône de révolution dont les génératrices sont tangentes à la sphère. Son axe est le diamètre de la sphère passant par le sommet.

• *Conique (surface).* Une surface conique est la surface engendrée par une droite D passant par un point fixe S et se déplaçant en s'appuyant sur une courbe plane (C) appelée *directrice* de la surface. Le point S est le *sommet*, la droite D, mobile, la *génératrice.* Une surface conique se compose de deux *nappes* séparées par le sommet ; chaque nappe est engendrée par une des demi-droites d'origine S portées par D.

• *Conjugués harmoniques.* Voir *harmonique.*

• *Couronne.* Portion de plan située entre deux cercles concentriques. Si l'on appelle R et R' les rayons des deux cercles, l'aire de la couronne est donnée par : $S = \pi(R^2 - R'^2)$.

• *Cube.* Solide appartenant à la famille des parallélépipèdes. Un cube possède six faces égales (six carrés), huit sommets et huit arêtes égales. Il possède : un centre de symétrie (point de concours des diagonales), neuf axes de symétrie et neuf plans de symétrie. En désignant par a la longueur commune des arêtes, la sphère inscrite a pour rayon $a/2$; la sphère circonscrite a pour rayon $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

• *Cylindre.* Solide limité par une surface cylindrique, et deux plans parallèles rencontrant les génératrices. Les courbes d'intersection de la surface par ces deux plans sont les *bases* du cylindre. La distance entre les plans des deux bases est la hauteur du cylindre. Un cylindre à base circulaire est un cylindre dont la base est un cercle ; il est dit de révolution si, en outre, les génératrices sont perpendiculaires au plan de base. L'axe du cercle de base est alors l'axe du cylindre. Comme pour le cône (voir ce mot), on définit les plans tangents à un cylindre et le cylindre circonscrit à une sphère (un cylindre est un cône dont le sommet S est reporté à l'infini).

• *Cylindrique (surface).* Surface engendrée par une droite qui reste parallèle à une direction fixe et qui s'appuie sur une courbe fixe (directrice).

• *Décagone.* Polygone à dix côtés. Construction du décagone régulier inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R : on trace un cercle auxiliaire de diamètre $PO = R$ et la tangente OA à ce cercle ; on mène AO', qui coupe le cercle auxiliaire en M et M' ; on a $AM = c$ (côté du décagone convexe) et $AM' = c'$ (côté du décagone étoilé). On reporte ces longueurs consécutivement sur le cercle (O, R) et l'on obtient le décagone demandé (figure 7).

En appelant A l'angle du décagone, α l'angle au centre, c le côté, a l'apothème, on a :

Décagone convexe :	Décagone étoilé :
$\widehat{A} = 144°$,	$\widehat{A'} = 72°$,
$\alpha = 36°$,	$\alpha' = 108°$,
$c = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$,	$c' = \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)$,
$a = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.	$a' = \frac{R}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

• *Demi-plan.* Portion de plan limitée d'un côté par une droite et illimitée de l'autre.

• *Développement (d'une surface).* Figure plane obtenue quand on étale sur un plan la surface latérale de certains solides : c'est un rectangle pour un prisme droit, un secteur polygonal régulier pour la pyramide régulière, un rectangle pour le cylindre de révolution, un secteur circulaire pour le cône de révolution.

• *Diagonale (d'un polygone ou d'un polyèdre).* Segment qui joint deux sommets (non consécutifs pour un polygone, non situés sur une même face pour un polyèdre). Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu ; en outre, si le parallélogramme est un rectangle, elles sont égales ; dans un losange, elles sont, de plus, perpendiculaires. Dans un parallélépipède rectangle d'arêtes a, b, c, la diagonale d a pour longueur : $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

• *Diamètre (d'un cercle ou d'une sphère).* Droite passant par le centre de ce cercle ou de cette sphère.

• *Dièdre.* Portion d'espace limitée par deux demi-plans issus d'une même droite ; les demi-plans sont les *faces*, la droite l'*arête* du dièdre (image : un livre ouvert ; le « dos » du livre est l'arête, le dièdre est la portion d'espace comprise entre les deux pages du livre, supposées planes et indéfiniment prolongées à l'infini). Un dièdre peut être plat (les deux faces dans le prolongement l'une de l'autre), droit (les deux faces perpendiculaires). La section d'un dièdre par un plan perpendiculaire à l'arête détermine sur les deux faces un angle appelé *rectiligne du dièdre.*

• *Distance d'un point à une droite.* Longueur comprise entre le point et le pied de la perpendiculaire menée du point à la droite.

• *Distance d'un point à un plan.* Même définition, mais en remplaçant « droite » par « plan ».

• *Dodécagone.* Polygone à douze côtés. Construction du dodécagone régulier inscrit dans un cercle : on construit d'abord l'hexagone inscrit, puis les bissectrices des angles au centre dont les côtés passent par les sommets de l'hexagone, ce qui donne, sur le cercle, les six autres sommets du dodécagone cherché (les six premiers sont ceux de l'hexagone inscrit).

• *Enveloppe.* Courbe fixe à laquelle une courbe variable reste constamment tangente.

• *Équilatéral (triangle).* Triangle dont les trois côtés sont égaux. Ses angles sont aussi égaux et valent 60° chacun. En appelant c le côté, a l'apothème, h la hauteur, R le rayon du cercle circonscrit et r celui du cercle inscrit, on a :

$$h = \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{2}, \quad a = r = \frac{c\sqrt{3}}{6} = \frac{R}{2}, \quad R = \frac{c\sqrt{3}}{3}.$$

• *Exinscrit (cercle).* Cercle tangent aux prolongements des deux côtés de l'un des angles d'un triangle et au troisième côté de ce triangle. Son centre est à l'intersection de la bissectrice intérieure de l'angle considéré et des bissectrices extérieures des deux autres angles du triangle.

• *Fuseau sphérique* : Portion de surface sphérique comprise entre deux demi-grands cercles de même diamètre.

• *Gauche (surface).* Surface dont tous les points ne sont pas dans un même plan.

• *Grand cercle.* Sur une sphère : cercle tracé sur la sphère et dont le centre (et le rayon) sont ceux de la sphère en question (parmi tous les cercles tracés sur la sphère, les grands cercles sont ceux dont le rayon est maximal).

• *Harmonique.* Se dit en particulier d'une division formée par quatre points A, B, C, D alignés, tels que les deux premiers divisent le segment admettant les deux autres pour extrémités selon un même rapport, c'est-à-dire que l'on ait, *en valeur absolue* : $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$. A et B sont alors dits *conjugués harmoniques* par rapport à C et D. Inversement, C et D sont conjugués harmoniques par rapport à A et B. Les quatre points étant donnés dans l'ordre A, B, C, D, s'ils sont en division harmonique, sont tels que les segments AB et CD se chevauchent (par exemple A à l'extérieur de CD et B à l'intérieur, ou le contraire).

• *Harmonique (faisceau)* : ensemble de quatre droites issues d'un même point O et passant par quatre points qui forment une division harmonique. O est le *sommet* du faisceau, ces droites sont ses *rayons.* Les rayons sont dits deux à deux conjugués harmoniques par rapport aux deux autres.

Principales propriétés des faisceaux harmoniques :

1° Un faisceau harmonique détermine sur une sécante quelconque une division harmonique.

2° Pour que quatre droites concourantes forment un faisceau harmonique, il faut et il suffit que trois d'entre elles déterminent sur une parallèle à la quatrième des segments égaux.

3° Deux rayons conjugués d'un faisceau sont perpendiculaires si, et seulement si, ils sont les bissectrices des angles formés par les deux autres rayons.

• *Harmonique (relation).* Si l'on tient compte des mesures algébriques des segments, on exprime que quatre points, A, B, C, D, forment une division harmonique par :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}.$$

— Appelons a, b, c, d les abscisses de A, B, C, D ; la relation précédente conduit à :

$$(a + b)(c + d) = 2(ab + cd).$$

Si l'on prend comme origine le point A ($a = 0$), cette relation devient :

$$b(c + d) = 2\,cd, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{2}{b}.$$

Si l'on prend comme origine le milieu I du segment AB ($a = -b$), elle devient :

$$a^2 = cd, \text{ soit } IA^2 = IB^2 = \overline{IC}\,.\,\overline{ID}.$$

• *Hauteur. Propriétés des hauteurs d'un triangle.* On démontre que l'on a, avec les notations h_a, h_b, h_c pour les hauteurs respectivement issues des sommets A, B et C :

$$bc = 2\,Rh_a\,;\; h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(formules analogues pour h_b et h_c.

On a aussi :

$ah_a = bh_b = ch_c = 2\,S$ et les relations trigonométriques suivantes :

$$h_a = c \sin B = b \sin C\,;$$
$$h_b = a \sin C = c \sin A\,;$$
$$h_c = b \sin A = a \sin B.$$

• *Hexagone.* Polygone à six côtés et six sommets. Relations concernant l'hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre R :

angle du polygone = 120° ; angle au centre = 60° ; côté = R.

• *Homologues (éléments)* : éléments qui se correspondent dans deux figures.

• *Homothétie* : voir ci-dessous, **C.**

• *Hypoténuse.* Côté d'un triangle rectangle qui est opposé à l'angle droit. L'hypoténuse est diamètre du cercle circonscrit au triangle et égale au double de la médiane issue du sommet de l'angle droit. Si l'on appelle A le sommet de l'angle droit, BC l'hypoténuse, H le pied de la hauteur issue de A sur BC, on a les relations suivantes dites *relations métriques dans le triangle rectangle* : $AB^2 = BH\,.\,BC$, $AC^2 = CH\,.\,CB$, $AH^2 = BH\,.\,HC$, $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Cette dernière relation traduit le *théorème de Pythagore.*

• *Inscrit (angle).* Angle ayant son sommet sur un cercle et dont les côtés sont, soit deux cordes du cercle, soit une corde et une tangente (voir figure à l'article *cercle*).

• *Inscrit (cercle).* Un cercle est dit inscrit dans un angle ou dans un polygone lorsqu'il est tangent aux côtés de l'angle ou à ceux du polygone. Son centre est sur la bissectrice intérieure s'il s'agit d'un angle, et au point de concours des trois bissectrices intérieures s'il s'agit d'un triangle. Le cercle inscrit dans un losange ou un carré a son centre au point de rencontre des diagonales.

• *Inversion.* (Voir ci-dessous p. 146, ***Transformations***).

• *Isocèle (triangle).* Triangle qui possède deux côtés égaux. Leur sommet commun est le *sommet* du triangle, le côté opposé au sommet est la *base.* Dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux et la bissectrice intérieure de l'angle au sommet est aussi médiatrice, hauteur et médiane. Les réciproques de ces deux propriétés sont vraies.

(Employé à propos d'un trapèze, le mot *isocèle* désigne un trapèze dont les côtés non parallèles sont égaux.)

• *Lieu géométrique.* Terme utilisé par les géomètres classiques pour désigner un ***ensemble de points*** possédant tous une même propriété et étant les seuls à la posséder. Ainsi l'on disait que la médiatrice d'un segment est le lieu géométrique des points équidistants des extrémités de ce segment (tout point sur la médiatrice est équidistant de ses extrémités ; tout point équidistant des extrémités du segment est nécessairement sur la médiatrice).

• *Médiane.* Droite qui joint un sommet d'un triangle au milieu du côté opposé. Les médianes d'un triangle sont concourantes au centre de gravité de ce triangle. Si l'on désigne par m la longueur de la médiane relative au côté a on a : $b^2 + c^2 = 2\,m^2 + \frac{a^2}{2}$.

On a aussi, en appelant HI la projection de la médiane relative au côté a sur ce côté (H : pied de la hauteur issue de A, I milieu du côté considéré) : $c^2 - b^2 = 2\,a\,.\,\overline{HI}$.

• *Médiateur (plan).* On appelle plan médiateur d'un segment AB le plan mené par le milieu I de AB et perpendiculaire à AB. Le plan médiateur est l'ensemble des points de l'espace équidistants de A et de B.

• *Médiatrice (d'un segment AB).* Droite perpendiculaire au segment AB et passant par le milieu de AB. C'est l'ensemble des points du plan équidistants de A et de B. Construction : avec A comme centre, on trace un cercle de diamètre supérieur à AB, puis, en conservant la même ouverture du compas, on trace un cercle de centre B ; les deux points d'intersection de ces deux cercles appartiennent à la médiatrice : il suffit de les joindre pour obtenir celle-ci.

• *Neuf points (cercle des).* Cercle passant par les neuf points suivants d'un triangle : les milieux des trois côtés, les pieds des trois hauteurs, les milieux des trois segments joignant chaque sommet à l'orthocentre H du triangle. Le cercle des neuf points, ou *cercle d'Euler*, a pour centre le milieu du segment OH (O centre du cercle circonscrit) et pour rayon $R/2$.

• *Oblique.* Étant donné, dans le plan, une droite D et un point A situé hors de cette droite, on appelle *oblique* tout segment joignant un point de D à A qui n'est pas perpendiculaire à D. Une oblique est plus longue que la perpendiculaire abaissée de A sur D ; deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales ; de deux obliques qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, la plus longue est celle qui s'en écarte le plus. Les réciproques de ces propriétés sont vraies.

• *Obtus (angle).* Angle saillant supérieur à 1 Droit.

• *Octogone.* Polygone à huit côtés. Pour construire un octogone régulier inscrit dans un cercle, on trace deux diamètres perpendiculaires, qui coupent chacun le cercle en deux points, et les bissectrices de deux angles droits consécutifs ainsi tracés, ce qui donne quatre autres points. Les huit points obtenus sont les sommets de l'octogone cherché. On a :

Octogone convexe : angle = 135°, angle au centre = 45°, côté = $R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Octogone étoilé : angle = 45°, angle au centre = 135°, côté = $R\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

• *Opposés par le sommet (angles).* Angles ayant même sommet et tels que les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre. Deux angles opposés par le sommet sont égaux, et leurs bissectrices sont dans le prolongement l'une de l'autre.

• *Orthocentre (d'un triangle).* Point de concours des hauteurs de ce triangle. L'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité d'un triangle sont alignés sur une droite appelée *droite d'Euler.*

• *Orthogonal.*

— *Droites orthogonales* : deux droites D et D', du plan ou de l'espace, sont dites orthogonales lorsque, en menant par un point A de D une parallèle à D', on obtient une troisième droite, D'', perpendiculaire à D. Dans le plan, deux droites orthogonales sont *perpendiculaires* (ce qui signifie : 1° qu'elles se coupent ; 2° qu'elles se coupent à angle droit).

— *Cercles orthogonaux* : cercles sécants qui se coupent à angle droit (voir *cercle*).

• *Parallèles.* Deux droites situées dans un même plan sont dites parallèles si elles n'ont aucun point commun. Voici quelques propriétés classiques :

— Par un point pris hors d'une droite, on peut mener une parallèle à cette droite, et une seule (cette proposition était appelée autrefois « postulat d'Euclide »).

— Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, elles sont parallèles entre elles.

— Si deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre.

— Si deux droites distinctes sont parallèles à une même troisième, elles sont parallèles entre elles.

7

Si $AB = BC = CD = DE$
$A'B' = B'C' = C'D' = D'E'$

8

9

— Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

— Deux droites parallèles coupées par une sécante forment avec cette sécante : des angles alternes-internes égaux, des angles correspondants égaux, des angles alternes-externes égaux, des angles intérieurs et du même côté supplémentaires. La réciproque de chacune de ces propriétés est vraie.

— Des parallèles équidistantes (déterminant sur une perpendiculaire commune des segments égaux) déterminent sur une sécante quelconque des segments consécutifs égaux (voir figure 8).

— Théorème de Thalès : voir *Thalès.*

• *Parallélisme dans l'espace.* Si l'on considère les droites de l'espace, il faut préciser, pour pouvoir parler de leur parallélisme, qu'elles sont dans un même plan (dans l'espace, deux droites non situées dans un même plan n'ont aucun point commun : elles ne sont cependant pas parallèles).

— Deux droites parallèles déterminent un plan.

— Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre, tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre ou la contient, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

— Deux droites distinctes parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

— Si deux droites distinctes sont perpendiculaires à un même plan, elles sont parallèles.

— Si deux angles ont leurs côtés parallèles et de même sens, ou parallèles et de sens contraires, ils sont égaux ; si deux angles ont leurs côtés parallèles, deux de même sens, et deux de sens contraires, ils sont supplémentaires.

— Si deux droites sont parallèles, leurs projections orthogonales sur un même plan sont parallèles ou confondues. (La réciproque n'est pas vraie.)

• *Parallélisme entre une droite et un plan.* Une droite et un plan sont dits parallèles s'ils n'ont aucun point commun.

— Une droite est parallèle à un plan si, et seulement si, elle est parallèle à une droite du plan.

— Si une droite est parallèle à un plan P, tout plan contenant cette droite, ou bien est parallèle à P, ou bien coupe P selon une parallèle à cette droite.

— Si une droite est parallèle à deux plans, elle est parallèle à leur intersection.

— Si une droite est parallèle à un plan P et perpendiculaire à un plan Q, les plans P et Q sont perpendiculaires.

— Par un point donné O, on peut mener une infinité de plans parallèles à une droite D ; par un point donné O, on peut mener un plan parallèle à deux droites données, D et D', non parallèles. Étant donné deux droites non parallèles, D et D', on peut mener par D un plan parallèle à D', et un seul.

• *Plans parallèles.* Deux plans sont dits parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun. On démontre, à propos des plans parallèles, des propriétés analogues à celles des droites parallèles (deux plans distincts parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux, etc.).

• *Parallélépipède.* Prisme ayant pour base un parallélogramme. Lorsque les arêtes latérales sont perpendiculaires au plan de base, le parallélépipède

est dit *droit.* Lorsque la base est un rectangle, le parallélépipède est dit lui-même *rectangle.* Un parallélépipède rectangle dont les arêtes sont toutes égales est un *cube.*

• *Parallélogramme.* Quadrilatère convexe dont les côtés opposés sont parallèles. Dans un parallélogramme : les angles opposés sont égaux, les angles consécutifs sont supplémentaires, les côtés opposés sont égaux deux à deux, les diagonales se coupent en leur milieu (centre du parallélogramme). Réciproquement, si un quadrilatère possède l'une de ces propriétés, ce quadrilatère est un parallélogramme.

Le rectangle, le losange et le carré sont des parallélogrammes particuliers.

• *Partage d'un segment dans un rapport donné.* Étant donné un segment *AB* et un rapport *k* (positif), il existe en général deux points, *M* et *M'*, tels que :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} = k .$$

(Si l'on considère des segments orientés, il n'existe qu'un seul point *M* partageant le segment *AB* dans un rapport algébrique *k* : *M* est situé entre *A* et *B* si *k* est négatif, extérieur au segment *AB* si *k* est positif.)

• *Pentagone.* Polygone à cinq côtés et cinq angles. Il existe deux pentagones réguliers : l'un est convexe et l'autre étoilé.

— Construction des pentagones réguliers inscrits dans un cercle de diamètre *AB* : on trace le rayon *OC* perpendiculaire à *AB* et, avec *I*, milieu de *AO*, comme centre, on trace le cercle de rayon *IC*, qui coupe le diamètre *AB* en un point *M* (intérieur au cercle) et un point *M'* (extérieur au cercle). *CM* et *CM'* sont respectivement les côtés des pentagones convexe et étoilé (voir figure 9).

Pentagone convexe : angle = 108°, angle au centre = 72°, côté $c = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

Pentagone étoilé : angle = 36°, angle au centre = 144°, côté $c = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

• *Pente (d'une droite).* La pente d'une droite par rapport à un axe *x' x* est la tangente de l'angle que fait cette droite avec l'axe *x' x*. La pente d'une droite par rapport à un plan est la tangente de l'angle que fait cette droite avec sa projection orthogonale sur ce plan. Si la droite est parallèle au plan, sa pente est nulle ; si la droite est perpendiculaire au plan, sa pente est infinie.

• *Périmètre.* Ligne limitant une surface. Ce peut être une ligne brisée (exemple : polygones), une ligne courbe (exemple : cercle, ellipse), ou une série de lignes courbes et droites (périmètre mixtiligne).

• *Perpendiculaire.* Deux droites sont dites perpendiculaires quand elles se coupent à angle droit. On démontre les propriétés suivantes :

— Par un point d'une droite on peut lui mener une perpendiculaire et une seule ; par un point pris hors d'une droite, on peut lui mener une perpendiculaire et une seule.

— Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

— La perpendiculaire menée d'un point à une droite est plus courte que toute oblique menée à la droite à partir de ce point.

• *Perpendiculaire à un plan (droite).* Une droite est dite perpendiculaire à un plan *P* si elle est orthogonale ou perpendiculaire à toute droite appartenant à *P*.

— Une droite est perpendiculaire à un plan si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites concourantes de ce plan.

— Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Inversement, si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, elles sont parallèles.

— Par un point, on peut mener une droite perpendiculaire à un plan, et une seule ; par un point, on peut mener un plan perpendiculaire à une droite, et un seul.

— L'ensemble des droites passant par un point *O* et perpendiculaires ou orthogonales à une droite donnée *D* est le plan perpendiculaire à la droite *D* passant par *O*.

— Théorème des trois perpendiculaires : si on mène d'un point *O* la perpendiculaire *OH* à un plan *P* et la perpendiculaire *OI* à une droite *D* de ce plan, la droite *HI* qui joint les pieds des deux perpendiculaires est elle-même perpendiculaire à *D*.

• *Perpendiculaires (plans).* Deux plans qui se coupent en formant un dièdre droit (donc quatre dièdres droits) sont dits perpendiculaires.

— Deux plans sont perpendiculaires si, et seulement si, l'un d'entre eux contient une droite perpendiculaire à l'autre.

— Si deux plans non parallèles sont perpendiculaires à un même troisième, leur intersection est perpendiculaire à ce dernier.

— Si une droite est perpendiculaire à un plan *P*, tout plan parallèle à la droite est perpendiculaire à *P*.

— Si une droite n'est pas perpendiculaire à un plan *P*, il existe un plan, et un seul, perpendiculaire à *P* et contenant la droite considérée.

• *Perpendiculaire commune à deux droites dans l'espace.* C'est une droite *AB* rencontrant les deux droites données et perpendiculaire à chacune d'elles. La portion de la perpendiculaire commune comprise entre les deux droites est la *plus courte distance* des deux droites.

• *Plan.* Une image d'un plan est donnée par la surface d'un mur ou d'une table, supposée prolongée indéfiniment dans tous les sens, et sans épaisseur. Voici les principales propriétés d'un plan :

— Toute droite qui a deux points dans un plan est tout entière dans ce plan.

— Si une droite n'est pas contenue dans un plan, elle a 0 ou 1 point commun avec ce plan.

— Une droite détermine dans un plan deux demi-plans.

— Un plan est déterminé par : trois points non alignés, deux droites concourantes, une droite et un point extérieur à cette droite, deux droites parallèles.

— Si deux plans ont un point commun, ils en ont une infinité, qui forment leur droite d'intersection, ou bien ils sont confondus.

• *Polyèdre.* Solide limité par des polygones, appelés *faces* ou *facettes* du polyèdre. Un polyèdre à quatre faces est un *tétraèdre*, un polyèdre à six faces est un *hexaèdre*, etc. (Un cube est un hexaèdre.) Un polyèdre est dit régulier lorsque ses faces sont des polygones réguliers égaux. On démontre qu'il existe cinq polyèdres réguliers, et cinq seulement : le tétraèdre régulier, le cube, l'octaèdre (huit faces), le dodécaèdre (douze faces) et l'icosaèdre (vingt faces).

Voir aussi le mot *volume.*

• *Polygonale (ligne).* Portion d'un polygone.

• *Polygone.* Ligne brisée fermée. Les segments composant cette ligne sont les *côtés* du polygone, l'angle formé par deux côtés consécutifs est un *angle* du polygone. L'angle formé par un côté et le prolongement d'un côté consécutif est un *angle extérieur* du polygone. Un polygone est dit concave si les prolongements d'un ou plusieurs de ses côtés le coupent ; il est dit convexe dans le cas contraire (figure 10).

— *Somme des angles d'un polygone* : la somme des angles intérieurs d'un polygone à *n* côtés est 2 (*n* – 2) Droits. La somme des angles extérieurs d'un polygone convexe est toujours égale à 4 Droits, quel que soit *n*.

• *Polygones réguliers.* Un polygone est dit régulier lorsque tous ses côtés sont égaux et tous ses angles aussi. Il peut être convexe ou étoilé.

— Un polygone régulier quelconque peut être inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre cercle concentrique au premier. Il a autant d'axes de symétrie que de côtés : les bissectrices des angles et les médiatrices des côtés. Si le nombre de côtés est pair, il admet, en outre, le centre de son cercle circonscrit comme centre de symétrie.

• *Prismatique (surface).* Surface engendrée par une droite qui reste parallèle à une direction donnée *D* et qui s'appuie constamment sur un polygone (voir figure 11). Elle est donc composée de portions de plan (*faces*) parallèles à la direction *D*. La droite commune à deux faces consécutives est une *arête.* Lorsqu'on coupe une surface prismatique par un plan non parallèle à ses arêtes, on obtient une *section plane* de la surface. Si le plan sécant est perpendiculaire aux arêtes, on obtient une *section droite* de la surface ; toutes les sections droites sont des polygones égaux entre eux.

• *Prisme.* Solide limité par une surface prismatique et deux sections planes parallèles (les *bases*). La portion de surface prismatique comprise entre les bases est la *surface latérale.* Les arêtes de la surface latérale sont les *arêtes latérales.* La distance entre les plans des deux bases est la *hauteur* du prisme.

— Lorsque les arêtes latérales sont perpendiculaires aux plans des bases, le prisme est dit *droit* ; il est *oblique* dans le cas contraire.

• *Ptolémée (relations de).* Étant donné un quadrilatère convexe inscriptible (voir *quadrilatère*) *ABCD*, en posant *AC* = *x*, *BD* = *y*, *AB* = *a*, *BC* = *b*, *CD* = *c*, *DA* = *d*, on a les relations suivantes, appelées *relations de Ptolémée* :

$$\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}, \quad xy = ac + bd .$$

• *Projection orthogonale sur une droite.* La projection orthogonale d'un point *M* sur une droite est le pied *m* de la perpendiculaire abaissée de *M* sur la droite ; cette perpendiculaire s'appelle la *projetante.* La projection d'un segment *MM'* est un segment *mm'* tel que *mm'* = *MM'*. cos α, α désignant l'angle que fait la droite sur laquelle on projette avec la droite portant *MM'*.

• *Projection orthogonale sur un plan.* La projection orthogonale d'un point sur un plan est le pied de la perpendiculaire abaissée du point considéré sur le plan de projection. On démontre les propriétés suivantes :

— La projection d'une droite est, en général, une droite passant par l'intersection de la droite et du plan de projection (trace de la droite sur le plan). Elle se réduit à un point si la droite est perpendiculaire au plan.

— Si une droite est parallèle à un plan, sa projection sur ce plan lui est parallèle.

— Si deux droites sont parallèles, leurs projections sur un plan sont parallèles ou confondues (mais la réciproque n'est pas vraie).

— Une figure plane se projette en vraie grandeur sur un plan parallèle au sien.

— Un segment *MM'* se projette en *mm'* tel que *mm'* = *MM'* . cos (*MM'*, *P*), (*MM'*, *P*) désignant l'angle que fait *MM'* avec le plan *P*. Une surface plane *S* située dans un plan *Q*, se projette selon une surface plane *S'* telle que *S'* = *S* cos α, α étant l'angle des deux plans *P* et *Q*.

• *Puissance d'un point par rapport à un cercle.* Étant donné un point *P* et une droite passant par *P* coupant un cercle (*O*, *R*) en deux points *A* et *B*, le produit $p = \overline{PA} . \overline{PB}$ est constant, quelle que soit la droite *PAB* : on l'appelle puissance du point *P* par rapport au cercle. Si l'on pose *PO* = *d*, on a :

$$p = d^2 - R^2 .$$

— Le nombre *p* est positif si *P* est extérieur au cercle, négatif si *P* est intérieur au cercle, nul si *P* est sur le cercle.

— Lorsque les points *A* et *B* sont confondus en un point *T*, *PT* étant tangente au cercle, on a $p = PT^2$.

• *Puissance d'un point par rapport à une sphère.* Elle se définit comme la puissance d'un point par rapport à un cercle, *A* et *B* étant les points d'intersection d'une droite passant par *P* avec la sphère.

• *Pyramide.* Polyèdre obtenu en joignant tous les sommets d'un polygone plan (base) à un point *S* non contenu dans le plan de base et appelé *sommet* de la pyramide. Quand le polygone de base est régulier, la pyramide est dite régulière si le point *S* est situé sur la perpendiculaire menée par le centre du polygone de base au plan de ce polygone.

• *Pythagore (théorème de).* Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. La réciproque de cette proposition est vraie.

• *Quadrilatère.* Polygone à quatre côtés. Il peut être convexe, concave ou croisé. Un quadrilatère est dit inscriptible lorsqu'on peut faire passer un cercle par ses quatre sommets. On démontre qu'un quadrilatère convexe est inscriptible si, et seulement si, ses angles opposés sont supplémentaires. Un quadrilatère croisé est inscriptible si, et seulement si, ses angles opposés sont égaux.

— Les côtés opposés d'un quadrilatère convexe inscriptible forment deux couples de droites dites *antiparallèles.*

• *Rectangle.* Parallélogramme ayant un angle droit.

• *Relations métriques.*

— Dans le triangle rectangle : voir *Hypoténuse.*

— Dans un triangle quelconque (figure 12) :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,BC . CH \ (C \text{ aigu}),$$
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2\,BC . CH \ (C \text{ obtus}).$$

Ces deux relations, si l'on oriente le côté *BC*, se réunissent en :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2\,\overline{BC} . \overline{CH}.$$

$$AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \frac{BC^2}{2} \ (I \text{ milieu de } BC).$$

$$AC^2 - AB^2 = 2\,\overline{CB} . \overline{IH} \ (\text{en orientant } BC).$$

• *Rentrant (angle).* Angle plus grand qu'un angle plat.

• *Révolution (surface de).* Surface obtenue en faisant tourner autour d'un axe une ligne (*L*), droite, brisée ou courbe. Tout plan passant par l'axe est un *plan méridien*, qui coupe la surface suivant une ligne appelée *méridienne.*

• *Saillant (angle).* Angle inférieur à un angle plat. Un angle saillant peut être aigu, droit ou obtus.

• *Sécante.* Droite ou courbe rencontrant une autre ligne ou une surface.

• *Segment de droite.* Portion de droite limitée par deux points. Sur une droite orientée un segment peut être associé à un nombre positif, négatif, ou nul (lorsque les deux extrémités sont confondues). On le représente alors avec une barre : $\overline{AB}$.

• *Semblable.* Voir *Similitude.*

• *Similitude.* Cette transformation est étudiée au § **C.** Retenons ici la relation de similitude entre deux triangles : des triangles qui ont leurs angles égaux chacun à chacun, et leurs côtés proportionnels, sont dits *semblables.* On a alors, pour deux triangles *ABC* et *A' B' C'* :

$$\widehat{A} = \widehat{A'}, \quad \widehat{B} = \widehat{B'}, \quad \widehat{C} = \widehat{C'}, \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Il y a trois *cas de similitude* qui énoncent les conditions suffisantes auxquelles deux triangles sont semblables : 1er cas : deux angles égaux chacun à chacun ; 2e cas : un angle égal compris entre deux côtés proportionnels ; 3e cas : trois côtés proportionnels.

• *Simson (droite de).* Tout point *M* du cercle circonscrit à un triangle a ses projections sur les trois côtés du triangle en ligne droite. Cette droite est la droite de Simson relative au point considéré.

• *Sphère.* Solide engendré par un demi-cercle qui tourne autour de son diamètre. Tous les points situés sur la surface de la sphère sont équidistants d'un point intérieur *O* appelé *centre.* Toute droite passant par le centre est un *diamètre.* Tout plan passant par le centre est un *plan diamétral.* Le centre est un centre de symétrie, tout diamètre est un axe de symétrie, tout plan diamétral est un plan de symétrie,

— La sphère détermine dans l'espace deux régions, l'une intérieure, l'autre extérieure à la sphère.

— Positions relatives d'une droite et d'une sphère : une droite peut être sécante (deux points communs), tangente (un point commun), ou extérieure à la sphère (zéro point commun), selon que la distance du centre à la droite est inférieure au rayon, égale au rayon, ou supérieure au rayon. Quand la droite est tangente à la sphère en un point *M*, elle est perpendiculaire au rayon *OM* en *M*.

— Positions relatives d'un plan et d'une sphère : un plan peut être sécant, tangent, ou extérieur à la sphère dans les mêmes conditions qu'une droite. Lorsque le plan est sécant, il découpe sur la sphère un *cercle* dont le centre est la projection orthogonale du centre de la sphère sur le plan : *grand cercle* s'il passe par le centre, *petit cercle* au cas contraire.

— Le plan tangent à la sphère en un point *M* est l'ensemble des tangentes en *M* à toutes les courbes tracées sur la sphère et passant par *M*. Il est perpendiculaire au rayon aboutissant au point de contact.

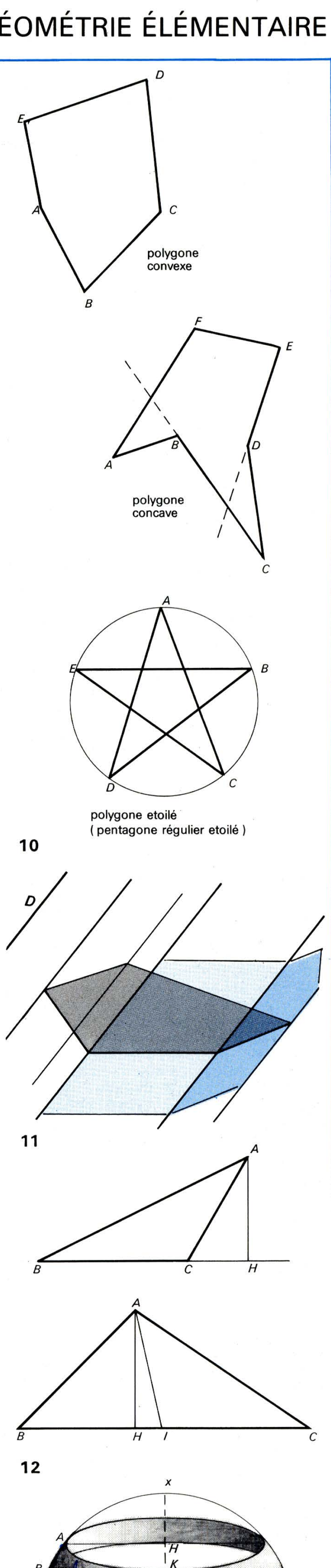
— On étudie, comme pour le cercle, les positions relatives de deux sphères, la puissance d'un point par rapport à une sphère.

— On appelle *zone sphérique* la portion de la surface d'une sphère comprise entre deux plans parallèles et *calotte sphérique* la portion de la surface d'une sphère comprise entre un plan tangent et un plan sécant parallèle à ce dernier.

— Figures liées à la sphère : elles sont décrites sur les figures 13, 14 et 15.

• *Supplément (d'un angle).* Angle qu'il faut ajouter à un angle donné pour obtenir un angle plat.

• *Supplémentaires (angles).* Angles dont la somme vaut un angle plat. Deux angles adjacents sont supplémentaires si, et seulement si, leurs côtés non



Anneau sphérique : volume engendré par le segment de cercle *AB* tournant autour du diamètre *x'x*.

communs sont en ligne droite. Leurs bissectrices forment un angle droit.

• *Surface.* La notion de surface en général est très difficile à définir. En géométrie classique, qui est une abstraction réalisée à partir de notre expérience quotidienne, une surface est un ensemble de points limitant une portion d'espace. Il ne faut pas la confondre avec la notion d'*aire*, qui désigne la mesure d'une surface. Voir *Aire.*

• *Symétrie.* Voir ci-dessous, ***Transformations***.

• *Tangente.* Considérons une ligne courbe et deux points M et M' sur cette ligne ; la droite MM' est sécante à la courbe, qu'elle rencontre au moins aux deux points M et M'. Quand le point M' tend vers M (se rapproche indéfiniment de M), la droite MM' tend (du moins dans les cas étudiés en géométrie classique) vers une position limite, qu'on appelle tangente à la courbe au point M (une tangente à une courbe peut avoir plusieurs points communs avec la courbe, comme l'indique la figure 16).

— *Tangente à un cercle* : Dans le cas particulier d'un cercle, une tangente n'a qu'un point commun avec le cercle. On démontre qu'elle est perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de contact, et que, d'un point extérieur A, on peut mener au cercle deux tangentes AM et AM' ; on a alors $AM = AM'$.

— *Tangente à une surface.* Soit M un point de cette surface. La tangente en M à une courbe quelconque tracée sur la surface et passant par M est dite *tangente en M* à cette surface. L'ensemble des tangentes en M à une surface constitue, en général, le plan tangent en M à cette surface.

L'importance de la notion de tangente et de plan tangent, en ce qui concerne l'étude des courbes, est très grande. Les méthodes de la géométrie traditionnelle ne permettent d'étudier qu'un très petit nombre de cas ; pour étudier d'une manière générale les questions de tangence, il faut utiliser l'analyse.

• *Tétraèdre.* Polyèdre à quatre faces, quatre sommets et six arêtes. On peut le considérer comme une pyramide à base triangulaire.

• *Thalès (théorème de).* Importante proposition concernant les droites parallèles : si des droites sont parallèles, elles déterminent sur deux sécantes des segments correspondants proportionnels, et, réciproquement, des droites qui déterminent sur deux sécantes des segments homologues proportionnels sont parallèles.

• *Translation.* Voir ci-dessous, ***Transformations***.

• *Trapèze.* Quadrilatère ayant deux côtés parallèles (les bases) et deux côtés non parallèles.

• *Triangle.* Polygone possédant trois côtés et trois angles. Les droites remarquables dans un triangle sont toutes au nombre de trois : bissectrices intérieures, bissectrices extérieures, hauteurs, médianes, médiatrices.

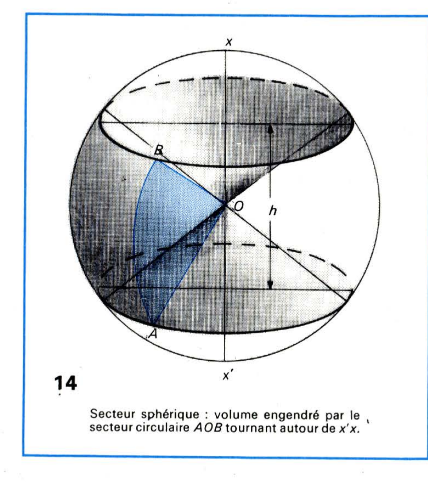
— La somme des angles d'un triangle est égale à 2 Droits.

— Les droites remarquables d'un triangle sont concourantes trois à trois (voir *Médiatrices*, etc.).

— Dans un triangle, un côté quelconque est inférieur à la somme des deux autres et supérieur à leur différence.

• *Trièdre.* Portion d'espace limitée par les portions de plan comprises entre trois demi-droites issues d'un même point S, prises deux à deux. S est le *sommet*, les demi-droites sont les *arêtes*, les portions de plan sont les *faces*, et les dièdres formés par les faces sont les *dièdres* du trièdre.

Un trièdre dont les faces sont des angles droits est un trièdre *trirectangle*.



14

Secteur sphérique : volume engendré par le secteur circulaire AOB tournant autour de $x'x$.

• *Tronc de cône.* Portion de cône comprise entre la base et un plan parallèle au plan de base.

• *Tronc de prisme.* Portion de prisme comprise entre deux sections planes non parallèles entre elles ni parallèles aux arêtes.

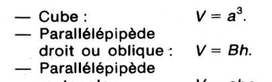
• *Tronc de pyramide.* Portion de pyramide comprise entre la base et un plan parallèle au plan de base.

• *Vecteur géométrique.* Voir p. 48.

• *Volume.* Portion d'espace occupée par un solide. Voici les formules donnant les volumes les plus usuels.

a, b, c désignent les longueurs des arêtes, h la hauteur, B l'aire de la base, D le diamètre de la base, R le rayon de la base ; les autres symboles seront éventuellement précisés.

1° *Polyèdres.*



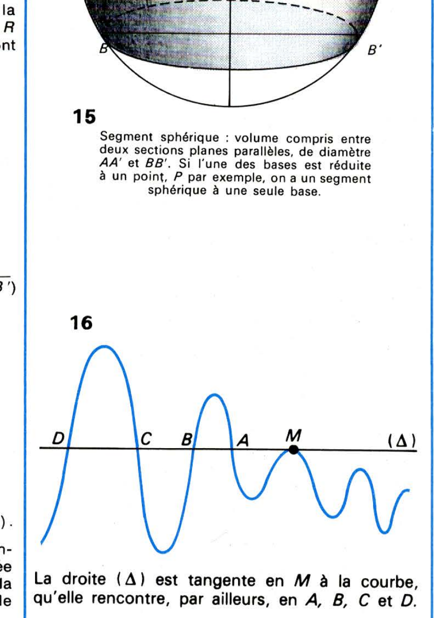
— Cube : $V = a^3$.
— Parallélépipède droit ou oblique : $V = Bh$.
— Parallélépipède rectangle : $V = abc = Bc$.
— Prisme : $V = Bh$.
— Pyramide : $V = \frac{1}{3} Bh$.
— Tronc de pyramide : $V = \frac{h}{3}(B + B' + \sqrt{BB'})$ (B' = 2e base).

2° *Corps ronds.*

— Cylindre : $V = Bh = \pi R^2 h$.
— Cône : $V = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} \pi R^2 h$.
— Sphère : $V = \frac{4}{3} \pi R^3$
— Tronc de cône à bases circulaires : $V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + RR' + R'^2)$.

3° *Volume du tore* : Le tore est le solide engendré par un cercle qui tourne autour d'une droite située dans son plan et ne le coupant pas. En appelant d la distance du centre du cercle à l'axe de rotation et R le rayon du cercle, on a :

$$S = 4\pi^2 Rd, \quad V = 2\pi^2 R^2 d.$$



15

Segment sphérique : volume compris entre deux sections planes parallèles, de diamètre AA' et BB'. Si l'une des bases est réduite à un point, P par exemple, on a un segment sphérique à une seule base.

16

D C B A M (Δ)

La droite (Δ) est tangente en M à la courbe, qu'elle rencontre, par ailleurs, en A, B, C et D.

Les géométries non euclidiennes.

D'Euclide aux temps modernes.

Dès le début du XVIIe siècle, les mathématiciens ont souligné ce que Sir Henry Savile appelait l'un des deux « *naevi* » (« défauts ») de la géométrie d'Euclide, à savoir l'axiome des parallèles (par un point pris hors d'une droite, on peut mener une parallèle à cette droite, et une seule). Le deuxième défaut, qui ne nous intéressera pas ici, concerne la théorie des proportions.

Dans les *Éléments*, Euclide fait reposer l'ensemble de sa géométrie sur un certain nombre de prémisses : des définitions, des axiomes (c'est-à-dire des propositions logiques, évidentes (?) par elles-mêmes) et cinq *postulats*, c'est-à-dire des propositions que l'on *demande* d'admettre sans démonstration. Le cinquième de ces postulats est énoncé ainsi : « ... si une ligne droite coupant deux autres lignes droites fait, du même côté, des angles intérieurs dont la somme soit moindre que 2 Droits, les deux droites, prolongées indéfiniment, se rencontrent du côté des angles dont la somme est inférieure à 2 Droits ». Ce « postulat d'Euclide » est équivalent à l'axiome des parallèles, qui l'a remplacé, par la suite, dans les traités de géométrie. A partir des remarques de Savile, plusieurs tentatives furent faites pour démontrer ce postulat, mais en vain.

En 1733, l'Italien Saccheri publie à Milan un livre intitulé *Euclides ab omni vindicatus*, dans lequel il défend la position euclidienne en raisonnant ainsi : si l'axiome des parallèles est lié logiquement aux autres propositions des *Éléments*, le fait de le nier et de le remplacer par une autre proposition doit conduire à des contradictions logiques. Saccheri envisage donc la question sous l'angle suivant (voir figure ci-dessous) :

Malheureusement, Saccheri n'a pu développer les conséquences de la deuxième et de la troisième hypothèses (s'il l'avait fait, il se serait aperçu qu'elles n'entraînaient aucune contradiction, mais qu'elles conduisaient à des propriétés différentes des figures).

Lobačevskij.

Professeur de mathématiques à l'Université de Kazan, Lobačevskij a construit une géométrie en remplaçant le postulat d'Euclide par la proposition suivante : « Toutes les lignes droites d'un plan qui sont issues d'un point donné peuvent être divisées en deux classes, selon leur relation avec les autres droites du même plan : la classe des droites sécantes et celle des non sécantes. La ligne droite qui fait, en quelque sorte, office de frontière pour chacune de ces classes est appelée parallèle à la droite considérée. » Il en résulte qu'une ligne droite peut être parallèle à deux droites qui se coupent.

En développant les conséquences de ce nouveau postulat, Lobačevskij a pu construire une géométrie cohérente, sans contradictions (et, en outre, sans aucun rapport avec l'expérience). La conclusion de cette tentative était la suivante : le choix d'un postulat n'a pas de conséquences sur la valeur logique d'une géométrie ; donc ce postulat est indémontrable.

La tentative de Lobačevskij date du début du XIXe siècle ; elle avait été précédée d'une tentative analogue faite par Gauss, lequel n'avait pas publié ses résultats. Après Lobačevskij, le Hongrois Bolyaï a repris le problème et est parvenu à des résultats très voisins.

Riemann et Beltrami.

La « dissertation inaugurale » de Riemann (1854) a relancé le problème des géométries non euclidiennes. Le mathématicien allemand a montré, par des moyens analytiques, que le problème des postulats était lié à celui de la courbure de l'espace dans lequel on se place. Sur une sphère, par exemple, le plus court chemin d'un point à un autre est un arc de grand-cercle. Un grand-cercle est donc l'équivalent d'une droite pour une telle surface, et l'on sait que deux grands-cercles quelconques ont toujours deux points communs, c'est-à-dire que, sur une sphère, d'un point pris hors d'une « droite » (c'est-à-dire d'un grand-cercle) on ne peut mener aucun autre grand-cercle qui lui soit parallèle (non sécant). Beltrami (1835-1900) a établi la relation entre les travaux de Riemann et ceux de Lobačevskij et de Bolyaï.

Cayley.

Arthur Cayley a montré (*Collected Mathematical Papers*, 1889, tome II) que les propriétés métriques d'une figure plane, auxquelles s'étaient uniquement intéressés Lobačevskij, Bolyaï et Riemann, ne sont autres que les propriétés projectives de la figure reliées à une certaine quadrique (surface représentée par une équation du second degré) fondamentale. Selon que la quadrique considérée est réelle, imaginaire ou dégénérée, on obtient différentes géométries. Les travaux de Cayley ont été développés par Felix Klein (1849-1925), puis par Sophüs Lie.

Transformations.

Pôles et polaires.

• *Faisceaux de cercles.*

— Définition : ensemble des cercles admettant, deux à deux, une même droite pour axe radical.

Tous ces cercles ont leurs centres situés sur une même droite.

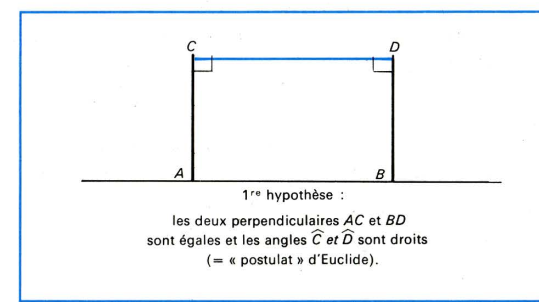
— Genre d'un faisceau : selon que l'axe radical est extérieur à un cercle du faisceau, le coupe en deux points A et B, ou lui est tangent en A, le faisceau est dit *à points limites* (ces points sont deux cercles de rayon nul, I et J, sur la ligne des centres), *à points de base* A et B (tous les cercles du faisceau passent par A et B), ou un *faisceau singulier* (tous les cercles du faisceau sont alors tangents à l'axe radical en A).

• *Points conjugués par rapport à un cercle ; pôles et polaires.*

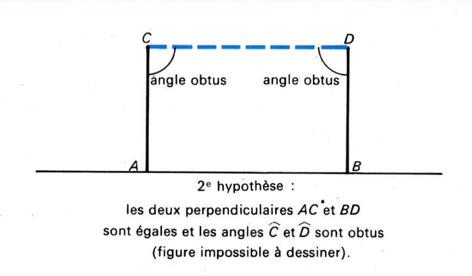
— Définition : deux points, M et M' sont dits *conjugués* par rapport à un cercle (C) si le cercle de diamètre MM' est orthogonal au cercle (C).

— Polaire d'un point A par rapport au cercle (C) de centre O et de rayon R : c'est l'ensemble des conjugués de A par rapport à (C) ; c'est la droite (Δ) perpendiculaire à OA en A' tel que $\overline{OA} . \overline{OA'} = R^2$.

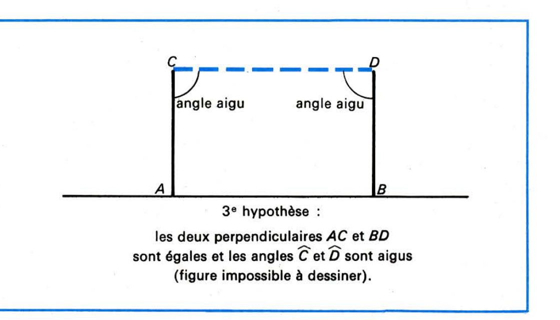
— Pôle d'une droite (Δ) ne passant pas par O : toute droite (Δ) ne passant pas par le centre peut être considérée comme la polaire d'un point A, appelé *pôle* de la droite (Δ). Si le pôle d'une droite (Δ) est sur une droite (Δ') et le pôle de (Δ') est sur (Δ), les droites (Δ) et (Δ') sont dites *conjuguées* ; elles sont les polaires de deux points conjugués, et réciproquement.



1re hypothèse : les deux perpendiculaires AC et BD sont égales et les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ sont droits (= « postulat » d'Euclide).



2e hypothèse : les deux perpendiculaires AC et BD sont égales et les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ sont obtus (figure impossible à dessiner).



3e hypothèse : les deux perpendiculaires AC et BD sont égales et les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ sont aigus (figure impossible à dessiner).

— Réciprocité polaire : les pôles de toutes les droites passant par un point A sont situés sur la polaire (Δ) de A ; les polaires de tous les points d'une droite (Δ) passent par le pôle, A, de cette droite.

● *Transformation par polaires réciproques par rapport à un cercle (C) de centre O.*

— Définition : transformation non ponctuelle qui fait correspondre :

1° à tout point M du plan (autre que O) sa polaire, par rapport au cercle (C) (*cercle directeur* de la transformation) ;

2° à toute droite du plan autre qu'un diamètre de (C), son pôle par rapport à (C).

Au centre O et à un diamètre de (C) correspondent respectivement une droite dite *droite de l'infini* du plan et un *point à l'infini* dans la direction perpendiculaire au diamètre considéré.

— Ainsi, aux points et aux droites d'une figure F correspondent les droites et les points d'une figure F', de sorte que, aux propriétés de F correspondent des propriétés de F', dites *corrélatives* (par exemple, à des points alignés dans F, correspondent des droites concourantes dans F', etc.).

— Courbes polaires réciproques : courbes telles que chacune d'elles est l'enveloppe des polaires des points de l'autre et, en outre, l'ensemble des pôles des droites tangentes à l'autre courbe.

— La polaire réciproque d'un cercle (K) par rapport à (C) est une *conique* (Γ) qui a pour foyer le centre O de (C), pour directrice associée à ce foyer la polaire du centre ω de (K) par rapport à (C). Son excentricité est $e = \frac{R}{d}$ avec $d = \omega A$.

Transformations ponctuelles - Généralités.

● *Définitions.*

— E et E' étant deux ensembles de points ($M \in E$, $M' \in E'$), on appelle *transformation ponctuelle* toute application de E dans E'. M' est le *transformé* de M et nous écrirons, en appelant T l'application (la transformation) : $M' = T(M)$. Si M appartient à un sous-ensemble F de E (à une *figure F*), M' décrit un sous-ensemble F' de E' (une figure F'), et l'on écrit : $F' = T(F)$. Dans ce qui suit, nous poserons E = plan euclidien ou E = espace euclidien.

— Si, $\forall M$, $T(M) = T'(M)$, T et T' sont des transformations *équivalentes* (à tout point M de E elles font correspondre un même transformé M').

— Si tout point $M' \in E'$ est le transformé *d'un seul point* $M \in E$, la transformation est dite *biunivoque*.

— Si $T(M) = M$, M est un *point double* pour la transformation T.

● *Remarques complémentaires.*

— Si, $\forall M \in E$, on a $T(M) = M$, la transformation est dite *identique* ; on la note alors T^0, ou I :

$$M = I(M) = T^0(M).$$

— Une figure dont tous les points sont des points doubles est dite *invariante point par point* (ne pas confondre avec une figure *globalement invariante*, dont les points ne sont pas des points doubles, mais sont deux à deux homologues dans la transformation).

— Étant donné une transformation biunivoque T, $M' = T(M)$, si on peut trouver une transformation, notée T^{-1}, qui, à tout $M' \in E'$, fait correspondre son antécédent M dans E :

$$M' = T(M) \Leftrightarrow M = T^{-1}(M'),$$

la transformation T^{-1} est dite *transformation réciproque* de T. Si $T = T^{-1}$, la transformation est dite *involutive*.

● *Produit de deux transformations.*

— Définition : soit T_1 et T_2 telles que $F_1 = T_1(F)$ et $F' = T_2(F_1)$: la figure F' peut aussi s'obtenir directement à partir de F par une transformation T appelée *produit* des transformations T_1 et T_2. On note ce produit par le signe « $\circ$ » et l'on écrit :

$$T = T_2 \circ T_1 \quad (\text{lire : « } T_2 \text{ rond } T_1 \text{ »}).$$

Attention à l'*ordre* des deux transformations : on écrit *à droite* la première transformation et *à gauche* la seconde. S'il y avait plusieurs transformations, T_1, T_2, T_3 par exemple, on écrirait $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$. (*L'ordre* est important. Si l'on dit à quelqu'un, pour lui préciser un itinéraire : « Tournez à gauche *puis* à droite », il parviendra en un point A ; mais si on lui dit : « Tournez à droite *puis* à gauche », il parviendra en un point B différent de A).

— Propriétés du produit.

$$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = T^0 \quad (\text{ou } I).$$

Si T est involutive, $T = T^{-1}$, et on écrit : $T \circ T^{-1} = T^2 = T^0$ (ou I).

Le produit de plusieurs transformations est associatif par définition. Mais il n'est pas nécessairement commutatif, comme on vient de le dire en insistant sur l'ordre des transformations dont on fait le produit. Si $T(F) = \Phi$ et si une deuxième transformation, S, transforme F et Φ en F' et Φ' : $S(F) = F'$, $S(\Phi) = \Phi'$, on dit que Φ' est la transformée de F par une transformation $\Phi' = R(F)$, appelée *transmuée de T par S*. On a : $R = S \circ T \circ S^{-1}$ (on suppose, bien entendu, que S^{-1} existe). Si S est involutive ($S = S^{-1}$) on a $R = S \circ T \circ S$.

— Groupe de transformations : si l'ensemble des transformations T possède la *structure de groupe*, on parle du groupe G des transformations T. Si le groupe est, en outre, abélien (c'est-à-dire si le produit de deux éléments de G est commutatif), on pourra écrire, indifféremment, $T_1 \circ T_2$ ou $T_2 \circ T_1$.

Résumé sur les transformations usuelles.

Nous conseillons au lecteur de lire ce résumé le stylo à la main, et de faire, au fur et à mesure, des figures rapides pour illustrer les indications qui sont données, ci-dessous, dans un style fatalement très bref. Qu'il se reporte, toutes les fois que cela lui semblera nécessaire, au paragraphe précédent.

● *Translation dans le plan.*

— Définition : à tout $M \in E$ (E = plan euclidien), on fait correspondre par une *translation de vecteur* $\mathbf{V}$, notée $\mathcal{T}\mathbf{V}$, le point $M' \in E$ tel que $\mathbf{MM'} = \mathbf{V}$.

— Propriétés.

1° Biunivoque. Pas de point double si $V \neq 0$.

2° $\mathbf{V} = 0 \Rightarrow \mathcal{T}\mathbf{V} = I$ (transformation identique).

3° Le transformé d'un vecteur $\mathbf{AB}$ est un vecteur $\mathbf{A'B'}$ équipollent à $\mathbf{AB}$.

4° Les droites de E parallèles à $\mathbf{V}$ sont les seules invariantes (globalement).

5° La translation transforme une figure F de E en une figure F' de E égale à F en grandeur et sens (les longueurs sont égales et de même sens, puisque $\mathbf{A'B'} = \mathbf{AB}$; il en est de même des angles) : c'est un *déplacement sans point double* (un déplacement est une transformation qui conserve les longueurs et les angles, tant en grandeur qu'en sens).

6° $\mathcal{T}^{-1}\mathbf{V} = \mathcal{T}(-\mathbf{V})$.

7° $\mathcal{T}\mathbf{V}' \circ \mathcal{T}\mathbf{V} = \mathcal{T}\mathbf{V} \circ \mathcal{T}\mathbf{V}' = \mathcal{T}(\mathbf{V} + \mathbf{V}')$.

● *Rotation dans le plan.*

— Définition : à tout point M du plan orienté, la rotation de centre O et d'angle θ fait correspondre un point M' tel que :

$$OM = OM' \quad \text{et} \quad (\mathbf{OM}, \mathbf{OM'}) = \theta (\text{mod } 2\pi).$$

Nous la noterons $\text{Rot}(O, \theta)$.

— Propriétés.

1° Biunivoque. Un seul point double, O, si $\theta \neq 2k\pi$.

2° $\theta = 2k\pi \Rightarrow \text{Rot}(O, \theta) = I$. Dans la suite, nous supposerons $\theta \neq 2k\pi$.

3° Propriété caractéristique : Si $T = \text{Rot}(O, \theta)$, $A' = T(A)$ et $B' = T(B)$ sont tels que $A'B' = AB$ et $(\mathbf{AB}, \mathbf{A'B'}) = \theta (\text{mod } 2\pi)$.

4° Les cercles de centre O sont globalement invariants.

5° La rotation plane, transformant une figure F, en une figure F' directement égale à F, est un *déplacement admettant un seul point double, O*.

6° $\text{Rot}^{-1}(O, \theta) = \text{Rot}(O, -\theta)$.

7° $\text{Rot}(O, \theta') \circ \text{Rot}(O, \theta) = \text{Rot}(O, \theta) \circ \text{Rot}(O, \theta') = \text{Rot}(O, \theta + \theta')$.

8° $\text{Rot}(O', \theta') \circ \text{Rot}(O, \theta) = \text{Rot}(O, \theta) \circ \text{Rot}(O', \theta') = \text{Rot}(\omega, \theta + \theta')$,

ω étant le troisième sommet du triangle de base OO' et d'angles à la base $\widehat{O} = -\theta/2$, $\widehat{O'} = \theta'/2$.

● *Antidéplacements dans le plan : symétrie axiale.*

(Un antidéplacement transforme une figure F en une figure F', égale à F mais non superposable à F.)

— Définition : la symétrie axiale d'axe Δ, notée $\text{Sym}\,\Delta$, fait correspondre à tout point $M \in E$ un point M' tel que Δ soit médiatrice de MM'.

— Propriétés.

1° $\text{Sym}\,\Delta$ est une transformation biunivoque et involutive ($\text{Sym}\,\Delta = \text{Sym}^{-1}\,\Delta$) dont tous les points de Δ sont des points doubles. C'est un *antidéplacement*.

2° Si Δ' est parallèle à Δ, $\text{Sym}\,\Delta' \circ \text{Sym}\,\Delta = \mathcal{T}(2\,\mathbf{V})$; $\mathbf{V}$: vecteur équipollent à $\mathbf{AA'}$, A et A' étant les pieds d'une perpendiculaire commune à Δ et Δ'. Ce produit *n'est pas commutatif*.

3° Si $\Delta \cap \Delta' = O$, $\text{Sym}\,\Delta' \circ \text{Sym}\,\Delta = \text{Rot}[O, 2(\Delta, \Delta')]$.

4° *Réciproquement* : $\text{Rot}(O, \theta) = \text{Sym}\,\Delta' \circ \text{Sym}\,\Delta$, avec Δ arbitraire passant par O et Δ' déduit de Δ par $\text{Rot}(O, \theta/2)$.

5° Si $\Delta \perp \Delta'$, $\text{Sym}\,\Delta' \circ \text{Sym}\,\Delta$ se réduit à une symétrie par rapport au point O, notée $\text{Sym}\,O$.

6° Remarque : le produit de deux symétries axiales n'est pas une symétrie, mais une rotation ; donc les antidéplacements ne forment pas un *groupe*.

● *Homothétie (dans le plan ou dans l'espace).*

— Définition : soit un point O et un nombre réel $k \neq 0$; on appelle *homothétie de centre O et de rapport k* la transformation T telle que :

$$M' = T(M) \quad \text{avec} \quad \mathbf{OM'} = k\mathbf{OM}.$$

On la notera $\text{Hom}(O, k)$. Les points O, M et M' sont alignés ($\mathbf{OM'}$ et $\mathbf{OM}$ colinéaires). L'homothétie est dite *positive* si $k > 0$, *négative* si $k < 0$.

— Cas particuliers : $k = 1 \Rightarrow \text{Hom}(O, k) = I$;

$k = -1 \Rightarrow \text{Hom}(O, k) = \text{Hom}(O, -1) = \text{Sym}\,O$.

— Propriétés.

1° Biunivoque ; admet O comme seul point double si $k \neq 1$.

2° Propriété, caractéristique : pour deux couples de points homologues (A, A') et (B, B'), on a $\mathbf{A'B'} = k\mathbf{AB}$.

3° Les droites passant par O sont globalement invariantes.

4° $\text{Hom}^{-1}(O, k) = \text{Hom}(O, 1/k)$.

5° *L'homothétie conserve les contacts* (une droite tangente à une courbe au point M se transforme en une droite tangente à la courbe homothétique en M', homothétique de M) et les *angles*. Dans le plan, le sens des angles est conservé quel que soit k, positif ou négatif.

6° $\text{Hom}(O, k') \circ \text{Hom}(O, k) = \text{Hom}(O, kk')$.
$\text{Hom}(O', k') \circ \text{Hom}(O, k) = \text{Hom}(\omega, kk')$,

avec

$$\omega \mathbf{O'} = \frac{k'(1-k)}{k'-1}\, \omega \mathbf{O}.$$

Si $kk' = 1$, le produit $\text{Hom}(O', k') \circ \text{Hom}(O, k)$ est une translation.

7° L'homothétique d'un cercle de centre ω et de rayon R est un cercle de centre ω', homothétique de ω, et de rayon $R' = kR$. Les deux cercles sont dans un même plan si O est dans le plan du cercle donné, dans des plans parallèles dans le cas contraire.

8° L'homothétique d'une sphère de rayon R est une sphère de rayon $R' = kR$, dont le centre est l'homothétique du centre de la sphère donnée.

● *Similitude plane.*

— Définition : on appelle similitude plane le produit d'une homothétie (O, k) et d'un déplacement $\mathcal{D}$ (translation ou rotation plane). Les figures qui se correspondent par une similitude sont dites *semblables* ; la valeur absolue du rapport k de l'homothétie est leur *rapport de similitude*.

Cas particuliers.

1° $\mathcal{T}\,\mathbf{V} \circ \text{Hom}(O, 1) = \mathcal{T}\,\mathbf{V}$.

2° $\mathcal{T}\,\mathbf{V} \circ \text{Hom}(O, k) = \text{Hom}(O', k)$ avec $\mathbf{OO'} = (-1/k)\,\mathbf{V}$.

3° $\text{Rot}(O, \theta) \circ \text{Hom}(\omega, 1) = \text{Rot}(O, \theta)$.

4° $\text{Rot}(O, 2k\pi) \circ \text{Hom}(\omega, k) = \text{Hom}(\omega, k)$.

Dans la suite, nous supposerons k positif et $\neq 1$, avec $\theta \neq 2k\pi$.

— Propriétés.

1° Propriété caractéristique : Si $S(k, \theta)$ désigne une similitude quelconque, on a :

$$A' = S(A),\ B' = S(B) \Longleftrightarrow \begin{cases} (\mathbf{AB}, \mathbf{A'B'}) = \theta (\text{mod } 2\pi), \\ \dfrac{A'B'}{AB} = k. \end{cases}$$

2° $S^{-1}(k, \theta) = S(1/k, -\theta)$.

3° Toute similitude $S(k, \theta)$ est décomposable d'une seule manière en le produit d'une homothétie $\text{Hom}(O, k)$ et d'une rotation $\text{Rot}(O, \theta)$ concentriques :

$$S(k, \theta) = \text{Rot}(O, \theta) \circ \text{Hom}(O, k).$$

O s'appelle le *centre de similitude* ; c'est le seul point double de la similitude.

4° Le produit de deux similitudes est une similitude ou une translation.

● *Affinité dans le plan.*

— Définition : transformation qui, à tout point M du plan, fait correspondre le point M' défini comme suit : 1° MM' est parallèle à une direction Δ et coupe un axe D en H ; 2° $\mathbf{HM'} = k\mathbf{HM}$. Nous noterons cette affinité $A(D, \Delta, k)$. Pour $k = 1$, $A(D, \Delta, k) = I$; pour $k = -1$, l'affinité est involutive.

— Propriétés.

1° Biunivoque.

2° Points doubles : les points de D si $k \neq 1$, tous les points du plan si $k = 1$.

3° Si (A, A') et (B, B') sont deux couples de points homologues, les droites AB et $A'B'$ sont, ou parallèles à D, ou concourantes sur D, ou confondues suivant une parallèle à Δ.

4° $A^{-1}(D, \Delta, k) = A(D, \Delta, 1/k)$.

5° $A(D, \Delta, k') \circ A(D, \Delta, k) = A(D, \Delta, kk')$ (commutatif).

Conséquence : les affinités forment un *groupe abélien*.

● *Déplacements dans l'espace.*

— Rotation d'axe Δ et d'angle θ : $\text{Rot}(\Delta, \theta)$. M et M' sont tous deux dans un plan perpendiculaire à Δ en O et orienté par Δ.

$$OM = OM' \ ; \quad (\mathbf{OM}, \mathbf{OM'}) = \theta (\text{mod } 2\pi).$$

$\text{Rot}^{-1}(\Delta, \theta) = \text{Rot}(\Delta, -\theta)$. Si $\theta = \pi + 2k\pi$, la transformation s'appelle un *demi-tour*, ou un *retournement*.

— Translation : mêmes définitions et mêmes propriétés que dans le plan.

● *Inversion plane.*

— Définition : étant donné un point O (*pôle*) et un nombre k (*puissance*), l'inversion de pôle O et de puissance k transforme tout point M du plan en un point M' de la droite OM tel que $\overline{OM} \times \overline{OM'} = k$. Nous la noterons $\text{Inv}(O, k)$.

— Propriétés.

1° Biunivoque et involutive (si on exclut le pôle).

2° Points doubles. Si $k < 0$, pas de point double. Si $k > 0$, tous les points du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k}$, appelé le *cercle d'inversion*.

3° $\text{Inv}(O, k') \circ \text{Inv}(O, k) = \text{Hom}(O, k'/k)$ (non commutatif).

$\text{Hom}(O, K) \circ \text{Inv}(O, k) = \text{Inv}(O, Kk)$ (non commutatif).

4° Deux couples de points inverses (A, A') et (B, B') sont tels que $A'B' = AB \dfrac{|k|}{OA \cdot OB}$.

5° Les deux expressions

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} \quad \text{et} \quad |(CA, CB) - (DA, DB)|$$

6° L'inversion conserve les angles en grandeur.

7° Inverse d'une droite passant par le pôle : elle-même. Inverse d'une droite ne passant pas par le pôle : cercle (C) passant par le pôle, dont le centre, ω, est l'inverse du symétrique ω' de O par rapport à la droite considérée.

8° Inverse d'un cercle (C) ne passant pas par le pôle : cercle homothétique du cercle considéré dans l'homothétie (O, K), avec

$$K = \frac{k}{\text{Puissance du point } O \text{ par rapport à } (C)}.$$

9° Dans l'espace : même définition, mêmes propriétés, mais le cercle d'inversion est remplacé par la *sphère d'inversion*.

Généralités sur les coniques.

Ellipse.

- Définitions.

— Ensemble des points M tels que $MF + MF' = 2a$ (F et F' fixes, $FF' = 2c < 2a$).

— Ensemble des centres des cercles tangents à un cercle donné $(F', 2a)$ (nommé *cercle directeur* de l'ellipse) et passant par F, intérieur à ce cercle. Même définition avec le cercle $(F, 2a)$ et le point F'.

— Ensemble des points dont le rapport, $\frac{MF}{MK}$, des distances à un point fixe F (MF) et à une droite fixe D (MK) est constant et égal à $e = c/a < 1$. La droite D est la *directrice associée au foyer* F de l'ellipse.

- Tangentes à l'ellipse.

— La tangente en un point M de l'ellipse est bissectrice *extérieure* de l'angle FMF'.

— La projection d'un foyer sur une tangente est située sur le cercle principal de l'ellipse (cercle de diamètre $AA' = 2a$).

— Le symétrique d'un foyer par rapport à une tangente est sur le cercle directeur relatif à l'autre foyer.

— Une ellipse peut être considérée comme transformée d'un cercle par l'affinité $(\Delta, \Delta', b/a)$, Δ étant l'axe focal et Δ' la direction perpendiculaire à Δ.

Hyperbole.

- Définitions.

Les mêmes que pour l'ellipse, mais $|MF - MF'| = 2a$ (au lieu de $MF + MF' = 2a$), $FF' = 2c > 2a$ (au lieu de $2c < 2a$), $e = c/a > 1$ (au lieu de $c/a < 1$).

- Propriétés.

Les mêmes que pour l'ellipse, mais la tangente est la bissectrice *intérieure* de l'angle des rayons vecteurs. En outre, les deux branches d'une hyperbole se rapprochent indéfiniment de deux droites (qu'elles n'atteignent jamais), les *asymptotes* de l'hyperbole.

Parabole.

- Définition : ensemble des points M tels que $\frac{MF}{MK} = 1$ (MK : distance de M à une droite fixe appelée *directrice*), ou ensemble des centres des cercles tangents à la directrice et passant par F.

- Propriétés.

— La tangente en M est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MK})$.

— Soient M et M' les points de contact des tangentes issues de P, et Pz parallèle à l'axe de la parabole : 1° FP est bissectrice de $\widehat{MFM'}$; 2° (PM, PM') et (PF, Pz) ont même bissectrice (*théorème de Poncelet*).

TRIGONOMÉTRIE.

La mesure des angles est expliquée p. 89 ; les fonctions circulaires sont définies p. 90, leur variation est étudiée à la p. 117.

Généralités.

Relations entre les lignes trigonométriques de certains arcs.

- Arcs supplémentaires.

$$\sin(\pi - x) = \sin x\ ;\quad \cos(\pi - x) = -\cos x\ ;\quad \tan(\pi - x) = -\tan x\ ;\quad \cot(\pi - x) = -\cot x\ .$$

- Arcs opposés.

$$\sin(-x) = -\sin x\ ;\quad \cos(-x) = \cos x\ ;\quad \tan(-x) = -\tan x\ ;\quad \cot(-x) = -\cot x\ .$$

- Arcs dont la différence est π.

$$\sin(\pi + x) = -\sin x\ ;\quad \cos(\pi + x) = -\cos x\ ;\quad \tan(\pi + x) = \tan x\ ;\quad \cot(\pi + x) = \cot x\ .$$

- Arcs complémentaires.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x\ ;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x\ ;\quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x\ ;\quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x\ .$$

- Arcs dont la différence est $\pi/2$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x\ ;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x\ ;\quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x\ ;\quad \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x\ .$$

Relations entre les lignes trigonométriques d'un même arc.

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \\ \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1}{\cot x}, \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{\tan x}{\varepsilon\sqrt{1 + \tan^2 x}}, \\ \cos x = \dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{1 + \tan^2 x}}, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Lignes trigonométriques de quelques arcs remarquables.

Voir le tableau au bas de la page.

Addition, multiplication et division des arcs.

1 - *Formules d'addition.*

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$
$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$
$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a,$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b},$$
$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

2 - *Formules de multiplication par* 2.

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$,
$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

3 - *Expression de* $\sin a$, $\cos a$ *et* $\tan a$ *en fonction de* $\tan(a/2) = t$.

$$\sin a = \frac{2t}{1 + t^2}, \qquad \cos a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad \text{d'où} \quad \tan a = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

4 - *Division des arcs par* 2.

$$\cos\frac{a}{2} = \varepsilon\sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}, \quad \varepsilon = \pm 1;$$
$$\sin\frac{a}{2} = \varepsilon'\sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}, \quad \varepsilon' = \pm 1.$$

Formules de transformation.

Ces formules permettent de remplacer la somme ou la différence de deux fonctions circulaires par une expression factorielle.

Formules générales.

On pose $a + b = p$, $a - b = q$ et l'on démontre les formules suivantes :

$$\begin{cases} \sin p + \sin q = 2 \sin\dfrac{p + q}{2}\cos\dfrac{p - q}{2}, \\ 2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin p - \sin q = 2 \sin\dfrac{p - q}{2}\cos\dfrac{p + q}{2}, \\ 2 \cos a \sin b = \sin(a + b) - \sin(a - b), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos p + \cos q = 2 \cos\dfrac{p + q}{2}\cos\dfrac{p - q}{2}, \\ 2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos p - \cos q = 2 \sin\dfrac{p + q}{2}\sin\dfrac{q - p}{2}, \\ 2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b). \end{cases}$$

Applications.

$$1 + \cos a = 2\cos^2\frac{a}{2}; \quad 1 - \cos a = 2\sin^2\frac{a}{2}.$$

$$S = \sin a + \sin b + \sin c = 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}.$$

$$\tan p \pm \tan q = \frac{\sin(p \pm q)}{\cos p \cos q};$$

$$\cot p \pm \cot q = \frac{\sin(q \pm p)}{\sin p \sin q}.$$

$$1 \pm \tan a = \sqrt{2}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm a\right)}{\cos a}.$$

Rendre une formule calculable par logarithmes.

Une formule est calculable par logarithmes lorsqu'elle se présente sous la forme d'une série de produits ou de quotients ; $A + B$, par exemple, n'est pas calculable par logarithmes car $\log(A + B)$ ne peut être calculé à partir de $\log A$ et $\log B$. Par contre, uv est calculable par logarithmes, car $\log uv = \log u + \log v$. Voici les méthodes les plus usuelles, obtenues en faisant intervenir dans les calculs des angles auxiliaires.

- $A \pm B = \dfrac{A\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \varphi\right)}{\cos\varphi}$.

$$\Rightarrow \lg(A \pm B) = \lg A + \frac{1}{2}\lg 2 + \lg\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \varphi\right) + \operatorname{colg}\cos\varphi$$

($\lg \sin x$ signifie : logarithme du nombre $\sin x$; $\operatorname{colg} x = -\lg x$; on a posé φ tel que $\tan\varphi = B/A$).

- $A + B = A(1 + \cos\varphi)$

$$\Rightarrow \lg(A + B) = \lg 2 + \lg A + 2\lg\cos\frac{\varphi}{2},$$

avec $\cos\varphi = \dfrac{B}{A}$.

- $A - B = A(1 - \cos\varphi)$

$$\Rightarrow \lg(A - B) = \lg 2 + \lg A + 2\lg\sin\frac{\varphi}{2}.$$

- $x = a\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\omega t + \beta)$ devient, en posant

$$\tan\gamma = \frac{a\sin\alpha + b\sin\beta}{a\cos\alpha + b\cos\beta}:$$

$$x = \frac{a\cos\alpha + b\cos\beta}{\cos\gamma}\cos(\omega t + \gamma);$$

on peut ensuite rendre calculables par logarithmes

$$a\cos\alpha + b\cos\beta \quad \text{et} \quad a\sin\alpha + b\sin\beta.$$

Lignes trigonométriques de quelques arcs remarquables.

x rd	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
x degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot x$	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\infty$

- $y = a \sin x + b \cos x$ devient, en posant $\tan \varphi = a/b$:

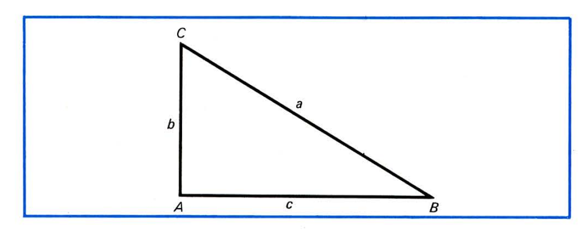
$$y = \frac{b \cos(x - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Résolution des triangles.

Dans un triangle ABC, il y a six éléments fondamentaux à mesurer : ses trois côtés, a, b et c, et ses trois angles, A, B et C, ces derniers étant tels que l'on ait : $A + B + C = \pi$. *Résoudre un triangle*, c'est calculer ses éléments à partir de certaines données, en utilisant les propriétés géométriques élémentaires des triangles. Selon la nature des données, on distingue classiquement divers cas de résolution.

Résolution des triangles rectangles.

Relations fondamentales :



$$\begin{cases} B + C = \frac{\pi}{2}, \\ b = a \sin B, \\ b = a \cos C, \\ c = a \sin C, \\ c = a \cos B. \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2, \\ b = c \tan B, \\ b = c \cot C, \\ c = b \tan C, \\ c = b \cot B. \end{cases}$$

A l'aide de ces relations on pourra résoudre un triangle rectangle si l'on connaît (cas classiques) : 1° l'hypoténuse a et un angle aigu ; 2° un côté de l'angle droit et un angle aigu ; 3° l'hypoténuse et un côté de l'angle droit ; 4° les deux côtés de l'angle droit.

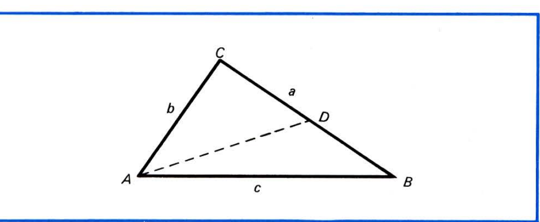
Triangles quelconques.

- Relations fondamentales.

$$\text{I} \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C. \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \\ A + B + C = \pi. \end{cases}$$

$$\text{III} \begin{cases} a = b \cos C + c \cos B, \\ b = c \cos A + a \cos C, \\ c = a \cos B + b \cos A. \end{cases}$$



Les trois groupes contiennent chacun trois relations distinctes.

- Autres éléments du triangle :

— Surface : $S = 1/2\, bc \sin A$.

— Rayon R du cercle circonscrit :

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C} = \frac{abc}{4S}.$$

— Rayon r du cercle inscrit :

$$r = (p - a) \tan \frac{A}{2} = (p - b) \tan \frac{B}{2} = (p - c) \tan \frac{C}{2},$$

(p désignant le demi-périmètre).

— Médiane $AD = m$: $m^2 = 1/4\,(b^2 + c^2 + 2\,bc \cos A)$.

— Bissectrice intérieure de l'angle A :

$$d = \frac{2\,bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{(b + c) \sin \frac{A}{2}}.$$

- Les quatre *cas classiques* de résolution des triangles quelconques sont ceux où l'on donne : 1° un côté et deux angles ; 2° deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés ; 3° deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux ; 4° les trois côtés.

On résout ces problèmes en utilisant l'un des trois groupes de trois relations distinctes donnés plus haut. Le calcul conduit, notamment, à la résolution d'équations trigonométriques (voir exemple ci-dessous).

Un exemple.

Résoudre un triangle, connaissant les côtés a et b et l'angle A, opposé au côté a.

— L'angle B satisfait à la relation

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

d'où :

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

— L'angle C se calcule ensuite par la relation

$$A + B + C = \pi,$$

d'où

$$C = \pi - (A + B).$$

— Le côté c se calcule enfin par la relation

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}, \quad \text{d'où :} \quad c = a \frac{\sin C}{\sin A}.$$

— *Discussion* : pour que le triangle soit possible, il faut que c soit un réel positif et que B et C soient des quantités réelles positives telles que $B + C < \pi$.

— *Remarque* : les formules de résolution auxquelles on est parvenu, donnant $\sin B$, inconnue principale, d'où l'on tire C et $c = a \frac{\sin C}{\sin A}$, ne comportent que des produits ou des quotients, elles sont donc calculables par logarithmes (ce qui est important pour les exemples numériques).

Équations trigonométriques.

Ce sont des équations dans lesquelles la (ou les) inconnues figurent dans des expressions trigonométriques.

Équations fondamentales.

— Équation $\sin x = a$: Soit α un arc quelconque ayant pour sinus le nombre a : $\sin \alpha = a$; les arcs x solutions de l'équation $\sin x = a$ sont donnés par les deux relations suivantes :

$$x = \alpha + 2\,k\pi \quad \text{et} \quad x = (\pi - \alpha) + 2\,k\pi.$$

(Dans la pratique, on pourra prendre α compris entre 0 et 90°, par exemple).

— Équation $\cos x = b$: Soit β un arc quelconque tel que $\cos \beta = b$; on aura les solutions

$$x = \beta + 2\,k\pi \quad \text{et} \quad x = -\beta + 2\,k\pi.$$

— Équation $\tan x = c$: Soit γ un angle dont la tangente est c, $\tan \gamma = c$; on aura les solutions

$$x = \gamma + k\pi.$$

Méthode générale de résolution des équations trigonométriques.

On leur fait subir un certain nombre de transformations aboutissant, soit à une équation algébrique, soit à une équation trigonométrique fondamentale. Voici quelques exemples.

— *Résoudre* : $\cos x (2 \sin x - 1) = 0$. Cette équation se décompose en deux :

$$\cos x = 0 \quad \text{et} \quad 2 \sin x - 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad \sin x = 1/2;$$

$\cos x = 0$ est vérifiée par les arcs $x = \pi/2 + 2\,k\pi$ et $x = -\pi/2 + 2\,k\pi$; d'autre part, on a, avec $\alpha = \pi/6$, $\sin \alpha = 1/2$, d'où :

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\,k\pi \quad \text{et} \quad x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\,k\pi.$$

Au total, les solutions de l'équation proposée sont donc :

$$x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\,k\pi, \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\,k\pi, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\,k\pi.$$

— *Résoudre* : $\cos x - \sin (x/2) = m$. On exprime $\cos x$ en fonction de $\sin (x/2)$: $\cos x = 1 - 2 \sin^2 (x/2)$, et l'on aboutit à l'équation résolvante :

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} + m - 1 = 0.$$

Posons $\sin (x/2) = z$; on est amené à résoudre l'équation du second degré

$$2\,z^2 + z + m - 1 = 0.$$

On discute cette équation en imposant à son discriminant, $\Delta = 9 - 8\,m$, d'être positif ou nul (pour que les racines soient réelles), et à ses racines, z' et z'', d'être comprises entre -1 et $+1$, puisque $z = \sin (x/2)$ est, en valeur absolue, inférieur à l'unité.

Si m est tel que z' convienne et si α est un angle tel que $\sin \alpha = z'$, on aura $x/2 = \alpha + 2\,k\pi$ et $x/2 = (\pi - \alpha) + 2\,k\pi$, d'où les solutions $x = 2\,\alpha + 4\,k\pi$ et $x = 2(\pi - \alpha) + 4\,k\pi$.

— *Résoudre* : $a \sin x + b \cos x = c$. On remplace $\sin x$ et $\cos x$ par leurs expressions respectives en fonction de $\tan (x/2) = t$, et l'on aboutit à l'équation algébrique suivante en t :

$$(b + c)\,t^2 - 2\,at + c - b = 0.$$

Si t' est une racine de cette équation, on peut écrire :

$$\tan \alpha = t', \quad \text{d'où} \quad \frac{x}{2} = \alpha + k\pi \quad \text{et} \quad x = 2\,\alpha + 2\,k\pi.$$

— *Autre méthode* : on pose $\tan \varphi = b/a$ et l'on transforme l'équation, qui devient $\sin (x + \varphi) = (c/a) \cos \varphi$. Soit alors α un arc dont le sinus est égal à $(c/a) \cos \varphi$, on aura :

$$x + \varphi = \alpha + 2\,k\pi \quad \text{et} \quad x + \varphi = (\pi - \alpha) + 2\,k\pi.$$

— *Résoudre* : $a \tan x + b \cot x = c$. On peut remplacer $\cot x$ par $\frac{1}{\tan x}$ et l'on obtient l'équation

$$a \tan^2 x - c \tan x + b = 0,$$

qu'on résout comme une équation du second degré en posant $z = \tan x$. On peut aussi remplacer $\tan x$ par $\frac{\sin x}{\cos x}$ et $\cot x$ par $\frac{\cos x}{\sin x}$, ce qui donne, après calculs,

$$c \sin 2\,x + (a - b) \cos 2\,x = a + b,$$

équation de la forme $A \sin z + B \cos z = C$ (voir ci-dessus).

Inversion des fonctions circulaires.

Généralités.

Nous prendrons l'exemple de l'inversion de la tangente, mais nos observations s'adaptent, tout aussi bien, à l'inversion du sinus, du cosinus ou de la cotangente.

Soit l'équation $\tan y = \sqrt{3}$; elle définit tout arc y dont la tangente est égale à $\sqrt{3}$. En consultant le tableau des valeurs remarquables des fonctions circulaires (voir ci-contre p. 148), nous voyons que $\tan (\pi/3) = \sqrt{3}$; nous pouvons donc écrire que tous les arcs y vérifiant la relation $y = (\pi/3) = k\pi$ sont solutions de l'équation $\tan y = \sqrt{3}$. Nous écrirons : $y = \arctan \sqrt{3}$ (lire « arc tangente $\sqrt{3}$ »), pour désigner l'un quelconque des arcs $y = (\pi/3) + k\pi$. Considérons maintenant une variable x et la relation $\tan y = x$; un arc y quelconque dont la tangente est égale à x s'écrira, de même, $y = \arctan x$. L'arc y est une fonction de x, appelée *fonction circulaire inverse* (ou, ici, *fonction tangente inverse*) ; elle est *multiforme*, car, à une valeur de x correspond une infinité de valeurs de y.

Si la fonction $\arctan x$ prend une valeur déterminée pour une valeur donnée de x dans un intervalle $[a, b]$, c'est ce qu'on appelle une *détermination* de $\arctan x$. Quand x décrit l'intervalle $[a, b]$, cette détermination de $\arctan x$ décrit généralement par continuité un intervalle $[y_a, y_b]$.

On appelle *détermination principale* de la fonction $\arctan x$ la détermination qui s'annule avec x, c'est-à-dire telle que $\arctan 0 = 0$. On la désigne par $\text{Arctan}\, x$ (avec un A majuscule) ; quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$, $\text{Arctan}\, x$ croît de $-\pi/2$ à $+\pi/2$, et l'on a toujours :

$$\arctan x = \text{Arctan}\, x + k\pi \quad (k : \text{entier quelconque}).$$

Relations.

- $y = \arcsin x$. Pour $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ on pose $y = \text{Arcsin}\, x$, définie pour $|x| \leqslant 1$; on a :

$$\arcsin x = \text{Arcsin}\, x + 2\,k\pi \quad \text{ou} \quad \pi - \text{Arcsin}\, x + 2\,k\pi.$$

- $y = \arccos x$. Pour $x \in [0, \pi]$, on pose $y = \text{Arccos}\, x$, définie pour $|x| \leqslant 1$; on a :

$$\arccos x = \pm\, \text{Arccos}\, x + 2\,k\pi$$

et

$$\text{Arcsin}\, x + \text{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2}.$$

- $y = \arctan x$. On pose, pour $x \in]-\infty, +\infty[$, $y = \text{Arctan}\, x$. On a :

$$\arctan x = \text{Arctan}\, x + k\pi.$$

— Quelques relations remarquables.

- $\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, (1/x) = \varepsilon(\pi/2)$, pour $\varepsilon x > 0$.
- $\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b = \text{Arctan}\, (a + b)/(1 - ab)$ si, et seulement si, $ab \leqslant 1$.

PRINCIPAUX RÉSULTATS DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Voir les définitions relatives aux coordonnées d'un point pp. 93-94 et pp. 96-99 : La géométrie affine de la droite et du plan.

Propriétés métriques de la droite et du plan.

Dans tout ce qui suit, nous supposons l'espace rapporté à un *repère euclidien (orthonormé)*. Les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy et Oz du trièdre de référence sont respectivement $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Dans le plan rapporté, de même, à un repère euclidien, nous prendrons deux axes rectangulaires Ox et Oy, avec $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ comme vecteurs unitaires.

Équation du plan.

- Soit le plan P d'équation $Ax + By + Cz + D = 0$ (voir p. 101).

— Le vecteur $\boldsymbol{G}(A, B, C)$ est perpendiculaire à P ; ses coordonnées sont les dérivées partielles, P'_x, P'_y, P'_z, de la fonction $P(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$. On dit que $\boldsymbol{G}$ est le *gradient* de la fonction de point $P(x, y, z)$ ou, par abus de langage, que $\boldsymbol{G}$ est un gradient du plan P.

— Angle de deux plans = angle de leurs gradients.

— Plan passant par $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et perpendiculaire à la droite D de paramètres directeurs (voir p. 97) a, b, c :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

— Condition d'orthogonalité de deux plans P et P' : $AA' + BB' + CC' = 0$ (orthogonalité de leurs gradients).

- *Équation normale du plan.*

— Distance algébrique du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ au plan $P \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ (comptée algébriquement, à partir de la projection H de M_0 sur le plan, sur l'axe orienté par $\boldsymbol{G}$) :

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

— En appelant α, β, γ, les angles de Ox, Oy et Oz avec $\boldsymbol{G}$ et p la distance algébrique $\overline{OK}$ de l'origine O au plan P, on a

$$-p = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

l'*équation normale* du plan est

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

La droite en géométrie plane.

- Soit D une droite d'équation

$$D(x, y) = Ax + By + C = 0.$$

— Le vecteur $\boldsymbol{G}(A, B)$ est perpendiculaire à D ; ses coordonnées sont D'_x, D'_y (dérivées partielles) : $\boldsymbol{G}$ est le *gradient* de la fonction de point $D(x, y)$. Par abus de langage, on dit : $\boldsymbol{G}$ est un gradient de la droite D.

— Équation de la droite passant par $M_0(x_0, y_0)$ et perpendiculaire à D :

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B}.$$

— Condition d'orthogonalité de $D(Ax + By + C = 0)$ et $D'(A'x + B'y + C' = 0)$: $AA' + BB' = 0$.

- *Équation normale de la droite.*

— Distance algébrique du point $M_0(x_0, y_0)$ à la droite $D \equiv Ax + By + C = 0$. Avec les mêmes conventions que pour le plan (voir *a*) :

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

— Avec $(Ox, \boldsymbol{G}) = \theta \pmod{2\pi}$ et $p = \overline{OK}$ (distance de l'origine à la droite, comptée algébriquement sur l'axe orienté par $\boldsymbol{G}$), l'*équation normale* de la droite est

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0.$$

Ainsi, p et θ sont les *coordonnées polaires* de K dans le système de pôle O et d'axe Ox.

- *La droite en coordonnées polaires.*

— *Soit* $M(r, \theta)$. Si la droite ne passe pas par O, son équation polaire est :

$$\frac{1}{r} = a \cos \theta + b \sin \theta \ (a = 0,\ D \parallel Ox\ ;\ b = 0,\ D \perp Ox).$$

Si la droite passe par O, l'équation se réduit à $\theta = \theta_0$.

La droite dans l'espace.

Équations de la droite D passant par $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et perpendiculaire à $P \equiv Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

Éléments à l'infini. Éléments imaginaires (Repère affine ou euclidien).

Coordonnées homogènes.

— Une ligne du plan xOy est dite *algébrique* s'il existe, entre les coordonnées x et y de ses points, une relation algébrique de la forme $f(x, y) = 0$. De même, une surface est dite *algébrique* s'il existe, entre les coordonnées de ses points, une relation algébrique $f(x, y, z) = 0$; f est un polynôme du degré n (n est appelé l'*ordre* de la surface).

— Soit M de coordonnées (x, y, z). On peut définir quatre nombres X, Y, Z et T par les équations $x = X/T$, $y = Y/T$, $z = Z/T$; on les appelle les *coordonnées homogènes* de M. Elles vont nous servir à définir les éléments à l'infini et les éléments imaginaires.

Éléments à l'infini.

— Considérons la droite D, de paramètres directeurs a, b, c. Ses équations paramétriques sont (p. 100) : $x = x_0 + a\rho$, $y = y_0 + b\rho$, $z = z_0 + c\rho$.

A ces coordonnées cartésiennes correspondent les coordonnées homogènes :

$$X = \frac{x_0 + a\rho}{\rho},\quad Y = \frac{y_0 + b\rho}{\rho},\quad Z = \frac{z_0 + c\rho}{\rho},\quad T = \frac{1}{\rho}.$$

Si le point M s'éloigne à l'infini sur la droite D, ses coordonnées homogènes tendent vers $(a, b, c, 0)$. Par définition, elles définissent le *point à l'infini* sur D. Deux droites parallèles D et D', de paramètres directeurs communs a, b et c, ont donc même point à l'infini : $(a, b, c, 0)$.

— De même, l'équation homogène d'un plan est $AX + BY + CZ + DT = 0$; lorsque A, B, C sont nuls sans que D le soit, cette équation se réduit à $T = 0$: par définition, c'est l'équation du *plan de l'infini* (auquel appartiennent tous les points à l'infini).

— De même, les équations :

$$AX + BY + CZ + DT = 0 \text{ et } T = 0\ (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

représentent, par définition, la *droite de l'infini* du plan $AX + BY + CZ + DT = 0$.

— *Intérêt de ces notions* : point à l'infini, droite à l'infini, plan de l'infini ne désignent pas des réalités représentables concrètement ; ce sont des notions *algébriques*, permettant de généraliser les calculs. L'espace « ordinaire » (affine ou euclidien), complété par ces éléments à l'infini, s'appelle l'*espace arguésien* (en l'honneur du mathématicien *Desargues*). Dans cet espace, si deux plans ne sont pas confondus, ils ont en commun une droite et une seule (s'ils sont parallèles, cette droite est à l'infini ; s'ils ne sont pas parallèles, c'est leur intersection « ordinaire »).

Éléments imaginaires.

— Convenons d'appeler « point imaginaire » un ensemble de quatre nombres complexes :

$$X = A_1 + iA_2,\ Y = B_1 + iB_2,\ Z = C_1 + iC_2,\ T = D_1 + iD_2,$$

ces nombres étant appelés les *coordonnées homogènes* du *point* qu'ils définissent ; si $T = 0$, le point imaginaire sera dit à *l'infini.*

— Nous appellerons *plan* l'ensemble des points, au sens précédent, vérifiant l'équation $AX + BY + CZ + DT = 0$, et *droite* l'ensemble des points vérifiant deux équations distinctes de cette forme.

— Le cas particulier $A_2 = B_2 = C_2 = D_2 = 0$ nous fait retrouver l'espace arguésien réel. L'intérêt de l'espace arguésien imaginaire est, évidemment, sa généralité. Par exemple, nous verrons que l'équation cartésienne du cercle de centre (a, b) et de rayon R est $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, avec $R^2 = a^2 + b^2 - c$; mais nous devons poser $a^2 + b^2 > c$ (sinon, $a^2 + b^2 - c$ serait négatif et, R^2 étant essentiellement positif, l'égalité serait impossible avec les réels). Avec des éléments imaginaires, la restriction $a^2 + b^2 > c$ ne s'impose plus et l'on peut dire que l'équation en cause représente *toujours* un cercle, réel ou imaginaire.

Éléments isotropes (repère euclidien).

Soient deux points $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Leur distance d est telle que

$$d^2 = \overline{M_1 M_2} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

les quantités $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ et $z_2 - z_1$ formant un système (a, b, c) de paramètres directeurs de la droite $M_1 M_2$. En géométrie réelle, pour que la distance d soit nulle, il faut et il suffit que $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, $z_2 = z_1$ (M_1 et M_2 confondus), car la somme de trois carrés ne peut être nulle que si ces carrés sont tous nuls. En géométrie imaginaire, ce n'est plus une condition valable, car un carré peut être négatif. D'où une définition nouvelle de la distance nulle : pour que la distance de deux points M_1 et M_2 soit nulle, il faut et il suffit que $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, a, b et c étant des paramètres directeurs de la droite $M_1 M_2$. Une telle droite est dite *isotrope*. Par chaque point imaginaire du plan passent deux droites isotropes, de pentes $+i$ et $-i$; par chaque point de l'espace passent une infinité de droites isotropes, formant un *cône isotrope.*

Dans le plan xOy, les points à l'infini des droites isotropes de ce plan ont pour coordonnées homogènes $(1, i, 0)$ et $(1, -i, 0)$: ce sont les *points cycliques* du plan.

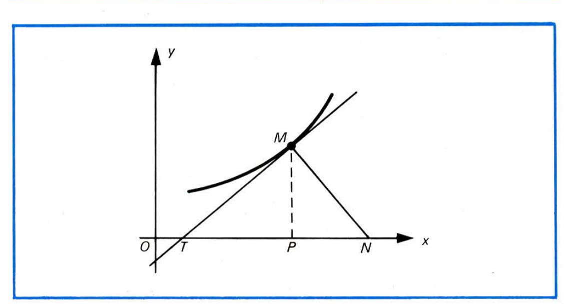
Propriétés générales des courbes et des surfaces.

(Repère euclidien ; tout ce qui suit concerne la *géométrie réelle*).

Courbes planes d'équation $y = f(x)$ admettant une dérivée $y' = f'(x)$.

— Soit $M(x, y)$ un point de la courbe ; on a :

	Pente	Équation
Tangente en M	y'	$Y - y = y'(X - x)$
Normale en M	$-\dfrac{1}{y'}$	$X - x + y'(Y - y) = 0$
Sous-tangente	$\overline{PT} = -\dfrac{y}{y'}$	
Sous-normale	$\overline{PN} = yy'$	



— Quand la dérivée seconde y'' s'annule en changeant de signe, la concavité de la courbe change de sens ; le zéro de y'' est l'abscisse d'un *point d'inflexion.*

— Si, quand $x \to \pm\infty$, $y \to a$, la droite $y = a$ est *asymptote* à la courbe (qui se rapproche d'elle indéfiniment sans jamais la couper). Si, quand $x \to b$, $y \to \pm\infty$, la droite $x = b$ est asymptote à la courbe. Quand x et y tendent en même temps vers l'infini, si $y \to cx + d$, la droite $y = cx + d$ est une *asymptote oblique.*

Courbes planes définies par deux équations paramétriques.

— La courbe est représentée par $x = f(t)$ et $y = g(t)$.

— Équation de la tangente en $M_0(t_0)$:

$$\frac{x - f(t_0)}{f'(t_0)} = \frac{y - g(t_0)}{g'(t_0)}.$$

— Équation de la normale en $M_0(t_0)$:

$$[x - f(t_0)]\, f'(t_0) + [y - g(t_0)]\, g'(t_0) = 0.$$

— Si, par un point, il passe plusieurs branches de la courbe, ce point est dit *multiple.* Les *points doubles* s'obtiennent en cherchant les couples de valeurs (t_1, t_2) de t tels qu'on ait à la fois $f(t_1) = f(t_2)$ et $g(t_1) = g(t_2)$.

— Si une courbe est donnée par son équation en coordonnées polaires, $\rho = f(\theta)$, on a immédiatement la représentation paramétrique

$$x = f(\theta) \cos \theta,\quad y = f(\theta) \sin \theta.$$

Courbes planes définies par une équation implicite $f(x, y) = 0$.

— Tangente en $M_0(x_0, y_0)$:

$$(x - x_0)\, f'_{x_0} + (y - y_0)\, f'_{y_0} = 0.$$

— Si $f'_{x_0} = f'_{y_0} = 0$, M_0 est un *point singulier.*

Géométrie dans l'espace.

1° La courbe définie par $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ est *plane* si, et seulement si, on peut déterminer des constantes A, B, C, D, telles que $Af(t) + Bg(t) + Ch(t) + D = 0$; sinon, la courbe est *gauche.*

2° Tangente en M_0 :

$$\frac{x - f(t_0)}{f'(t_0)} = \frac{y - g(t_0)}{g'(t_0)} = \frac{z - h(t_0)}{h'(t_0)}.$$

3° Si, en M_0, $f'(t_0)$, $g'(t_0)$, $h'(t_0)$ ne sont pas nuls en même temps, le plan défini par la tangente en M_0 à la courbe et un point M voisin de M_0 tend vers une position limite quand $M \to M_0$; cette position limite s'appelle le *plan osculateur* de la courbe au point M_0.

4° *Surface* $z = f(x, y)$. On suppose f continue et dérivable par rapport à l'ensemble des variables.

- Plan tangent à $z = f(x, y)$ en un point $M_0(x_0, y_0)$:

$$z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0),$$

avec $p_0 = f'_x(x_0, y_0)$ et $q_0 = f'_y(x_0, y_0)$.

- Normale en M_0 :

$$\frac{x - x_0}{p_0} = \frac{y - y_0}{q_0} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Lieux géométriques.

Un *lieu géométrique* est un ensemble de points caractérisés par une propriété géométrique commune. La recherche d'un lieu géométrique consiste, en géométrie analytique, à déterminer l'équation ou les équations de ce lieu, qui peut être une ligne, une surface, etc.

Recherche de l'équation cartésienne du lieu.

1° On définit le repère (affine ou euclidien, plan ou à trois dimensions, etc.).

2° On appelle x et y (ou x, y et z) les coordonnées d'un point M quelconque et on exprime, en se servant des données du problème, la condition nécessaire et suffisante pour que M appartienne au lieu.

3° On obtient l'équation du lieu.

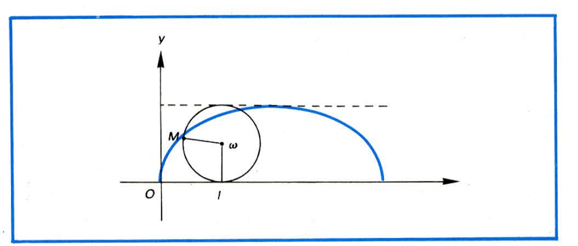
Exemple : le point A est fixe sur un cercle de diamètre a ; on considère une corde AP variable du cercle et l'on porte sur AP une longueur $PM = b$. Quel est le lieu de M quand P décrit le cercle ?

— On prend un système de coordonnées polaires, d'axe Ax passant par le centre du cercle.

— Les coordonnées d'un point M du lieu sont (ρ, θ), telles que $\theta = (Ax, AP)$ et $\rho = AM$. On a $AP = a \cos \theta$ et $AM = \rho = a \cos \theta + b$; c'est l'équation cherchée (la courbe obtenue s'appelle un *limaçon de Pascal*).

Représentation paramétrique.

La recherche des équations paramétriques simplifie souvent les calculs ; on peut retrouver ensuite l'équation cartésienne en éliminant le paramètre.



Exemple : Représentation paramétrique de la *cycloïde* (courbe décrite par un point M d'un cercle roulant sans glissement sur une droite ; voir figure au bas de la colonne précédente).

Le cercle roulant sans glisser sur Ox, le point M qui se trouvait en O à l'instant initial occupe, lorsque le point de contact du cercle avec Ox est venu en I, une position telle que arc IM = longueur OI.

Posons $(\omega M, \omega I) = t$ et projetons sur les axes l'égalité vectorielle :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OI} + \mathbf{I\omega} + \mathbf{\omega M}.$$

On trouve, comme expressions des coordonnées x et y de M en fonction de t :

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t).$$

Utilisation des transformations.

Au point $M(x, y, z)$ de l'espace nous faisons correspondre son transformé M_1, de coordonnées $x_1 = f(x, y, z)$, $y_1 = g(x, y, z)$, $z_1 = h(x, y, z)$. Si M appartient à une figure F dont on connaît l'équation, M_1 appartient à une figure F_1 dont l'équation peut se déduire de celle de F. L'intérêt pratique des transformations, en géométrie analytique, est le suivant : pour chercher le lieu d'un point M, on a parfois avantage à transformer M en M_1 et à chercher le lieu de M_1, dont l'équation est plus simple ; on repasse ensuite de l'équation du lieu de M_1 à celle du lieu de M.

Corrélation en géométrie plane. Tangente et enveloppes.

Courbes corrélatives (coordonnées homogènes).

— Soit la droite $D \equiv AX + BY + CT = 0$; associons-lui le point P de coordonnées homogènes (A, B, C) : on dit que le point et la droite considérés sont *corrélatifs.* Plus généralement, étant donné une courbe C et une tangente variable D à cette courbe, appelons Γ la courbe lieu du point P corrélatif de la droite D : les courbes C et Γ sont dites *corrélatives.*

— *Théorème* : Si la droite D varie en passant par un point fixe A, le corrélatif P de la droite D décrit la droite Δ, corrélative du point A.

— Soit une courbe algébrique $f(X, Y, T) = 0$; la condition pour qu'une droite $AX + BY + CT = 0$ soit tangente à la courbe s'obtient en écrivant que l'équation de la droite est identique à l'équation, $Xf'_X + Yf'_Y + Tf'_T = 0$, de la tangente à la courbe au point (X, Y, T). On obtient donc :

$$AX + BY + CT = 0 \quad \text{et} \quad \frac{A}{f'_X} = \frac{B}{f'_Y} = \frac{C}{f'_T};$$

en éliminant X, Y et T entre ces équations, on obtient une relation algébrique $\varphi(A, B, C) = 0$ qui est l'*équation tangentielle de la courbe.* On montre que cette équation est l'équation de la corrélative à la courbe considérée et réciproquement. Le *degré* de l'équation tangentielle est la *classe* de la courbe considérée. Une courbe de première classe possède une équation tangentielle du premier degré, $aA + bB + cC = 0$, ce qui revient à dire que la droite $AX + BY + CT = 0$ passe par le point (a, b, c) ; donc, si une courbe est de première classe, cette courbe est un point.

Enveloppes (coordonnées non homogènes).

Soit une famille de courbes, C_1, C_2, ... dépendant d'un paramètre λ et définies par l'équation $f(x, y, \lambda) = 0$. S'il existe une courbe E tangente à toutes les courbes de cette famille, E s'appelle l'*enveloppe* des courbes $f(x, y, \lambda) = 0$. On démontre le théorème suivant :

S'il existe une enveloppe E, telle que, pour un arc considéré de E au voisinage du point $M(x, y)$, les dérivées partielles f'_x et f'_y demeurent finies et continues, cette enveloppe appartient au lieu des points de rencontre des deux courbes

$$f(x, y, \lambda) = 0 \quad \text{et} \quad f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0.$$

Inversement, toute courbe définie par le système précédent est, soit une enveloppe de courbes $f(x, y, \lambda) = 0$, soit un lieu de points singuliers des lignes $f(x, y, \lambda) = 0$, soit une courbe « stationnaire » de la famille.

Courbure.

Longueur d'un arc.

Soit la courbe $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ et un arc M_0M correspondant à la variation $t - t_0$ du paramètre ; on démontre que, s désignant l'abscisse curviligne de M (c'est-à-dire la longueur de l'arc OM, O étant une origine sur la courbe), on a :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

et

$$M_0M = \pm \int_{t_0}^{t} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}\, dt.$$

Centre et rayon de courbure.

Soit une courbe C et la tangente MT en M à cette courbe, que nous orientons selon l'axe $\mathbf{T'T}$. Considérons, d'autre part, une sphère de centre O et de rayon égal à l'unité. Le rayon $O\mu$ parallèle à MT, μ étant sur la sphère, varie avec la direction (positive) de MT ; à des points M_1, M_2, M_3, ... correspondent des points μ_1, μ_2, μ_3, ... sur la sphère et des rayons $O\mu_1$, $O\mu_2$, $O\mu_3$, ... Le lieu du point μ est une courbe, tracée sur la sphère, et qu'on appelle l'*indicatrice sphérique* de la courbe C ; la droite $O\mu$ engendre un cône de sommet O, le *cône des tangentes* à C. On a :

$O\mu$ normal à la sphère $\Rightarrow$ tangente en μ à l'indicatrice parallèle à la normale principale en M à la courbe C.

Soient deux points M et M', d'abscisses curvilignes s et s' sur C ; soit σ et σ' les abscisses curvilignes de μ et μ' sur l'indicatrice. Quand M' tend vers M, il en est de même pour μ et μ' ; $s' - s \to ds$, $\sigma' - \sigma \to d\sigma$ et l'on appelle rayon de courbure de C au point M le quotient différentiel $ds/d\sigma = R$. Le point ω de la normale MN, tel que $M\omega = R$, s'appelle le *centre de courbure* en M.

— *Calcul du rayon de courbure* : Si l'on connaît les coordonnées x, y, z de M en fonction de l'abscisse curviligne s de M, on a :

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2.$$

Si x, y et z sont connus en fonction d'un paramètre t, on a :

$$\frac{1}{R^2} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

avec

$$A = y'z'' - z'y'', \quad B = z'x'' - x'z'', \quad C = x'y'' - y'x''.$$

— *Cas d'une courbe plane.* L'indicatrice se compose alors d'arcs du grand cercle de la sphère de centre O et de rayon unité contenu dans le plan xOy de la courbe. On a alors intérêt à poser $\varphi = (Ox, MT) = (Ox, O\mu)$ et à calculer le rayon de courbure en utilisant les formules

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds}, \quad \sin\varphi = \frac{dy}{ds}, \quad R = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Courbes du second ordre (coniques).

Une courbe du second ordre est une courbe dont l'équation est du second degré par rapport aux coordonnées (homogènes ou cartésiennes). On démontre qu'une équation quelconque du second ordre représente une ellipse, une hyperbole, une parabole ou un système de deux droites, selon les cas (un cercle est une ellipse dont les foyers sont confondus au centre O de la courbe).

Coordonnées homogènes (X, Y, T).

L'équation d'une courbe du second ordre est :

$$f(X, Y, T) = AX^2 + BY^2 + CT^2 + 2\,DYT + 2\,EXT + 2\,FXY = 0.$$

— Si les trois droites

$$\frac{1}{2}f'_X = AX + FY + ET = 0,$$
$$\frac{1}{2}f'_Y = FX + BY + DT = 0,$$
$$\frac{1}{2}f'_T = EX + DY + CT = 0$$

sont concourantes (la courbe admet un point d'ordre deux), la courbe est décomposée (en deux droites distinctes). Si les trois droites sont confondues, la courbe se réduit à une *droite double* confondue avec elles.

Coordonnées cartésiennes (x, y).

L'équation est de la forme :

$$f(x, y) = Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0.$$

(Les coefficients ne sont pas égaux, en général, aux coefficients de l'équation en coordonnées homogènes ; nous les supposerons, en outre, tous réels.)

1° *Points à l'infini.*

- $B^2 - AC < 0$: tous les points (réels) de la courbe sont à distance finie (pas de direction asymptotique réelle).
- $B^2 - AC > 0$: deux directions asymptotiques réelles et distinctes.

2° *Nature géométrique d'une courbe du second ordre.*

- $B^2 - AC = 0$: la courbe est une *parabole.* Un changement convenable d'axes permet d'écrire l'équation sous la forme explicite $Y^2 = 2pX$.
- $B^2 - AC \neq 0$: la courbe possède un centre de symétrie et un seul. Si α et β sont les coordonnées du centre, la translation des axes $x = \alpha + X$, $y = \beta + Y$ permet d'écrire l'équation sous la forme

$$AX^2 + 2\,BXY + CY^2 = 1.$$

Les *directions asymptotiques* ont pour équation :

$$\varphi(x, y) \equiv Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 = 0;$$

leurs bissectrices sont les deux droites réelles rectangulaires

$$By^2 + (A - C)\,xy - Bx^2 = 0.$$

Avec ces bissectrices comme axes, l'équation

$$AX^2 + 2\,BXY + CY^2 = 1$$

devient $\lambda x^2 + \mu y^2 = 1$. Dès lors, deux cas sont possibles :

1er *cas* : λ et μ ont des signes contraires (par exemple $\lambda > 0$ et $\mu < 0$) ; les asymptotes sont *réelles* et la courbe est une *hyperbole.* En posant $\lambda = 1/a^2$, $\mu = -1/b^2$, son équation est :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2e *cas* : λ et μ sont de même signe ; les asymptotes sont *imaginaires* et la courbe est une *ellipse.* Si λ et μ sont négatifs, c'est une ellipse imaginaire ; si λ et μ sont positifs, on peut poser $\lambda = 1/a^2$ et $\mu = 1/b^2$, et l'équation de l'ellipse (réelle) est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

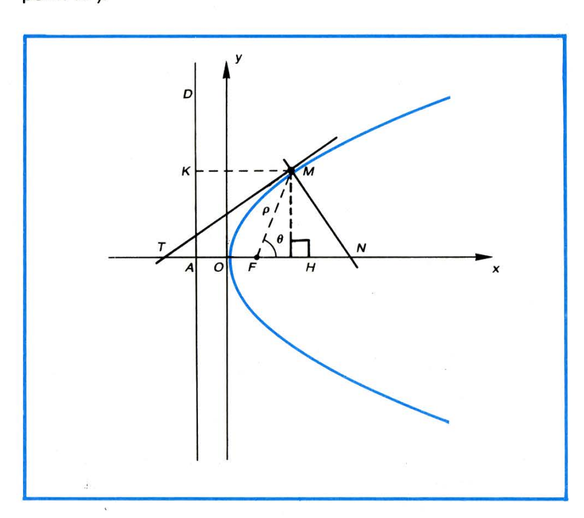
Résumé sur les trois coniques.

La *parabole*, l'*ellipse* et l'*hyperbole* sont des courbes obtenues en coupant un cône de révolution par un plan ; on les appelle, pour cette raison, des *coniques*. Voir les figures ci-dessous.

— Parabole : $y^2 = 2\,px$ (lieu des points M tels que $MF = MK$).

$$OA = OF = \frac{p}{2}; \quad FM = \frac{p}{2} + x \ (F : \text{foyer}); \quad HN = p; \quad HT = 2\,x.$$

Équation polaire : $\rho = \dfrac{p}{1 - \cos\theta}$: (ρ rayon vecteur FM du point M).



— Ellipse : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (lieu des points M tels que $MF + MF' = 2\,a$).

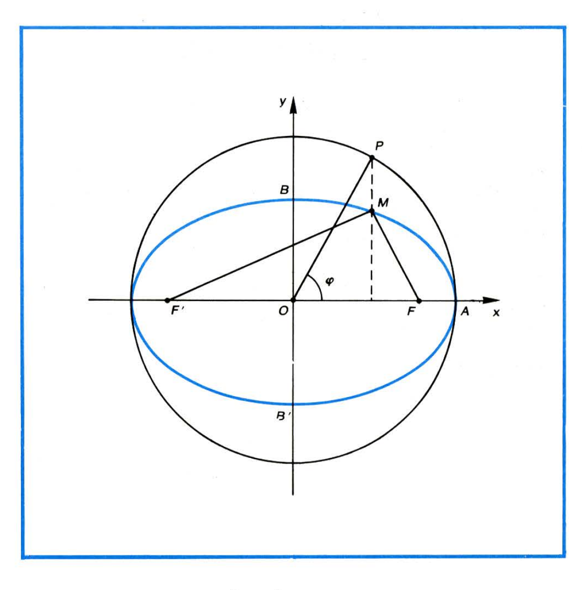
$$\overline{OA} = a, \quad \overline{OB} = b, \quad \overline{OF} = c; \quad b^2 = a^2 - c^2.$$

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi, \end{cases} \quad \varphi = (Ox, OP).$$

$$FM = a - \frac{cx}{a}, \quad F'M = a + \frac{cx}{a}.$$

Équation polaire : $\rho = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$ avec

$$p = \frac{b^2}{a}; \quad e = \frac{c}{a} < 1, \quad \rho = FM, \quad \theta = (Fx, FM).$$



— Hyperbole : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Lieu des points M tels que $|MF' - MF| = 2\,a$.

$$\overline{OA} = -\overline{OA'} = a, \quad \overline{OF} = -\overline{OF'} = c, \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

$$e = \frac{c}{a} > 1. \text{ Si } a = b, \ e = \sqrt{2} \ (\textit{hyperbole équilatère}).$$

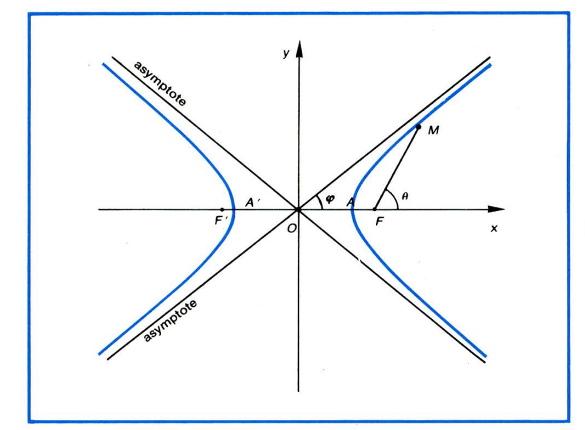
$$\text{tg}\,\varphi = \frac{b}{a}; \text{ équation des asymptotes } y = \pm\frac{b}{a}x.$$

$$FM = \frac{cx}{a} - a, \quad F'M = \frac{cx}{a} + a.$$

COURBES USUELLES

Équation polaire : $\rho = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$, avec

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \frac{c}{a} > 1, \quad \rho = FM, \quad \theta = (Fx, FM).$$



parabole	hyperbole équilatère	courbe logarithmique	courbe exponentielle
$\rho = a\sec^2\frac{\theta}{2}$	$x = \frac{a}{y}$	$y = \ln 4$	$y = e^x$
courbe de Gauss	cissoïde de Dioclès	conchoïde de Nicomède	folium de Descartes
$y = e^{-x}$	$y^2(2a - x) = x^3$	$b^2x^2 = (x - a)^2(x^2 + y^2)$	$x^3 + y^3 - 3axy = 0$
cycloïde	chaînette	strophoïde	limaçon de Pascal
$x = a\arcsin\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$	$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$	$y^2 = x^2\frac{a+x}{a-x}$	$\rho = b - a\cos\theta$
spirale logarithmique	cardioïde	hypocycloïde à 4 rebroussements	lemniscate de Bernoulli
$\rho = e^{a\theta}$	$(x^2 + y^2)^2 + 4ax(x^2 + y^2) = 4a^2y^2$	$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (4a)^{\frac{2}{3}}$	$(x^2 + y^2)^2 + a^2(x^2 - y^2)$

Allure de quelques courbes usuelles.

Normales aux coniques.

— Ellipse $\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi. \end{cases}$

Normale en $M(\varphi)$: $\dfrac{aX}{\cos\varphi} - \dfrac{bY}{\sin\varphi} - c^2 = 0.$

Équation de la *développée* (lieu des centres de courbure) :

$$(aX)^{2/3} + (bY)^{2/3} = c^{2/3} ;$$

c'est aussi l'enveloppe de la droite

$$X\sin\varphi - Y\cos\varphi = \frac{c^2}{a}\sin\varphi\cos\varphi,$$

qui se déplace de telle sorte que la distance de ses points d'intersection avec les axes demeure constante.

— Hyperbole : on obtient les mêmes résultats que pour l'ellipse, en changeant b^2 en $-b^2$.

— Parabole : normale au point (x, y) :

$$yX + pY - y(x + p) = 0.$$

Développée de la parabole :

$$8(p - X)^3 + 27\,pY^2 = 0$$

(courbe du 3e ordre).

Équation du cercle.

Le cercle est une ellipse d'excentricité nulle ($c = 0$).

— Origine au centre ω du cercle : $x^2 + y^2 = R^2$.

— Origine distincte de ω, de coordonnées (α, β) :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

soit : $x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, avec

$$D = -\alpha,\ E = -\beta,\ F = \alpha^2 + \beta^2 - R^2.$$

L'équation du cercle s'obtient donc en faisant $A = C = 1$ et $B = 0$ dans l'équation générale d'une courbe du second ordre. A partir de cette équation, on a immédiatement :

$$\alpha = -D,\ \beta = -E,\ R^2 = D^2 + E^2 - F.$$

Quelques courbes usuelles.

Voir planche ci-contre.

Surfaces du second ordre, ou quadriques.

Généralités.

— Une surface du second ordre, ou *quadrique*, a pour équation, en coordonnées homogènes :

$$f(x, y, z, t) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + 2t(Gx + Hy + Iz) + Jt^2 = 0.$$

Si elle admet un point, et un seul, d'ordre 2, c'est un *cône* et elle est développable (condition nécessaire et suffisante). Cette condition équivaut au fait que les quatre plans d'équations $\frac{1}{2}f'_x = 0, \frac{1}{2}f'_y = 0, \frac{1}{2}f'_z = 0, \frac{1}{2}f'_t = 0$ ont un point commun et un seul.

— Pour classer les quadriques, on considère le cône

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 0,$$

appelé *cône directeur* de la surface. L'intersection de ce cône avec le plan de l'infini est une *conique à l'infini*, représentée par :

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad t = 0.$$

Selon la nature de cette conique, on distinguera diverses classes de quadriques.

— Signalons que, si une surface a deux points d'ordre deux, elle se *décompose* en deux plans ; si ces deux plans sont confondus, la quadrique se réduit à un plan double.

Classification des quadriques.

• Si la conique à l'infini se décompose, elle peut se réduire (voir p. 151) :

— soit à une droite double : alors le cône directeur se réduit à un plan double et la quadrique s'appelle un *cylindre parabolique*, d'équation

$$x^2 + 2G_1x + 2H_1y + 2I_1z + J = 0,$$

ou, en prenant un repère convenable : $Y^2 - 2pX = 0$. Cette surface est un cylindre dont la section plane par un plan non parallèle aux génératrices est une parabole.

— soit à deux droites distinctes ; alors le cône directeur se réduit à deux plans distincts et la quadrique s'appelle un *paraboloïde*, d'équation :

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + 2G_1x + 2H_1y + 2I_1z + J_1 = 0\ (\alpha \text{ et } \beta \neq 0).$$

Le paraboloïde est dit *elliptique* si α et β sont de même signe, *hyperbolique* si α et β sont de signes contraires.

Par une translation convenable des axes, on peut représenter un paraboloïde par l'équation $Z = aX^2 + bY^2$. Cette surface peut être engendrée par une parabole Π dont le sommet décrit la parabole (P) : $X = 0$, $Z = bY^2$, avec comme position initiale (Q) : $Y = 0$, $Z = aX^2$, soit par translation d'une parabole dont la position initiale est (P) et dont le sommet décrit (Q). P et Q sont appelées les *paraboles principales* du paraboloïde.

Une parabole tournant autour de son axe engendre un *paraboloïde de révolution* d'équation $Z = a(X^2 + Y^2)$.

• Si la conique à l'infini ne se décompose pas, le cône directeur est lui-même indécomposé et l'on obtient alors une quadrique possédant un centre de symétrie, et un seul, et au moins trois plans de symétrie, rectangulaires deux à deux. Avec un système convenable de coordonnées, l'équation de la surface peut se mettre sous la forme

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 1. \qquad (1)$$

1er cas : le cône directeur est imaginaire (α, β, γ de même signe tous les trois).

— Si α, β, γ sont tous trois négatifs, la surface est un *ellipsoïde imaginaire*.

— Si α, β, γ sont tous trois positifs, c'est un *ellipsoïde réel*, dont l'équation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0$$

(la *sphère* est un cas particulier de l'ellipsoïde).

2e cas : le cône directeur est réel (α, β, γ non de même signe). On obtient deux types de surface :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1.$$

La première s'appelle un *hyperboloïde à une nappe*, la seconde, un *hyperboloïde à deux nappes*.

• *En résumé* :

— Si la conique à l'infini se décompose, la quadrique est

— soit un cylindre parabolique,

— soit un paraboloïde (elliptique si α et β sont de même signe, hyperbolique si α et β sont de signes contraires).

— Si la conique à l'infini ne se décompose pas, la quadrique est :

a) soit, dans le cas où le cône directeur est imaginaire, un ellipsoïde (imaginaire si α, β et γ sont négatifs, réel si α, β et γ sont positifs),

b) soit, dans le cas où le cône directeur est réel, un hyperboloïde (à une nappe ou à deux nappes).

Intersection de deux quadriques.

Deux quadriques se coupent :

1° soit selon une courbe d'ordre 4 (une *quartique*) ;

2° soit selon un système de courbes dont la somme des ordres est égale à 4, c'est-à-dire :

— soit une droite et une cubique gauche ;

— soit deux coniques, pouvant se réduire chacune à 2 droites, distinctes ou non.

FONCTIONS DE VARIABLES RÉELLES

Développements en série.

Cette formule, donnée p. 118, peut être appliquée à l'étude locale d'une fonction.

Formule des accroissements finis.

Le théorème des accroissements finis permet d'étudier une fonction localement, c'est-à-dire sur un petit intervalle de variation. Par exemple, la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ donne :

$$f(x+h) = a(x+h)^2 + b(x+h) + c = ax^2 + bx + c + h\left[2a\left(x + \frac{h}{2}\right) + b\right].$$

Or la formule des accroissements finis s'écrit ici :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h) = f(x) + h[2a(x+\theta h) + b].$$

En comparant avec le résultat précédent, on voit que :

$$h[2a(x+\theta h) + b] = h\left[2a\left(x + \frac{h}{2}\right) + b\right], \text{ d'où } \theta = \frac{1}{2},$$

quels que soient h et x.

Ce résultat correspond à une propriété géométrique classique de la parabole.

Formules de Taylor et de MacLaurin.

(Voir ces formules p. 115.)

• *Développement de quelques fonctions usuelles.*

— La fonction $f(x) = \cos x$ donne les dérivées successives

$$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \sin x,$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x, \quad f^{(5)}(x) = -\sin x, \dots,$$

d'où, d'après la formule de MacLaurin,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta x.$$

On peut pousser le développement aussi loin qu'on le désire. Pour une valeur donnée de x, on détermine, par la formule précédente, la valeur de $\cos x$ avec autant de décimales que l'on veut.

— Autres développements (MacLaurin) :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1)$$

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}\ln a + \frac{x^2}{2!}(\ln a)^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!}(\ln a)^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(\ln a)^{n+1}a^{\theta x}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\operatorname{ch}(\theta x)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\operatorname{sh}(\theta x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\times\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)x^{n+1}}{(n+1)!(1+\theta x)^{n-\alpha+1}}$$

• *Autres applications de développements en série.*

— Pour calculer la partie principale d'une différence $\delta = u(x) - v(x)$, on peut développer $u(x)$ et $v(x)$ jusqu'au terme d'un certain ordre et faire la différence des deux développements.

— Les formules de Taylor et de MacLaurin sont aussi utilisées pour la recherche de limites quand on est en présence de formes indéterminées (0/0, ∞/∞, etc.). Par exemple, $\dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ prend la forme 0/0 quand x est égal à 0. En remplaçant le numérateur et le dénominateur par des infiniment petits équivalents, on trouve :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = 2.$$

— Enfin les développements limités a une fonction facilitent l'étude locale des fonctions (asymptotes, etc.). Par exemple, soit la fonction $y = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$; s'il existe, pour y, un développement de la forme $ax + b + \varepsilon(x)$, $\varepsilon(x)$ étant une fonction qui tend vers zéro avec $1/x$, la droite $ax + b$ est asymptote à la courbe. Cela revient à chercher un développement limité dans lequel $1/x$ (et non plus x) est la variable. On a :

$$y = -x\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} = -x\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1/3}$$

et le développement suivant (voir 1) :

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1/3} = 1 - \frac{1}{3}\frac{1}{x} - \frac{1}{9}\frac{1+\varepsilon}{x^2},$$

d'où :

$$y = -x + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\frac{1+\varepsilon}{x}.$$

Quand $x \to \infty$, $y \to -x + (1/3)$ (asymptote), la courbe est au-dessus de $y = -x + (1/3)$ pour $x > 0$, au-dessous pour $x < 0$.

• *Le nombre e.*

— C'est la valeur de x telle que la fonction $\ln x$ (fonction logarithme népérien) soit égale à 1. Cette valeur est unique, car $\ln x$ est une fonction nulle pour $x = 1$, continue et constamment croissante.

— La dérivée de $y = e^x$ est $y' = e^x$, d'où il résulte que le rapport $\dfrac{e^h - 1}{h}$ tend vers 1 quand h tend vers 0. Si l'on pose $h = \ln(1+x)$, le rapport $\dfrac{h}{e^h - 1} = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers 0. Si l'on donne à x des valeurs de la forme $x = 1/m$, on aura :

$$z = \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln[(1+x)^{1/x}] \to 1 \text{ quand } x \to 0,$$

ou

$$z = \ln\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right] \to 1 \text{ quand } m \to \infty.$$

Autrement dit :

$$\ln\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right] < 1 (= \ln e), \quad \text{d'où} \quad \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < e.$$

On démontrerait aussi que $e < (1 + 1/m)^m (1 + 1/m)$, d'où avec $0 < \theta < 1$:

$$e = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \left(1 + \frac{\theta}{m}\right).$$

Quand m croît indéfiniment, la limite de $(1 + 1/m)^m$ est donc e.

— On établit aussi que e est la somme de la série convergente

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!} + \cdots.$$

— Le calcul donne $e = 2{,}718\,281\,828\ldots$

Règles pratiques pour l'étude d'une fonction numérique.

Déterminer les intervalles de définition.

« Sur quelles parties de ℝ, ensemble des réels, la fonction est-elle une application ? » — « Pour quelles valeurs de la variable peut-on la calculer ? ».

Exemples :

$y = \dfrac{1}{x+1}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ sauf pour $x = -1$ (qui annule le dénominateur) ; elle est continue partout où elle est définie et présente une discontinuité pour $x = -1$. D'où les intervalles de définition $]-\infty, -1[$, $]-1, +\infty[$.

$y = \sqrt{x+3}$ est définie et continue pour $x + 3 \geqslant 0$, soit $x \geqslant -3$. Elle n'est pas définie pour $x < -3$.

$y = \operatorname{Arc}\sin x$ est définie dans l'intervalle $[-1, +1]$ et continue dans cet intervalle (x est le sinus de l'arc y ; un sinus est compris entre -1 et $+1$).

$y = (1 + 1/x)^x$ est définie pour $1 + 1/x$ positif, soit $x(x+1) > 0$; x doit donc être extérieur à l'intervalle $[-1, 0]$.

Symétrie et périodicité.

— Si $f(x) = f(-x)$ pour tout x, la fonction est dite *paire* ; sa courbe représentative est symétrique par rapport à Oy dans un repère orthogonal. On peut donc étudier la fonction pour $x > 0$ et compléter l'étude par une symétrie par rapport à Oy.

— Si $f(x) = -f(-x)$, la fonction est dite *impaire* ; la courbe est symétrique par rapport à l'origine O. Ici aussi, on n'étudiera y que pour les valeurs positives de x.

— Si, quel que soit x, on a $f(x + T) = f(x)$, la fonction est *périodique*, de période T. On peut se contenter d'étudier la fonction dans un intervalle d'amplitude T et de compléter par des translations parallèles à Ox.

Exemple. La fonction $y = \sin x + \sin 2x$ est périodique, de période 2π, puisque

$$\sin(2\pi + x) + \sin(4\pi + 2x) = \sin x + \sin 2x ;$$

on peut donc se limiter à l'intervalle $[0, 2\pi]$. Mais on remarque aussi que

$$f(-x) = \sin(-x) + \sin(-2x) = -\sin x - \sin 2x = -f(x),$$

c'est-à-dire que la fonction est impaire. Le point O est donc un centre de symétrie pour la courbe, et il suffit d'étudier y dans l'intervalle $[0, \pi]$ et de compléter par une symétrie de centre O.

Étude de la dérivée $y' = f'(x)$.

— Calculer y' en utilisant les formules de dérivation.

— Résoudre l'équation $y' = 0$ (ce qui s'appelle « chercher les zéros de la dérivée ») ; les racines réelles de cette équation donnent les *valeurs critiques* de la variable.

— Écrire, si possible, la dérivée sous la forme d'un produit de facteurs et étudier, dans un tableau, le signe de chaque facteur, avant et après les valeurs critiques.

— Faire le produit des signes, ce qui donne le signe de la dérivée pour les différentes valeurs de la variable. Si, pour une valeur critique x_0 de la variable, la dérivée change de signe (par exemple : $y' < 0$ pour $x < x_0$ et $y' > 0$ pour $x > x_0$), la valeur critique x_0 définit un maximum ou un minimum pour la fonction y (cet extrémum s'obtient en remplaçant x par x_0 dans $y = f(x)$.

— La croissance ou la décroissance d'une fonction continue et dérivable dans un intervalle peut se déterminer d'après le signe de sa dérivée ($y' > 0$: y croissante ; $y' < 0$: y décroissante). Mais il est possible d'étudier le sens de variation de la fonction y par d'autres moyens (indispensables dans certains cas).

Étude de la dérivée seconde y''.

Calculer la dérivée seconde, y'', et étudier ses zéros et son signe. La règle mnémotechnique $\uplus$ $\cap$ rappelle que la concavité de la courbe est tournée vers le haut (vers les y positifs) quand $y'' > 0$, et vers le bas quand $y'' < 0$. Quand y'' s'annule en changeant de signe, le point correspondant est un *point d'inflexion* pour la courbe.

Exemple. Soit la courbe $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$; étudier ses points d'inflexion. On a

$$y' = 12x^3 - 12x^2 \quad \text{et} \quad y'' = 36x^2 - 24x.$$

L'équation $y'' = 0$ a deux racines réelles : $x_1 = 2/3$ et $x_2 = 0$; on peut l'écrire, en effet, sous la forme $y'' = 12x(3x - 2) = 0$, qui met les racines en évidence. D'autre part, y'' est un trinôme du second degré, du signe de son premier coefficient pour les valeurs de x extérieures à $[0, 2/3]$ et de signe contraire pour $0 < x < 2/3$. Donc :

x		0		$\frac{2}{3}$	
y''	+	0	−	0	+

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe pour $x = 0$ et $x = 2/3$; la courbe admet donc deux points d'inflexion, pour ces valeurs de la variable.

Recherche des asymptotes.

1° Les asymptotes parallèles aux axes correspondent aux deux cas suivants :

• Si, quand $x \to \infty$, $y \to b$, la droite $y = b$, parallèle à l'axe Ox, est asymptote à la courbe.

• Si, quand $x \to a$, $y \to \infty$, la droite $x = a$, parallèle à l'axe Oy, est asymptote à la courbe.

• Si x et y tendent tous deux vers l'infini, on cherche s'il existe une fonction affine $y \to ax + b$ telle que

$$f(x) - ax - b$$

tende vers zéro quand $x \to \infty$; si oui, la droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe.

2° *Règle pratique.*

— Écrire la fonction sous la forme implicite $f(x, y) = 0$.

— Égaler à zéro le coefficient du terme en x de plus haut degré. On obtient ainsi (s'il en existe) toutes les asymptotes parallèles à Ox.

— Égaler à zéro le coefficient du terme en y de plus haut degré. On obtient ainsi (s'il en existe) toutes les asymptotes parallèles à Oy.

— Remplacer y par $ax + b$ dans l'équation $f(x, y) = 0$ et développer ; ordonner le résultat selon les puissances décroissantes de x. Égaler à zéro les coefficients des deux plus hautes puissances de x et résoudre par rapport à a et b. Les droites d'équation $y = ax + b$ sont asymptotes à la courbe.

3° *Exemples.*

Asymptotes à la courbe $y^2 = \dfrac{x^3}{2r - x}$ (cissoïde).

On a $f(x, y) = 2ry^2 - xy^2 - x^3 = 0$, soit :

$$(2r - x)y^2 - x^3 = 0.$$

Le terme de plus haut degré en x a pour coefficient -1, qui ne contient pas y ; il n'y a donc pas d'asymptote parallèle à Ox. Le terme de plus haut degré en y est $(2r - x)$: $2r - x = 0 \Rightarrow x = 2r$, asymptote parallèle à Oy.

Asymptotes à la courbe $y^3 = 2\lambda x^2 - x^3$. Il n'y a pas d'asymptotes parallèles aux axes (le coefficient de y^3 et celui de x^3 ne

contiennent, respectivement, ni x, ni y). Posons $y = ax + b$, il vient :

$$(ax + b)^3 = 2\,\lambda x^2 - x^3\,,$$

soit : $(1 + a^3)\,x^3 + (3\,a^2\,b - 2\,\lambda)\,x^2 + 3\,ab^2\,x + b^3 = 0$; en égalant à zéro les deux premiers coefficients, il vient :

$$1 + a^3 = 0 \quad \text{et} \quad 3\,a^2\,b - 2\,\lambda = 0$$

d'où l'on tire : $a = -1$, $b = 2\,\lambda/3$. La droite $y = -x + 2\,\lambda/3$ est asymptote (oblique) à la courbe représentative de la fonction.

Points particuliers.

— Soit $f(x, y) = 0$ et les dérivées partielles f'_x par rapport à x, f'_y par rapport à y. Si, en un point, $f'_x = f'_y = 0$, les valeurs de x qui vérifient cette double équation définissent un *point singulier* de la courbe. Les autres points sont les points ordinaires.

— Pour déterminer les tangentes en un point singulier, on fait un changement d'axes en transportant l'origine au point considéré et en transcrivant l'équation $f(x, y) = 0$ dans le nouveau système. On égale à zéro les termes de moindre degré, et on obtient l'équation des tangentes au point donné. Si cette équation est du second degré, il y a 2 tangentes à la courbe en ce point, qui est alors appelé un *point double* ; si elle est du troisième degré, c'est un *point triple* (point d'ordre 3) ; etc.

— *Point de rebroussement* : c'est un point dont l'abscisse x vérifie l'équation

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\,.$$

(Le ∂, ou « *d* rond », est utilisé pour noter les dérivées partielles.)

Exemple : Soit $y^2 = x^3$. On a :

$$f(x, y) = y^2 - x^3 = 0\,; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -3\,x^2\,; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2\,y\,.$$

Pour que la courbe ait un point singulier, il faut que l'on ait à la fois : $\partial f/\partial x = 0$ et $\partial f/\partial y = 0$, soit $-3\,x^2 = 0$ et $2\,y = 0$; cela est possible si $x = 0$ et $y = 0$; donc l'origine $(0, 0)$ est un point singulier pour la courbe. D'autre part, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6\,x\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0\,.$$

(Pour calculer $\partial^2 f/\partial x\,\partial y$, on calcule $\partial f/\partial x = -6\,x$ et on prend la dérivée par rapport à y de $\partial f/\partial x$, soit, ici, zéro.)

Au point $(x = 0, y = 0)$, on a $-6\,x = 0$; donc :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 - 0 \times 2 = 0\,.$$

Le point $(0, 0)$ est donc un point de rebroussement.

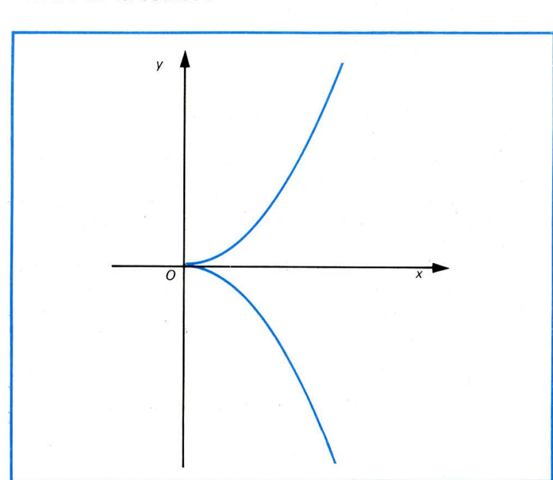
Remarque : En fait, la condition

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

n'est pas suffisante.

Elle peut aussi caractériser un autre type de point singulier, appelé *point d'osculation*, qui se distingue du point de rebroussement par le fait que la courbe s'éloigne de la tangente dans deux directions à partir du point de contact, alors que, dans le cas d'un point de rebroussement, la courbe ne s'éloigne que dans une seule direction. Ici, l'équation $y^2 = x^3$ nous donne $y = \pm\sqrt{x^3}$, ce qui interdit à x d'être négatif (car x^3 serait alors négatif et y imaginaire). Donc la courbe ne peut s'étendre qu'à droite de Oy et non pas de part et d'autre de Oy. Le point singulier est donc bien un point de rebroussement.

Allure de la courbe :



— Une courbe transcendante (dont l'équation comprend des fonctions transcendantes, comme e^x, $\ln x$, etc.) peut présenter un *point d'arrêt*, où elle se termine brusquement, ou encore un *point anguleux*, où se terminent deux branches de la courbe.

Exemples.

La fonction $y = x \ln x$ a un point d'arrêt à l'origine, puisqu'elle n'est pas définie pour $x < 0$ (à cause de $\ln x$).

La fonction $y = \dfrac{x}{1 + e^{1/x}}$ a un point anguleux à l'origine (elle est formée de deux branches qui se rencontrent en O).

Fonctions circulaires inverses.

Voir p. 149.

Fonctions hyperboliques.

Définition et comparaison avec les fonctions circulaires.

Sur le cercle de rayon $R = 1$ et d'équation $x^2 + y^2 = 1$, on définit les fonctions d'un arc x telles que :

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ (\cos x)(\sin x)' - (\sin x)(\cos x)' = 1 \end{cases}$$

(en effet la dérivée de $\cos x$ est $-\sin x$, celle de $\sin x$ est $\cos x$, ce qui démontre la deuxième équation).

Considérons, d'une façon analogue, *sur l'hyperbole équilatère* définie par l'équation $x^2 - y^2 = 1$, hyperbole qui admet pour asymptotes les bissectrices des axes rectangulaires Ox et Oy, un point mobile M. Appelons t le double de l'aire du secteur AOM, considérée comme positive si OM tourne dans le sens direct (indiqué par la flèche), et comme négative dans le cas contraire. Quand M est en A, on a évidemment $t = 0$. Cherchons maintenant deux fonctions u et v de t, telles que l'on ait, comme pour le cercle,

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 1 \\ uv' - vu' = 1 \end{cases} \quad \text{(et non pas } u^2 + v^2 = 1\text{, en raison de l'équation de l'hyperbole).}$$

Sur le cercle, ces fonctions avaient été appelées *circulaires* (cosinus et sinus) ; sur l'hyperbole, elles seront appelées *hyperboliques* (*cosinus hyperbolique*, noté ch, et *sinus hyperbolique*, noté sh), et l'on démontre qu'elles valent :

$$u = \text{ch}\,t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}\,, \quad v = \text{sh}\,t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}\,.$$

Formules.

- *Formules d'addition.*

$$\begin{cases} \text{ch}\,a + \text{sh}\,a = e^a\,, \\ \text{ch}\,a - \text{sh}\,a = e^{-a}\,, \\ \text{ch}^2\,a - \text{sh}^2\,a = 1\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{ch}\,(a + b) = \text{ch}\,a\,\text{ch}\,b + \text{sh}\,a\,\text{sh}\,b\,, \\ \text{sh}\,(a + b) = \text{sh}\,a\,\text{ch}\,b + \text{ch}\,a\,\text{sh}\,b\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{ch}\,(a - b) = \text{ch}\,a\,\text{ch}\,b - \text{sh}\,a\,\text{sh}\,b\,, \\ \text{sh}\,(a - b) = \text{sh}\,a\,\text{ch}\,b - \text{ch}\,a\,\text{sh}\,b\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{ch}\,2\,a = 1 + 2\,\text{sh}^2\,a = 2\,\text{ch}^2\,a - 1\,, \\ \text{sh}\,2\,a = 2\,\text{sh}\,a\,\text{ch}\,a\,. \end{cases}$$

- *Formules de transformation.*

Avec $a + b = p$ et $a - b = q$:

$$\begin{cases} \text{ch}\,p + \text{ch}\,q = 2\,\text{ch}\,\dfrac{p + q}{2}\,\text{ch}\,\dfrac{p - q}{2}\,, \\ \text{ch}\,p - \text{ch}\,q = 2\,\text{sh}\,\dfrac{p + q}{2}\,\text{sh}\,\dfrac{p - q}{2}\,, \\ \text{sh}\,p + \text{sh}\,q = 2\,\text{sh}\,\dfrac{p + q}{2}\,\text{ch}\,\dfrac{p - q}{2}\,, \\ \text{sh}\,p - \text{sh}\,q = 2\,\text{sh}\,\dfrac{p - q}{2}\,\text{ch}\,\dfrac{p + q}{2}\,. \end{cases}$$

- *Tangente hyperbolique.*

On pose :

$$\text{th}\,a = \frac{\text{sh}\,a}{\text{ch}\,a} = \frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1}$$

et l'on a :

$$\text{th}\,(a + b) = \frac{\text{th}\,a + \text{th}\,b}{1 + \text{th}\,a\,\text{th}\,b}\,,$$

$$\text{ch}\,a = \frac{1 + \text{th}^2\,\dfrac{a}{2}}{1 - \text{th}^2\,\dfrac{a}{2}}\,, \quad \text{sh}\,a = \frac{2\,\text{th}\,\dfrac{a}{2}}{1 - \text{th}^2\,\dfrac{a}{2}}\,.$$

Dérivées des fonctions hyperboliques et fonctions inverses.

Dérivées.

$y = \text{ch}\,x$, $\quad y' = \text{sh}\,x$;

$y = \text{sh}\,x$, $\quad y' = \text{ch}\,x$;

$y = \text{th}\,x$, $\quad y' = 1 - \text{th}^2\,x = \dfrac{1}{\text{ch}^2\,x}$.

Fonctions inverses.

1° La fonction y, inverse de $\text{sh}\,x$, est telle que $\text{sh}\,y = x$; elle admet pour dérivée $y' = 1/\text{ch}\,y = 1/\sqrt{1 + x^2}$ et vaut $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

2° La fonction y, inverse de $\text{ch}\,x$, est telle que $\text{ch}\,y = x$, d'où $y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$ et $y' = 1/\text{sh}\,y = \pm 1/\sqrt{x^2 - 1}$ (positive pour $y > 0$, négative pour $y < 0$).

Fonctions réelles de plusieurs variables réelles.

Voir aussi p. 118.

Notion de gradient.

- *Définition.*

Dans une base orthonormée, on considère la fonction scalaire u liée au point M de coordonnées x, y et z. Si cette fonction a des dérivées partielles $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial u/\partial z$, continues, le vecteur qui a pour composantes $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial u/\partial z$ est appelé *gradient de u* ; on le note $\textbf{grad}\,u$.

Par définition, si $d\boldsymbol{M}$ a pour composantes dx, dy et dz, on a

$$du = \textbf{grad}\,u\,.\,d\boldsymbol{M}$$

($\textbf{grad}\,u$ est un *vecteur* ; donc le membre de droite de cette égalité est un *produit scalaire* ; voir pp. 47 et 86).

- *Signification géométrique.*

Le vecteur $\textbf{grad}\,u$ en un point M_0 est perpendiculaire aux tangentes à toutes les courbes tracées sur la surface $u(M) = u_0$ passant par M_0 et appelée *surface de niveau*. Ces tangentes sont dans le plan tangent à la surface de niveau en M_0 si $\textbf{grad}\,u \neq \boldsymbol{0}$.

Dérivées partielles successives.

- *Notation.*

Nous poserons : $f'_x = \partial f/\partial x$, $f'_y = \partial f/\partial y$, ... L'opération $\partial/\partial x$ appliquée à la fonction f peut se répéter. Nous noterons les symboles de dérivation partielle (*opérateurs*) *de droite à gauche* ; par exemple :

$$\frac{\partial}{\partial t} * \frac{\partial}{\partial z} * \frac{\partial}{\partial y} * \frac{\partial}{\partial x} * f = \frac{\partial^4 f}{\partial xyzt} = f^{(4)}_{xyzt}$$

(le signe $*$ indiquant la dérivation partielle, de droite à gauche).

- *Théorème de Schwarz.*

La loi de dérivation est commutative si les fonctions dérivées sont définies dans un domaine contenant le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et continues en ce point :

$$f''_{xy} = f''_{yx} \quad \text{ou :} \quad \frac{\partial}{\partial y} * \frac{\partial}{\partial x} * f = \frac{\partial}{\partial x} * \frac{\partial}{\partial y} * f\,.$$

Fonctions homogènes et implicites.

- *Fonctions homogènes.*

— Soit un point $M(x, y, z)$ appartenant à un domaine (D) et la fonction $f(x, y, z)$ définie dans (D). Soit, d'autre part, un intervalle $]a, b[$ comprenant 1, et $t \in\,]a, b[$; appelons tM le point (tx, ty, tz). Si, pour tout $M \in (D)$, $tM \in (D)$ et vérifie l'identité $f(tM) = t^n\,f(M)$, qu'on peut aussi écrire $f(tx, ty, tz) = t^n\,f(x, y, z)$, la fonction $f(x, y, z)$ est dite *homogène* et *de degré n*.

— Si $f(x, y, z)$ est homogène et de degré n, ses dérivées partielles sont homogènes et de degré $n - 1$.

— Pour que $f(x, y, z)$ définie et admettant des dérivées partielles continues dans (D) soit homogène de degré n, il faut et il suffit que :

$$xf'_x(x, y, z) + yf'_y(x, y, z) + zf'_z(x, y, z) = nf(x, y, z)$$

(*identité d'Euler*).

— *Exemple.* Soit $f = \text{Arcsin}\,\dfrac{y}{x}$; on a alors aussi $f = \text{Arcsin}\,\dfrac{ty}{tx}$. Donc f est homogène de degré 0 et l'on a (identité d'Euler) :

$$xf'_x + yf'_y = 0\,.$$

- *Fonctions implicites.*

— *Cas de 2 variables.* Soit $f(x, y) = 0$ une fonction vérifiant certaines conditions de dérivation et de continuité. Si (x_0, y_0) est une solution et si $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, il existe une fonction $y = \varphi(x)$, continue et dérivable, telle que :

$$y_0 = \varphi(x_0) \quad \text{et} \quad f[x, \varphi(x)] = 0\,.$$

Sa dérivée est donnée par :

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}\,.$$

La fonction y est dite *implicite* [dans $f(x, y) = 0$].

Exemple : Soit $y^2 - 2\,xy = a^2$ une relation définissant une fonction implicite $y(x)$. On a :

$$f(x, y) = y^2 - 2\,xy - a^2 = 0\,,$$

$$f'_x = -2\,y \quad \text{et} \quad f'_y = 2(y - x)\,,$$

donc

$$y'(x) = -\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{y}{y - x}\,.$$

— *Remarque* : y est définie dans l'intervalle

$$I_0 = (x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha)\,;$$

dans I_0 on peut prendre un autre point, $x_1 \neq x_0$, pour lequel y est définie, ce qui permet de bâtir un intervalle I_1, contenant x_1 et débordant I_0. Ainsi, de proche en proche, peut-on prolonger la fonction $y = \varphi(x)$. On devra s'arrêter si en un point x_i sont vérifiées simultanément les conditions

$$f(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad f'_y(x, y) = 0\,.$$

— *Cas de 3 variables.* Le théorème précédent peut se généraliser à $f(x, y, z) = 0$; la fonction implicite $z = \varphi(x, y)$ aura pour dérivées partielles :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_y}{f'_z}\,.$$

Ici, le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est défini dans un *carré* du plan xOy, de côté $2\,\alpha$, et la fonction peut être prolongée à partir d'un point M_1 de ce carré.

• *Différentielle totale.*

Rappelons que la *différentielle totale* de la fonction $f(x, y, z)$ est
$$df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $df = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ soit une différentielle totale, P, Q et R étant des fonctions de x, y, z admettant des dérivées partielles premières continues dans (D), est que l'on ait
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,;\quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}\,;\quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}\,.$$

On peut alors calculer $f(x, y, z)$.

• *Extrémums des fonctions de plusieurs variables.*

On les détermine en s'appuyant sur le théorème suivant : si $u = f(x, y, z)$ admet des dérivées partielles au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$, ces dérivées partielles sont nécessairement nulles si M_0 est un extrémum.

Compléments sur les séries.

Voir pp. 118-119, pour les définitions fondamentales. Nous précisons, dans ce qui suit, quelques règles pratiques.

Généralités.

• *Terme général.*

Soit u_n le *terme général* d'une série ; si u_n est un nombre (réel ou complexe), la série est dite *numérique* ; si u_n est une fonction de x, on a une *série de fonction* (exemple : séries de Taylor).

Si l'on se donne u_n, on peut trouver un terme de rang quelconque. Par exemple, soit
$$u_n = \frac{x^n}{1+\sqrt{n}}\,;$$
Le premier terme de la série est $u_1 = \dfrac{x}{1+\sqrt{1}} = \dfrac{x}{2}$; le second est $u_2 = \dfrac{x^2}{1+\sqrt{2}}$, et ainsi de suite.

• *Séries illimitées.*

Considérons la série numérique $u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$, et désignons par S_n la somme des n premiers termes de cette série. On a :
$$S_1 = u_1 = 1\,,$$
$$S_2 = u_1 + u_2 = 1 + \frac{1}{2}\,,$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,,$$
$$\ldots$$
$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\,.$$

Or nous savons que la somme des n premiers termes de la progression géométrique 1, 1/2, 1/4, ..., $1/2^n$, ayant pour premier terme $a = 1$ et pour raison $q = 1/2$ est :
$$\frac{a(q^n - 1)}{q-1} = \frac{1\left(\frac{1}{2^n} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{-\frac{1}{2}}\,;$$
quand $n \to \infty$, $1/2^n \to 0$ et l'expression ci-dessus tend vers $\dfrac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$. Donc
$$S_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = 2\,.$$

La série illimitée (u_n), telle que S_n tend vers une limite finie quand $n \to \infty$, est *convergente* (ici, *elle converge vers* 2). Si S_n n'a pas de limite, la série illimitée est *divergente* (= non convergente).

• *Deux types de séries divergentes sont remarquables.*

— Les séries dans lesquelles $S_n \to \infty$ quand $n \to \infty$, telles que la série $u_n = n$. On a en effet $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, ... et
$$S_1 = 1,$$
$$S_2 = 1 + 2 = 3,$$
$$S_3 = 1 + 2 + 3 = 6,$$
$$\ldots$$
$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,,$$
qui tend vers l'infini en même temps que n.

— Les séries *oscillantes* telles que $u_n = (-1)^{n-1}$. On a, en effet :
$$u_1 = (-1)^0 = 1,$$
$$u_2 = (-1)^1 = -1,$$
$$u_3 = (-1)^2 = 1,$$
$$\ldots,$$
d'où
$$S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1}\,;$$
S_n vaut donc, soit 0, soit 1, selon que n est pair ou impair.

Rechercher si une série est convergente.

• *Théorème fondamental.*

— Une série est convergente si, et seulement si, il existe un entier N tel que, quels que soient m et n supérieurs à N, on ait $|S_m - S_n| < \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$ donné.

— Il en résulte que, si u_n ne tend pas vers zéro, la série u_n est divergente.

— *Remarque* : le théorème fondamental est peu utilisable ; c'est pourquoi on se contente, en général, de *critères de convergence*, qui sont simplement *suffisants* (mais *non nécessaires*), c'est-à-dire qu'ils ne permettent de conclure à la convergence de la série utilisée que sous certaines conditions.

• *Séries de comparaison.*

Dans beaucoup de cas on peut comparer terme à terme une série inconnue (u_n) à une série (a_n) dont le caractère est connu, et qu'on appelle une *série de comparaison.* Cette méthode est particulièrement utile dans le cas d'une série (u_n) à *termes positifs* :

— si $u_n < a_n$ et si (a_n) est convergente, alors (u_n) converge ;

— si $u_n > a_n$ et si (a_n) est divergente, alors (u_n) diverge.

On utilise comme séries de comparaison les progressions géométriques et la série
$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{x^k} + \ldots\,,$$
qui est convergente si $k > 1$, divergente si $k \leqslant 1$.

Exemples.

Soit $u_n = 1/n^n$; examiner le caractère de cette série. On a :
$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \cdots + \frac{1}{n^n}\,.$$
Comparons les termes de cette série aux termes correspondants de la série géométrique
$$1\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2^2}\,,\ \frac{1}{2^3}\,,\ \ldots\,,$$
qui est convergente vers 2. On a :
$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{2}\,,\quad \frac{1}{3^3} < \frac{1}{2^2}\,,\ \ldots,\ \frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^{n-1}}\,;$$
donc la série est convergente.

Soit la série
$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots\,;$$
on a
$$\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}\,,\quad \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{3}\,,\ \ldots\,,$$
c'est-à-dire que chaque terme de la série (u_n) à partir du second est supérieur au terme correspondant de la série
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad \text{(divergente, puisque } k = 1)\,;$$
la série étudiée est donc divergente.

• *Critères de convergence (séries à termes positifs).*

Soit u_n le terme général de la série étudiée.

— *Règle de D'Alembert* : On cherche $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$. Si $\lambda < 1$, la série est convergente ; si $\lambda > 1$ (ou $\lambda \to \infty$), la série est divergente ; si $\lambda = 1$ on ne peut, en général, se prononcer.

— *Critère de Cauchy* : On cherche $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$. Si $\lambda < 1$, la série est convergente. Si $\lambda > 1$, la série est divergente. Si $\lambda = 1$, on ne peut, en général, se prononcer.

— *Règle de Duhamel* : Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$ quand $n \to \infty$ (cas indéterminé de la règle de D'Alembert), on étudie la limite μ de $n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ quand $n \to \infty$. Si $\mu > 1$, la série est convergente ; si $\mu < 1$, la série est divergente ; si $\mu = 1$ et si le produit $n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ peut se mettre sous la forme $1 + \dfrac{\alpha}{n}$, α étant inférieur à un nombre positif fixe, la série est divergente.

• *Séries à termes réels de signes quelconques.*

— On étudie la série des valeurs absolues $|u_n|$. Si cette série est convergente, la série (u_n) est aussi convergente ; si elle est divergente, on ne peut rien dire, sauf si la divergence de $(|u_n|)$ a été établie en prouvant que $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ ou $\sqrt[n]{|u_n|}$ a une limite supérieure à 1, auquel cas la série étudiée est divergente.

— Étant donné une série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs (série alternée), si la valeur absolue de ces termes décroît quand n augmente et si u_n a pour limite zéro, la série est convergente.

• *Séries entières.*

Ce sont des séries de la forme $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots$, dans lesquelles les coefficients a_0, a_1, ... sont indépendants de x. Si limite $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = h$, on a limite $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lambda = h \times x$. Donc la série entière étudiée est convergente quand $|h \times x| < 1$, divergente quand $|h \times x| > 1$; si $|h \times x| = 1$, on ne peut rien affirmer.

Séries de Fourier.

• *Définition.*

Ce sont des séries trigonométriques dont le terme général est
$$u_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx\,.$$

• *Formules de Fourier-Euler.*

Si la série trigonométrique (u_n) est absolument convergente sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$, sa somme $f(x)$ est une fonction continue. On a alors en général :
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx\,,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx\,,$$
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx\,.$$

• *Théorème de Dirichlet.*

Si $f(x)$ est continue dans l'intervalle $[-\pi, +\pi]$, sauf peut-être en un nombre fini de points de discontinuité de première espèce, et si $f(x)$ n'admet qu'un nombre fini d'extrémums :

1° la série de Fourier associée à $f(x)$ est convergente pour tout $x \in [-\pi, +\pi]$;

2° sa somme est partout $f(x)$, sauf aux points de discontinuité, où elle vaut $\dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ et aux extrémités de $[-\pi, +\pi]$, où elle vaut $\dfrac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}$

CALCULS DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Compléments sur les intégrales définies.

Voir aussi pp. 120 à 122.

Rappelons qu'une fonction $f(x)$, *définie, réelle* et *bornée* sur un intervalle $[a, b]$ est *intégrable au sens de Riemann* sur cet intervalle si la somme
$$\Sigma = (x_1 - a)\,f(\xi_0) + (x_2 - x_1)\,f(\xi_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})\,f(\xi_{n-1}) + (b - x_n)\,f(\xi_n)$$
tend vers une limite finie I, quel que soit le choix des ξ_p compris chacun entre x_{p+1} et x_p, lorsque le nombre des x_p croît indéfiniment et que le plus grand des $[x_p, x_{p+1}]$ tend vers 0. On écrit alors $I = \int_a^b f(x)\,dx$ et on démontre que, si $f(x)$ admet une primitive F, c'est-à-dire une fonction qui admet $f(x)$ pour dérivée, $I = F(b) - F(a)$. Le calcul d'une intégrale définie se ramène ainsi à un calcul de primitives.

Intégrabilité d'une fonction.

Une fonction n'est pas, *a priori*, intégrable, car la somme Σ ne tend pas nécessairement vers une limite finie I ; il est donc nécessaire de s'assurer de son intégrabilité, tâche qui est facilitée par les théorèmes ci-dessous.

• Si $f(x)$ est intégrable sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, elle est intégrable sur $[a, c]$ et l'on a $I_a^b + I_b^c = I_a^c$.

Par récurrence, on généralise ce théorème à n segments consécutifs, $[a, b]$, $[b, c]$ ... $[k, l]$, avec $a < b < \cdots < k < l$.

• Une fonction en escalier sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

• *Cas d'une suite convergente de fonctions.*

Soit une suite $f_n(x)$ convergeant uniformément vers $F(x)$ sur un intervalle $[a, b]$. Si les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... sont toutes intégrables sur $[a, b]$ à partir d'un certain rang, alors $F(x)$ est aussi intégrable sur $[a, b]$ et l'on a :
$$\int_a^b F(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\,.$$
Comme $F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, l'égalité précédente s'obtient en permutant les symboles : $\int_a^b$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}$:
$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\,.$$

Propriétés des fonctions intégrables.

• Les fonctions étagées sur $[a, b]$ sont intégrables.

Une *fonction étagée* sur $[a, b]$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$; elle est donc intégrable. D'autre part, toute fonction définie et monotone sur $[a, b]$ est une fonction étagée sur $[a, b]$, donc intégrable sur $[a, b]$

• Si $f(x)$ et $g(x)$ sont étagées sur $[a, b]$, $f(x)\,g(x)$ est aussi étagées sur $[a, b]$, donc intégrable sur $[a, b]$.

• Une fonction $f(x)$ ayant un nombre fini de discontinuités de première espèce sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

Voir p. 111 pour les *discontinuités de première espèce*, $f(x + 0) \neq f(x - 0)$.

• *Majoration de* $\int_a^b f(x)\,dx$ *quand* $f(x)$ *est étagée sur* $[a, b]$:
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

• Si $f(x) \geqslant 0$ est continue sur $[a, b]$ et si $I_a^b = 0$, alors $f(x)$ est nulle, quel que soit x appartenant à $[a, b]$.

• Formule de la moyenne.

Si $f(x)$ et $g(x)$ sont étagées sur $[a, b]$, le signe de $g(x)$ étant constant, il existe $K \in [A, B]$, A et B étant les bornes de $f(x)$ sur $[a, b]$, tel que :
$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = K\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Si l'on prend $g(x) = 1$, la formule précédente s'écrit

$$\int_a^b f(x)\,dx = K \int_a^b dx = K(b-a).$$

et, avec $a < c < b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = K(b-a) = (b-a)\,f(c).$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule de la moyenne.*

• *Inégalité de Schwarz.*
Si $f(x)$ et $g(x)$ sont étagées sur $[a\ b]$, avec $a < b$, λ étant un nombre réel quelconque, on a :

$$\int_a^b [f(x) + \lambda g(x)]^2\,dx \geqslant 0,$$

d'où l'on tire l'*inégalité de Schwarz* :

$$\left| \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx \times \int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

• *Remarques.*
— Une fonction étagée est intégrable au sens de Riemann, mais une fonction intégrable au sens de Riemann n'est pas nécessairement étagée. On peut démontrer le théorème suivant :
La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$, définie et bornée sur $[a, b]$, soit intégrable est que $\dfrac{b-a}{2^m}\,\Sigma\,(M_p - m_p)$ tende vers zéro lorsque $m \to \infty$, M_p et m_p étant les bornes supérieure et inférieure de $f(x)$ sur le segment $[x_p, x_{p+1}]$, la somme Σ étant étendue aux 2^m segments partiels $[x_p, x_{p+1}]$ égaux.
— Ce théorème est indépendant de la théorie des fonctions étagées et permet de retrouver les propriétés précédentes.

Critères de convergence.

Voir p. 122.
Lorsque une (ou deux) des limites a et b de l'intervalle d'intégration devient infinie, il y a lieu de se demander si I_a^b a une limite, c'est-à-dire si l'intégrale *converge* (on dit aussi « *a un sens* » ou bien « existe »).
On démontre que l'intégrale I converge quand $b \to \infty$ si, et seulement si, $F(x) - F(x') \to 0$, quand x et x' tendent vers b indépendamment l'un de l'autre.

Calcul d'intégrales.

Généralités.

Il n'existe pas de méthode générale permettant de calculer une primitive d'une fonction quelconque ; il est donc mal venu de parler *du* calcul d'intégrales, il vaut mieux dire *les* calculs d'intégrales.

• *Pour calculer* $\int_a^b f(x)\,dx$, *on peut faire deux opérations* :
— Trouver une primitive indéfinie $F(x)$ de $f(x)$, soit à l'aide d'une table, soit en ramenant la fonction à intégrer à une forme figurant dans une table. Ainsi, soit à calculer $I = \int_a^b 2\,x^3\,dx$; on sait que la fonction $x^4/2$ admet $2\,x^3$ pour dérivée, donc que les primitives de $2\,x^3$ sont de la forme $(x^4/2) + C$, C étant une constante. On retient la forme

$$F(x) = \frac{x^4}{2}.$$

— Remplacer x par a et b dans la primitive indéfinie $F(x)$, ce qui donne $F(a)$ et $F(b)$, et calculer $F(b) - F(a) = I$. Ici :

$$F(a) = \frac{a^4}{2}, \quad F(b) = \frac{b^4}{2}; \quad \text{donc} \quad I = \frac{b^4 - a^4}{2}.$$

• Il peut se trouver qu'on ne précise pas les limites a et b de l'intégration. Dès lors, le résultat est donné sous une forme indéterminée, à une constante près. Exemple :

$$\int 2\,x^3\,dx = \frac{x^4}{2} + C,$$

C étant une *constante d'intégration* indéterminée.
Un cas particulier est celui des fonctions logarithmes. On sait, par définition, que la fonction $\ln x$ admet $1/x$ pour dérivée (c'est-à-dire : est une primitive de $1/x$). Si l'on a à calculer $I = \int \dfrac{dx}{x} = \int \dfrac{1}{x}\,dx$, la solution évidente est donc

$$I = \ln x + C.$$

On pose alors $C = \ln c$, et il vient :

$$I = \ln x + \ln c = \ln cx.$$

Formes élémentaires classiques.

u et v sont des fonctions dérivables de x ; du, dv, dx sont des différentielles, C une constante.

• *Formules.*

$$\int (du + dv) = u + v + C. \qquad (1)$$

$$\int A\,du = A \int du = Au + C. \qquad (2)$$

$$\int dx = x + C. \qquad (3)$$

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1. \qquad (4)$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln cu, \quad \text{avec} \quad C = \ln c. \qquad (5)$$

$$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C. \qquad (6)$$

$$\int e^u\,du = e^u + C. \qquad (7)$$

$$\int \sin u\,du = -\cos u + C. \qquad (8)$$

$$\int \cos u\,du = \sin u + C. \qquad (9)$$

$$\int \tan u\,du = \ln \frac{1}{\cos u} + C. \qquad (10)$$

$$\int \cot u\,du = \ln \sin u + C. \qquad (11)$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C. \qquad (12)$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{a} \ln \frac{u-a}{u+a} + C. \qquad (13)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C. \qquad (14)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln (u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C. \qquad (15)$$

• *Applications des formules.*
L'application n'est pas toujours « automatique » : il faut parfois quelques transformations simples pour que le calcul puisse se faire. Si les transformations « simples » ne donnent rien, il faut utiliser d'autres techniques de transformation indiquées ci-après.

Intégration des fractions rationnelles.

• *Méthode générale.*
Soit à calculer $I = \int \dfrac{A(x)}{B(x)}\,dx$, $A(x)$ et $B(x)$ étant des polynômes en x.
— Diviser $A(x)$ par $B(x)$, on obtient :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = P(x) + \frac{D(x)}{B(x)} \quad \begin{cases} P(x) : \text{polynôme de degré } (d^\circ A - d^\circ B), \\ D(x) : \text{polynôme tel que } d^\circ D < d^\circ B. \end{cases}$$

— L'intégrale est alors de la forme :

$$I = \int \left[P(x) + \frac{D(x)}{B(x)} \right] dx = \int P(x)\,dx + \int \frac{D(x)}{B(x)}\,dx.$$

Le premier terme s'intègre immédiatement. Soit $I_1 = \int P(x)\,dx$.

— Décomposer $\dfrac{D(x)}{B(x)}$ en éléments simples, et intégrer séparément ces éléments, ce qui donne les intégrales $I_2, I_3, \ldots, I_n$.

— $I = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots I_n$.

• *Exemple.* Calcul de

$$I = \int \frac{(2\,x^3 + 1)\,dx}{x^2 + 3\,x + 2} = \int \frac{A}{B}\,dx.$$

$$-\ \frac{A}{B} = 2\,x - 6 + \frac{14\,x + 13}{x^2 + 3\,x + 2}.$$

$$-\ I_1 = \int (2\,x - 6)\,dx = x^2 - 6\,x + C_1.$$

$$-\ \frac{14\,x + 13}{x^2 + 3\,x + 2} = \frac{14\,x + 13}{(x+1)(x+2)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{15}{x+2},$$

décomposition en éléments simples ; par suite,

$$I_2 = \int -\frac{1}{x+1}\,dx = -\int \frac{dx}{x+1} = -\ln(x+1) + C_2;$$

et

$$I_3 = \int \frac{15\,dx}{x+2} = 15 \ln(x+2) + C_3;$$

d'où

$$I_2 + I_3 = -\ln(x+1) + C_2 + 15 \ln(x+2) + C_3$$

$$= \ln \frac{(x+2)^{15}}{x+1} + C_2 + C_3.$$

$$-\ I = I_1 + I_2 + I_3 = x^2 - 6\,x + \ln \frac{(x+2)^{15}}{x+1} + C.$$

• *Remarque.*
Les calculs peuvent être longs et compliqués. L'utilisation de tables d'intégrales permet d'obtenir les solutions sans difficulté, les calculs ayant été faits une fois pour toutes. Des livres entiers, comportant les primitives d'un très grand nombre de fonctions types, ont été publiés ; ils soulagent avantageusement les calculateurs.

Intégration par changement de variable.

• On peut, dans certains cas, remplacer la variable x par une nouvelle variable t telle que $x = g(t)$. On a alors

$$dx = g'(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int f(x)\,dx = \int f[g(t)]\,g'(t)\,dt = \int \varphi(t)\,dt.$$

Cette intégrale peut être plus simple à calculer que $\int f(x)\,dx$; une fois qu'elle est trouvée, on transforme le résultat en substituant x à t, avec $t = g^{-1}(x)$.
Cette méthode est employée notamment pour transformer une fonction irrationnelle de x en une fonction rationnelle de t (*intégration par rationalisation*).
Exemple : Calculer

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{1+x}}.$$

On observe que $f(x)$ n'est pas une forme usuelle, ni une fraction rationnelle ; employons donc la méthode par changement de variable. Posons $u^2 = 1 + x$ (pour rendre le dénominateur rationnel). Il vient

$$2\,u\,du = dx, \quad \sqrt{(1+x)^3} = u^3 \quad \text{et} \quad \sqrt{1+x} = u,$$

d'où

$$I = \int \frac{2\,u\,du}{u^3 + u} = 2 \int \frac{du}{u^2 + 1}.$$

On reconnaît dans $\int \dfrac{du}{u^2+1}$ la formule (12), avec $a = 1$; donc :

$$I = 2 \int \frac{du}{u^2 + 1} = 2 \arctan u + C = 2 \arctan \sqrt{1+x} + C$$

(puisque $u = \sqrt{1+x}$).

• Si l'on calcule une intégrale définie par cette méthode, il faut penser à changer les limites. Ainsi $\int_3^8 f(x)\,dx$ donnerait, dans l'exemple précédent :
quand $x = 3$, $u = \sqrt{1+3} = 2$
et quand $x = 8$, $u = \sqrt{1+8} = 3$;
donc

$$\int_3^8 f(x)\,dx = 2 \int_2^3 \frac{du}{u^2 + 1}.$$

• *Quelques formules usuelles.*
— Si $f(x)$ ne comprend que des puissances fractionnaires de $a + bx$, on fait le changement de variable $a + bx = u^n$, n étant le PPCM des dénominateurs des exposants fractionnaires.
— Si l'expression à intégrer ne contient que le radical $\sqrt{x^2 + bx + c}$, on fait le changement de variable $\sqrt{x^2 + bx + c} = u - x$; d'où :

$$x = \frac{u^2 - c}{b + 2\,u} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2(u^2 + bu + c)\,du}{(b + 2\,u)^2}.$$

— Si l'expression à intégrer ne contient pas d'autre radical que $\sqrt{-x^2 + bx + c}$, on fait le changement de variable $\sqrt{-x^2 + bx + c} = (x - \alpha)\,u$ ou $(\beta - x)\,u$, α et β étant les racines réelles de $-x^2 + bx + c$.
Si α et β sont complexes, on ne peut pas appliquer simplement cette transformation.
— *Différentielle binôme.* C'est une expression qui peut toujours se mettre sous la forme $x^m(a + bx^n)^p\,dx$, m et n étant entiers, n étant positif, et p entier ou fractionnaire de la forme $p = r/s$ (r et s entiers).
— Si $\dfrac{m+1}{n}$ = un nombre entier ou 0, on pose $a + bx^n = u^s$.
— Si $\dfrac{m+1}{n} + p$ = un nombre entier ou 0, on pose $a + bx^n = u^s x^n$.

• *Remarques.*
Ici aussi, les tables allègent les calculs. Elles sont d'un usage courant chez les mathématiciens anglo-saxons, notamment américains.

Intégration par parties.

• *Formule d'intégration par parties*
(u et v : fonctions dérivables de x).
De $d(uv) = u\,dv + v\,du$, on tire $u\,dv = d(uv) - v\,du$, d'où la formule

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

• *Application de la formule.*
— Il faut décomposer $f(x)\,dx$ en deux facteurs, u et dv.
— Il n'y a pas de règles générales ; néanmoins, il faut choisir dv de telle sorte qu'on puisse calculer $\int dv$.
— Le calcul de $\int dv$ peut imposer une nouvelle intégration par parties ; et ainsi de suite.
— La formule est très utile pour l'intégration des diffé-

rentielles contenant des produits, des logarithmes, des fonctions circulaires inverses.

● *Exemple.* Calculer : $I = \int x^2 \ln x \, dx$.

Appliquons $I = uv - \int v \, du$ en posant

$$\begin{cases} u = \ln x, & \text{d'où } du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = x^2 dx, & \text{d'où } v = \displaystyle\int dv = \dfrac{x^3}{3}. \end{cases}$$

Il vient :

$$uv = \frac{x^3}{3} \ln x$$

et
$$\int v \, du = \int \frac{x^3 dx}{3x} = \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{9}.$$

D'où :

$$I = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + C.$$

● *Exemple d'intégration par récurrence.*

Calculer l'intégrale $I_m = \int x^m e^x dx$ (m = entier positif).

posons

$$\begin{cases} u = x^m, & \text{d'où } du = mx^{m-1}, \\ dv = e^x dx, & \text{d'où } v = e^x. \end{cases}$$

Il vient :

$$I_m = uv - \int v \, du = x^m e^x - \int mx^{m-1} e^x dx$$
$$= x^m e^x - m \int x^{m-1} e^x dx.$$

Mais $\int x^{m-1} e^x dx$ n'est autre que l'intégrale à calculer dans le cas où m est remplacé par $m - 1$; donc

$$\int x^{m-1} e^x dx = I_{m-1} \quad \text{et} \quad I_m = x^m e^x - m I_{m-1}.$$

On calcule I_{m-1}, en intégrant par parties :

$$I_{m-1} = x^{m-1} e^x - (m-1) I_{m-2},$$

et ainsi de suite jusqu'à $I_2 = x^2 e^x - 2 I_1$ et $I_1 = xe^x - e^x$. Finalement, on obtient :

$$I_m = e^x[x^m - mx^{m-1} + m(m-1) x^{m-2} - \cdots + (-1)^m m!].$$

Cas particulier : prenons $m = 3$, on trouve :

$$I_3 = x^3 e^x - 3 I_2, \quad I_2 = x^2 e^x - 2 I_1, \quad I_1 = xe^x - e^x,$$

d'où

$$I_3 = x^3 e^x - 3[x^2 e^x - 2(xe^x - e^x)]$$
$$= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6).$$

Intégrales multiples.

Intégrales doubles.

● *Définition.*

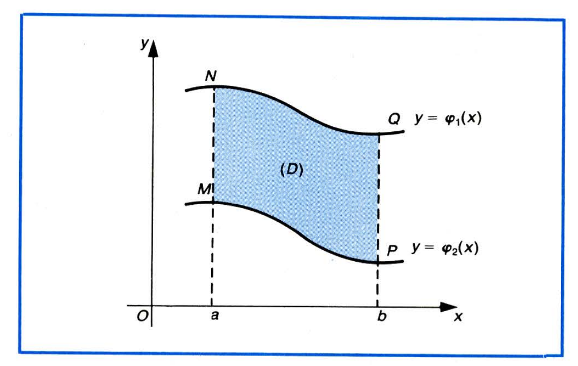
Soit un domaine fermé plan (D) limité par un contour simple (C) et soit une fonction $f(x, y)$ définie sur (D). Divisons le domaine (D) en n domaines, de surfaces $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, ..., \omega_n$. La fonction f est dite *intégrable sur* (D) si la somme $\Sigma f(x_i, y_i) \cdot \omega_i$ a une limite, les points (x_i, y_i) appartenant au domaine de surface ω_i, lorsque la surface de chaque domaine tend vers zéro, quel que soit le mode de division de (D) et quel que soit le choix des points (x_i, y_i). On note :

$$\lim \Sigma f(M_i) \omega_i = \iint_{(D)} f(M) d\omega \quad \textit{(intégrale double)},$$

et on lit « somme double dans (D) de (M) ».

● *Calcul des intégrales doubles.*

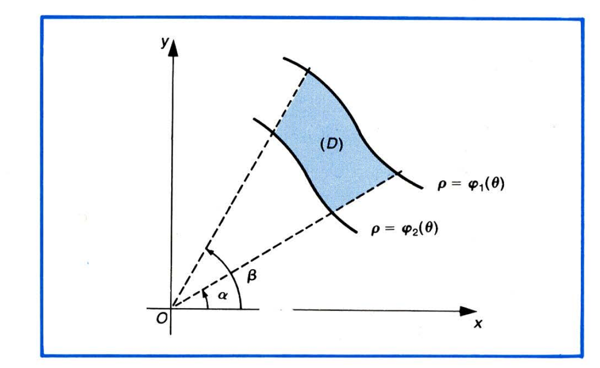
— Coordonnées rectangulaires : $f(x, y) = 0$ étant l'équation de (C), a et b définis sur la figure ci-dessous :



$$I = \iint_{(D)} f(x, y) dx\, dy = \int_a^b dx . \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

$y = \varphi_1(x)$ et $y = \varphi_2(x)$ étant les équations des courbes limitant le domaine *MNPQ*.

— Coordonnées polaires (voir figure ci-dessous).



$$I = \iint_{(D)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\omega$$
$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho.$$

● *Calcul de volumes.*

— Volume compris entre les surfaces $z_1 = f_1(x, y)$ et $z_2 = f_2(x, y)$, intérieur à un cylindre de base (D) dans le plan des xy :

$$V = \iint_{(D)} (f_2 - f_1) dx\, dy$$
$$= \int_a^b dx \underbrace{\int_{y_1}^{y_2} (f_2 - f_1) dy}_{S(x)} = \int_a^b S(x) dx,$$

$S(x)$ étant l'aire de la section du volume par un plan perpendiculaire à Ox.

— Volume compris entre deux plans perpendiculaires à l'axe des x ($x = a$ et $x = b$) et limité par la surface engendrée par une courbe d'équation $y = f(x)$ en tournant autour de cet axe :

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx.$$

Si $S(x)$ est du troisième degré au plus, en appelant B et B' les surfaces de base du volume, B'' la section moyenne par le plan équidistant des plans de base et H la hauteur, on a :

$$V = \frac{H}{6}(B + B' + 4B'') \quad \textit{(formule des trois niveaux)}.$$

Intégrales triples.

● *Définition.*

Même principe que pour l'intégrale double, mais le domaine plan (D) est remplacé par un domaine fermé dans l'espace, (V), admettant un volume, et divisé en n volumes v_i. La somme $\Sigma f(M_i) v_i$ a pour limite $I = \iiint_{(V)} f(M) dv$, *intégrale triple* sur (V) de $f(M)$.

Interprétation géométrique : si $f(M)$ désigne la *densité* au point M, I est la *masse* du solide défini par (V).

● *Calcul.*

— En coordonnées rectangulaires,

$$I = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dx\, dy\, dz$$
$$= \iint_{(D)} dx\, dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z) dz,$$

φ_1 et φ_2 désignant les aires limitant (V) (ce sont les bases du cylindre dont les génératrices sont parallèles à Oz et s'appuient sur les contours fermés de φ_1 et φ_2 ; tous les points de φ_1 et φ_2 se projettent sur (D)

— En coordonnées semi-polaires :

$$I = \iint_{(D)} \rho \, d\rho \, d\theta \int_{\varphi_1(\rho,\theta)}^{\varphi_2(\rho,\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) dz.$$

● *Moments d'inertie.*

Soit un solide de volume V, de densité $\delta(M)$ et soit $r(M)$ la distance du point M à un point, une droite ou un plan fixe. On appelle *moment d'inertie* du solide par rapport à ce point, cette droite ou ce plan, l'intégrale triple :

$$I = \iiint_{(V)} r^2(M) \delta(M) dx\, dy\, dz \qquad (r = \text{fonction de } x, y, z).$$

On démontre (théorème de Huygens) que $I_D = I_\Delta + Ma^2$ (I_D, I_Δ, moments d'inertie par rapport aux axes parallèles D et Δ, M : masse du solide ; a = distance entre D et Δ).

Résolution des équations différentielles.

Nous n'indiquons ici que les méthodes classiques.

Équations différentielles du premier ordre.

Équations dans lesquelles la plus haute dérivée de la fonction cherchée est sa dérivée première y'.

● *Équations à variables séparables.*

— Elles sont de la forme $f(x) dx = \varphi(y) dy$, d'où l'on tire, en intégrant les deux membres :

$$\int f(x) dx = \int \varphi(y) dy + C. \qquad (1)$$

L'équation (1) donne l'intégrale générale et représente les *courbes* intégrales.

— *1er exemple.* Résoudre l'équation $y\,dx - x\,dy = 0$. On a immédiatement

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad \text{d'où} \quad \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} + C,$$

soit $\ln x = \ln y + C = \ln cy$ et $cy = x$, qui peut encore se mettre sous la forme $y = mx$, avec $m = 1/c$. L'équation (1) représente les courbes intégrales, qui sont toutes les droites de la famille $y = mx$ ($m > 0$, puisque c est positif, car il est défini par $C = \ln c$ et la fonction logarithme n'est définie que pour une variable positive).

— *2e exemple.* Trouver une courbe telle que la tangente ait une longueur constante a. De nombreux problèmes de géométrie analytique, dans le genre de celui-ci, conduisent à une équation différentielle du premier ordre. Rappelons que l'on a $\overline{PT} = y/y'$, $\overline{PN} = yy'$ et, naturellement, $\overline{PM} = y = f(x)$.

Le problème exige $MT = a$, soit $\sqrt{PT^2 + PM^2} = a$, d'où l'équation différentielle du 1er ordre

$$\sqrt{y^2 + \frac{y^2}{y'^2}} = a.$$

En résolvant par rapport à y', on trouve $y' = \pm \dfrac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ et, en remplaçant y' par dy/dx, on aboutit à une équation à variables séparables, dont la solution, explicitée par rapport à y, est :

$$\pm x = -\varepsilon a \ln \left| \frac{a}{y} + \frac{a^2}{y^2} - 1 \right| + \sqrt{a^2 - y^2} + C$$

($\varepsilon = \pm 1$ et du signe de y).

Les courbes correspondantes s'appellent des *tractrices*.

● *Équations homogènes par rapport à x et y.*

— De telles équations peuvent toujours se mettre sous la forme $dy/dx = f(y/x)$; on pose alors $t = y/x$, et l'équation devient $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dt}{f(t) - t}$: on est donc ramené au problème précédent. Après l'intégration, on remplace t par y/x.

La famille des courbes intégrales vérifiant une équation homogène en x et y est invariante dans le groupe des homothéties ayant pour centre l'origine des coordonnées, et réciproquement.

— *Exemple.* Trouver une courbe telle que l'on ait $\overline{OP}^2 = \overline{ON}\,\overline{OT}$. On a : $\overline{OP} = x$, $\overline{ON} = \overline{OP} - \overline{PN} = x + yy'$, $\overline{OT} = \overline{OP} + \overline{PT} = x - (y/y')$. D'où l'équation

$$x^2 = (x + yy')\left(x - \frac{y}{y'}\right),$$

qui conduit à

$$xyy' - \frac{xy}{y'} - y^2 = 0$$

et, après multiplication des deux membres par y' et division par y, à :

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} - x = 0, \qquad (2)$$

soit :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} \pm \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 4}\right),$$

en résolvant (2) comme une équation du second degré ordinaire, d'inconnue dy/dx.

On pose $y = tx$, d'où : $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{-2\,dt}{t \pm \sqrt{t^2 + 4}}$.

Pour intégrer à droite, on a intérêt à poser $\pm\sqrt{t^2 + 4} = u - t$, d'où, finalement, les équations

$$x = \frac{C}{u} e^{2/u^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{C(u^2 - 4)}{2u^2} e^{2/u^2},$$

qui définissent paramétriquement les courbes intégrales répondant à la question.

● *Équations linéaires.*

Elles sont de la forme $y' + Py + Q = 0$, P et Q étant des fonctions quelconques de x. Voici la marche à suivre pour les résoudre, u et v étant deux fonctions de x.

— Poser $y = uv$, v étant arbitraire (u se calculera d'après v).

— L'équation devient, avec $y' = u'v + v'u$:

$$u(v' + Pv) + vu' + Q = 0 . \qquad (3)$$

— Déterminer v en posant $v' + Pv = 0$, d'où $\frac{dv}{v} = -P\,dx$; v est alors calculable par intégration.

— Porter la valeur obtenue pour v dans l'équation (3), qui devient

$$vu' + Q = 0 , \quad \text{d'où} \quad du = -\frac{Q}{v}dx .$$

— On en tire $u = -\int \frac{Q}{v}dx + C$

et

$$y = uv = -v\int \frac{Q}{v}dx + Cv .$$

Équation de Clairaut. C'est une équation linéaire de la forme

$$y = xy' + \varphi(y') .$$

Elle s'intègre en posant $y' = p$; l'équation devient

$$y = px + f(p) \text{ et l'on obtient } \left[x + f'(p)\right]\frac{dp}{dx} = 0 .$$

D'où les solutions :

— $\frac{dp}{dx} = 0$, donc $p = C^{te} = C$, et l'intégrale générale $y = Cx + f(C)$, qui représente une famille de droites ;

— $x + f'(p) = 0$, d'où $y = px + f(p)$ et $x + f'(p) = 0$. Ces deux équations définissent l'*intégrale singulière*. La courbe qui la représente est l'*enveloppe* des droites précédentes.

• *Équations de Bernoulli.*

De la forme $y' + Py + Qy^n = 0$, P et Q désignant des fonctions quelconques de x, n étant quelconque. Elle s'intègre en divisant par y^n, ce qui donne :

$$y^{-n}y' + Py^{1-n} + Q = 0 ;$$

on pose $y^{1-n} = u$, et l'on est ramené à une équation linéaire.

• *Trajectoires orthogonales.*

— Soit un faisceau de courbes $f(x, y, \lambda) = 0$ ($\lambda = C^{te}$ différente pour chaque courbe). On appelle *trajectoire orthogonale* de ces courbes une courbe qui les rencontre toutes à angle droit. On montre qu'en général le faisceau des trajectoires orthogonales aux courbes $f(x, y, \lambda) = 0$ a pour équation différentielle l'équation obtenue en changeant y' en $-1/y'$ dans l'équation différentielle du faisceau $f(x, y, \lambda) = 0$.

— *Exemple* : Quelles sont les trajectoires orthogonales des cissoïdes définies par l'équation $y^2 = \frac{x^3}{C - x}$?

— L'équation différentielle de ces cissoïdes s'obtient en écrivant l'équation donnée sous la forme

$$(x^2 + y^2)\,x - Cy^2 = 0 ;$$

en différenciant celle-ci par rapport à x, ce qui donne

$$3x^2 + y^2 + 2xyy' - 2Cyy' = 0 ,$$

et en éliminant C, on obtient :

$$y(3x^2 + y^2) - 2x^3y' = 0 . \qquad (5)$$

— On remplace y' par $-1/y$ et l'on obtient l'équation différentielle des trajectoires orthogonales :

$$yy'(3x^2 + y^2) + 2x^3 = 0 . \qquad (6)$$

— On résout (6), qui est une équation homogène en x et y (poser $y/x = t$), et l'on trouve l'équation des trajectoires orthogonales aux cissoïdes :

$$(x^2 + y^2)^2 - C(2x^2 + y^2) = 0 .$$

Équations différentielles du second ordre.

Équations où la dérivée d'ordre le plus haut est une dérivée seconde, y''.

• *L'équation ne renferme pas y.*

Elle est alors de la forme $f(y'', y', x) = 0$. Méthode de résolution :

— Poser $y' = u$, d'où $y'' = du/dx$.

— On est ramené à $f(du/dx, u, x) = 0$, qui est du 1[er] ordre.

• *L'équation ne renferme pas x.*

On pose encore

$$y' = u, \quad \text{d'où} \quad y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}u$$

et l'équation est ramenée au 1[er] ordre :

$$f\left(u\frac{du}{dy}, u, y\right) = 0 .$$

• *Équations linéaires du second ordre à coefficients constants.*

Elles sont de la forme :

$y'' + ay' + b = 0$ (équations sans second membre), ou $y'' + ay' + b = f(x)$ (équations avec second membre). Leur résolution fait intervenir l'examen de l'équation du second degré :

$$f(r) = r^2 + ar + b = 0 ,$$

appelée *équation caractéristique.* Nous désignerons les racines de cette équation caractéristique par α et β (α et β réels et distincts : $\alpha = \beta$; α et β imaginaires conjugués : $\alpha = p + q\,i$, $\beta = p - q\,i$).

Les méthodes de résolution sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

I — $y'' + ay' + b = 0$. (1)		On résout l'équation caractéristique et l'on obtient trois cas possibles, selon α et β :
1° $\alpha \neq \beta$ et réels :		$y = Ce^{\alpha x} + C'e^{\beta x}$.
2° $\alpha = \beta$ (racine double) :		$y = e^{\alpha x}(C + C'x)$.
3° $\alpha = p + qi$, $\beta = p - qi$:		$y = e^{px}(C\cos qx + C'\sin qx)$.
II — $y'' + ay' + b = F(x)$. (2)		y = solution générale de l'équation sans second membre + une solution particulière quelconque, I, de l'équation avec second membre.
1° $F(x)$ est un polynôme $P(x)$:		I = polynôme de même degré que $P(x)$ (si $b \neq 0$).
2° $F(x) = Ae^{\lambda x}$, A et λ : constantes.	$\lambda \neq \alpha$ et β :	$I = \frac{A}{f(\lambda)}e^{\lambda x}$.
	$\lambda = \alpha$ ou β :	$I = \frac{A}{f'(\lambda)}x\,e^{\lambda x}$.
	$\lambda = \alpha = \beta$ (racine double) :	$I = \frac{A}{f''(\lambda)}x^2e^{\lambda x}$.
3° $F(x) = P(x) + Ae^{\lambda x} + Be^{\mu x} + \cdots \cdots + Le^{\omega x}$, $P(x)$: polynôme.		On calcule une intégrale particulière de chacune des équations suivantes : $y'' + ay' + by = P(x)$, $y'' + ay' + by = Ae^{\lambda x}$, etc. La somme de ces intégrales est intégrale de (2).
4° $F(x)$ contient des termes de la forme $A\cos mx$ et $B\sin mx$.		On remplace $\cos mx$ par $\frac{e^{mix} + e^{-mix}}{2}$ et $\sin mx$ par $\frac{e^{mix} - e^{-mix}}{2i}$, et l'on est ramené aux cas précédents.

Pour les équations d'ordre supérieur à deux, le lecteur est prié de se reporter aux traités spécialisés.

INDEX

A

B

C

D

E

F

G

H

INDEX

U

V

W

Y

Z

Achevé d'imprimer en Italie
sur les presses de GEA à Milan
le 30 juillet 1986
Dépôt légal : août 1986
Dépôt légal 1re édition : avril 1985